MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
29, 1, 1991

ANALIZA NIEGŁADKA I METODY NIESTANDARDOWE W ZAGADNIENIACH MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO[1]

WIESŁAW NAGÓRKO

ZDZISŁAW NANIEWICZ

CZESŁAW WOŹNIAK

Uniwersytet Warszawski

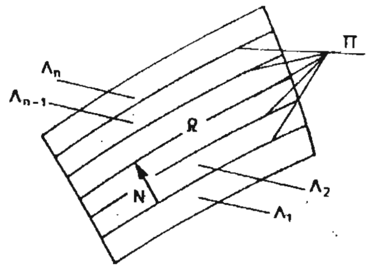
1. Wstęp

Główne kierunki rozwoju mechaniki ciała stałego są wytyczane przede wszystkim potrzebami współczesnej techniki i technologii. Badania podstawowe o charakterze teoretycznym w wielu dziedzinach mechaniki wymagają jednocześnie stosowania nowych pojęć i nowych metod matematycznych, gdyż często tradycyjnie stosowany aparat matematyczny okazuje się niewystarczający do poprawnego opisu i formułowania zagadnień. Ogólnym celem tego opracowania jest pokazanie pewnej współzależności niektórych nowych kierunków rozwoju pewnych dziedzin matematyki. Dokonamy tego na przykładzie dwóch zagadnień z zakresu mechaniki kompozytów, które mimo dosyć szczególnego charakteru dobrze ilustrują taką współzależność. Mechanika materiałów kompozytowych jest bowiem jednym z ważnych kierunków rozwoju współczesnej mechaniki ciała stałego, gdyż znaczenie i przydatność

Takich materiałów do realizacji wielu nowoczesnych konstrukcji są niemal trudne do przecenienia, por. [1–3]. Oba podane niżej zagadnienia mechaniki kompozytów wymagają (bądź co najmniej preferują) stosowania pewnego "niekonwencjonalnego" aparatu matematycznego współczesnej analizy, mianowicie tzw. analizy niegładkiej oraz analizy niestandardowej. W pierwszym przypadku będziemy mieć do czynienia z zagadnieniami nieróżniczkowalnymi (niegładkimi) i niewypukłymi, tj. nie prowadzącymi ani do równań różniczkowych ani do zagadnień dających się opisać metodami analizy wypukłej, por. [4,5]. W drugim przypadku

[1]Opracowano na podstawie referatu problemowo-merytorycznego, przedstawionego w maju 1988 roku na seminarium naukowym Sekcji Mechaniki Ciała Stałego Komitetu Mechaniki PAN, dotyczącym najnowszych kierunków rozwoju mechaniki ciała stałego

wykażemy celowość wprowadzenia do mechaniki w sposób ścisły wielkości "nieskończenie dużych" i "nieskończenie małych", typowych dla analizy niestandardowej, [6–8]; wielkości takie były zresztą używane w mechanice lecz tylko jako pewne intuicje fizyczne.



Rys. 1. Schemat kompozytu warstwowego

Jako pierwszy przykład zagadnienia mechaniki ciała stałego, które prowadzi do korzystania z nowych pojęć analizy matematycznej, podamy opis matematyczny zjawiska delaminacji (rozwarstwienia) kompozytów warstwowych (por. rys.1). Jest to zjawisko utraty trwałego kontaktu pomiędzy warstwami (laminami) kompozytu. Delaminacja jest złożonym zjawiskiem fizycznym. Pokażemy jednak, że nawet najprostsze modele matematyczne delaminacji prowadzą w naturalny sposób do niegładkich i niewypukłych zagadnień analizy matematycznej. Z zagadnieniami takimi mamy do czynienia oczywiście nie tylko przy próbach opisu w ramach mechaniki zjawiska delaminacji, lecz także tam, gdzie następuje możliwość utraty spójności materiału lub elementów konstrukcji, przy czym utrata ta ma charakter nieodwracalny. Jednocześnie zwrócimy uwagę na pewne nowe narzędzia matematyczne jak np. nierówności hemiwariacyjne [9], mogące być podstawą analizy teoretycznej i badań numerycznych takich zagadnień mechaniki. Przykład delaminacji nie został wybrany przypadkowo lecz ilustruje, naszym zdaniem, pewne tendencje rozwojowe we współczesnej mechanice ciała stałego, zmierzające do opisu w ramach mechaniki kontinuum także zjawisk o charakterze "nieciągłym".

Jako drugi przykład zastosowania w mechanice ciała stałego nowych pojęć matematycznych podamy pewną metodę formułowania uproszczonych ("zhomogenizowanych") modeli matematycznych kompozytów o strukturze periodycznej. modele takie formułowano dotychczas albo na podstawie ogólnych przesłanek heurystycznych, por. [1,2], albo stosując różne warianty analizy asymptotycznej, por. [10,11]. Tu z kolei pokażemy, że aparat analizy niestandardowej prowadzi w sposób prosty, ścisły i zgodny z fizyczną intuicją do opisu makro-własności kompozytów periodycznych, bez potrzeby stosowania przejść grancznych i twierdzeń asymptotycznych. Analiza niestandardowa znajduje oczywiście także inne możliwości zastosowań w mechanice, por. [12,13].

Opracowanie nie ma charakteru przeglądowego zarówno w zakresie mechaniki kompozytów jak i w zakresie wprowadzanego aparatu matematycznego. Tym samym nie będziemy omawiać historii i bibliografii problemów, ograniczając się do zacytowania tylko kilku podstawowych prac i monografii. Nowe pojęcia matematyczne wprowadzamy w sposób raczej szkicowy, bardziej podkreślając ich związek z fizyczną stroną omawianych problemów mechaniki niż z bogatym aparatem pojęciowym współczesnej analizy matematycznej. Jako cel stawiamy sobie bowiem zainteresowania czytelnika pewnymi współzależnościami współczesnych kierunków rozwoju mechaniki ciała stałego i matematyki, a nie analizę wybranych zagadnień z mechaniki kompozytów.

2. Delaminacja kompozytów warstwowych

Zjawisko delaminacji kompozytu warstwowego jest ściśle związane z faktem, że materiał wiążący poszczególne laminy nie jest w stanie przenieść dowolnych naprężeń interlaminarnych. Przyjmując, że siły te zależą od skoku wektora przemieszczenia na powierzchni rozdzielającej poszczególne warstwy stajemy przed problemem właściwego doboru relacji między tymi wielkościami. Jest rzeczą oczywistą, że uwzględnienie możliwości trwałego rozwarstwienia nie pozwala na określenie w sposób jednoznaczny sił interlaminarnych w zależności od skoku wektora przemieszczenia. Istnieje jednakże ewentualność określenia zbioru dopuszczalnych naprężeń interlaminarnych odpowiadających danemu stanowi przemieszczenia kompozytu. Zbiór ten wyznaczony być może przy pomocy funkcji energii materiału wiążącego określonej na powierzchni rozdzielającej laminy. Trudność, jaka się w tym miejscu pojawia, polega na tym, że omawiana energia nie jest ani funkcją różniczkowalną, ani funkcją wypukłą. Zatem związek "naprężenia interlaminarne – skoki przemieszczenia" nie może być zdeterminowany za pomocą klasycznego operatora subróżniczkowego analizy wypukłej. Zmuszeni jesteśmy uciec się do ogólniejszego pojęcia, jakim jest uogólniony gradient Clarke'a funkcji lokalnie lipschitzowskich. Okazuje się, że uogólniony gradient funkcji energii materiału wiążącego przyporządkowuje dopuszczalnemu skokowi wektora przemieszczenia akceptowalny fizycznie zbiór możliwych dla danego stanu deformacji sił interlaminarnych. Fakt ten stanowi klucz do wyprowadzenia wariacyjnego sformułowania zagadnienia delaminacji kompozytu warstwowego, które to sformułowanie przyjmuje postać tzw. nierówności hemiwariacyjnej. Nierówności hemiwariacyjne są obecnie przedmiotem intensywnych badań analitycznych i stanowią bardzo ciekawe narzędzie matematyczne do formułowania i badania wielu nieklasycznych zagadnień mechaniki ciała stałego, por. [9].

Załóżmy, że kompozyt warstwowy zajmuje w stanie naturalnym obszar $\Omega \subset R^3$ i jest sumą skończonej liczby warstw Λ_i, $i = 1, ..., n$ tzn. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{\Lambda}_i$. Oznaczmy:

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i, \qquad \Pi = \bigcup_{i=1}^{n-1} \partial\Lambda_{i+1} \cap \Lambda_i \backslash \partial\Omega.$$

Powierzchnie interlaminarne Π zorientujemyza pomocą jednostkowego pola wektorowego $\boldsymbol{N}$, (rys.1).

Niech $\boldsymbol{u}: \Lambda \to R^3$ i $\sigma: \Lambda \to R^6$ oznaczają odpowiednio pole wektora przemieszczenia i pole tensora naprężenia.

Oznaczmy przez $[\boldsymbol{u}]$ skok wektora przemieszczenia na Π oraz przez $[u]_N$ i $[\boldsymbol{u}]_T$ jego składowe normalną i styczną, tj.

$$[\boldsymbol{u}] = [u]_N \boldsymbol{N} + [\boldsymbol{u}]_T, \qquad [u]_N = [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{N}, \qquad [\boldsymbol{u}]_T = [\boldsymbol{u}] - [u]_N \boldsymbol{N}.$$

Pomijając siły inercji oraz zakładając, że na powierzchniach interlaminarnych nie przyłożone są żadne siły zewnętrzne otrzymujemy następujący układ równań równowagi, równań konstytutywnych i warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho b_i &= 0 && \text{w} \quad \Lambda, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijm} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) && \text{w} \quad \Lambda, \\ \sigma_{ij} n_j &= p_i && \text{na} \quad \partial_F \Omega, \\ u_i &= u_{io} && \text{na} \quad \partial_u \Lambda, \\ \sigma_{ij}^{+} N_j &= \sigma_{ij}^{-} N_j \equiv t_i && \text{na} \quad \Pi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $\boldsymbol{b}$ jest wektorem sił masowych, ρ – gęstością, $\boldsymbol{p}$ – obciążeniami zewnętrznymi, $\mathbf{C}$ – tensorem sprężystości, $\sigma^{+}N$ i $\sigma^{-}N$ są śladami wektora naprężenia na Π, natomiast $\boldsymbol{t}$ z uwagi na związek (2.1) możemy interpretować jako naprężenie interlaminarne na Π.

Warunek nieprzenikalności

Wykluczamy możliwość przenikania sąsiadujących warstw. Oznacza to, że dopuszczamy tylko takie stany deformacji, dla których spełniony jest warunek:

$$[u]_N \geq 0. \tag{2.2}$$

Traktując powyższą nierówność jako ograniczenie na deformacje postulujemy istnienie sił reakcyjnych r_N utrzymujących te ograniczenia. W związku z ogólną zasadą więzów [13], związek pomiędzy $[u]_N$ i r_N da się przedstawić w postaci:

$$r_N \in \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad [u]_N > 0 \\ \bar{R}_{+} & \text{jeśli} \quad [u]_N = 0 \\ \emptyset & \text{jeśli} \quad [u]_N < 0 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Następnym postulatem jest założenie, że całkowite naprężenie interlaminarne $\boldsymbol{t}$ stanowi sumę:

$$\boldsymbol{t} = r_N \boldsymbol{N} + \boldsymbol{s}, \tag{2.4}$$

gdzie $\boldsymbol{s}$ jest naprężeniem interlaminarnym związanym z własnościami konstytutywnymi materiału wiążącego.

Celem określenia warunku delaminacji zdefiniujemy funkcję:

$$\bar{\gamma}([\boldsymbol{u}]) = +\frac{1}{2}\gamma_N([u]_N)^2 + \frac{1}{2}\gamma_T\|[\boldsymbol{u}]\|^2 - \alpha,$$

gdzie stałe dodatnie γ_N i γ_T interpretujemy odpowiednio jako moduły rozciągania i ścinania materiału wiążącego laminy, natomiast stała dodatnia α charakteryzuje poziom energetyczny materiału wiążącego, przy którym następuje rozwarstwienie kompozytu.

Warunki delaminacji

Przyjmiemy następujące warunki delaminacji:

$$\begin{cases} -S_N = \gamma_N[u]_N \\ -\boldsymbol{S}_T = \gamma_T[\boldsymbol{u}]_T & \text{jeśli} \quad \bar{\gamma}([\boldsymbol{u}]) < 0 \\ \\ -S_N \in [0, \gamma_N[u]_N] \\ -\boldsymbol{S}_T \in [0, \gamma_T[\boldsymbol{u}]_T] & \text{jeśli} \quad \bar{\gamma}([\boldsymbol{u}]) = 0 \\ \\ -S_N = 0 \\ -\boldsymbol{S}_T = \boldsymbol{0} & \text{jeśli} \quad \bar{\gamma}([\boldsymbol{u}]) > 0 \end{cases}, \tag{2.5}$$

gdzie: $S_N = S_{ij}N_iN_j$, $\boldsymbol{S}_T = (S_{T_i})$, $S_{T_i} = S_{ij}N_j - S_N N_i$.

Z uwagi na nieodwracalny charakter badanego zjawiska zakładamy, że po delaminacji w danym punkcie energia wiązania pozostaje równa 0 (warstwy nie mogą się same skleić). Mamy wtedy do czynienia jedynie z jednostronnym kontaktem sąsiadujących warstw.

Warunki (2.3), (2.5) możemy zapisać w jednolitej postaci wprowadzając następujące wielkości:

$$\mathrm{ind}_{R_+}([u]_N) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad [u]_N \geq 0 \\ +\infty & \text{jeśli} \quad [u]_N \leq 0 \end{cases},$$

$$\partial \mathrm{ind}_{R_+}([u]_N) = \begin{cases} \{r : r(v - [u]_N) \leq 0, \ \forall v \geq 0\} & \text{jeśli} \quad [u]_N \geq 0 \\ \emptyset & \text{jeśli} \quad [u]_N < 0 \end{cases},$$

$$\gamma([\boldsymbol{u}]) = \begin{cases} \bar{\gamma}([\boldsymbol{u}]) & \text{jeśli} \quad \gamma([\boldsymbol{u}]) < 0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad \bar{\gamma}([\boldsymbol{u}]) \geq 0 \end{cases}, \tag{2.6}$$

$$\gamma^0([u];w) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ \lambda\searrow 0}} \frac{\gamma([u]+h+\lambda w)-\gamma([u]+h)}{\lambda}, \tag{2.7}$$

$$\bar{\partial}_\gamma([u]) = \{s \in R^3 : \bar{\gamma}^0([u];w) \geq w\cdot s, \quad \forall w \in R^3\}, \tag{2.8}$$

gdzie $\partial\mathrm{ind}_{\bar{R}_+}$ jest subróżniczką funkcji indykatorowej zbioru R_+ , natomiast $\bar{\partial}_\gamma$ jest uogólnionym gradientem Clarke'a funkcji γ, którą interpretujemy jako funkcję energii materiału wiążącego.

Po prostych rachunkach otrzymujemy następującą postać warunków (2.3) i (2.5):

$$-r_N \in \partial\mathrm{ind}_{\bar{R}_+}([u]_N), \tag{2.3'}$$

$$-s \in \bar{\partial}\gamma([u]). \tag{2.5'}$$

Ostatecznie stwierdzamy, że układ podstawowych relacji zagadnienia delaminacji kompozytu warstwowego składa się z równań równowagi (2.1) , równań konstytutywnych (2.1) , warunków brzegowych (2.1) oraz z warunków nieprzenikalności i delaminacji (2.4),(2.3′) i (2.5′).

Korzystając z lokalnej postaci tego układu możemy sforrmułować jego wariacyjny odpowiednik. W tym celu połóżmy:

$$V = \{v \in L^2(\Omega)^3 : v|_{\Lambda_k} \in H^1(\Lambda_k)^3, \quad k = 1,...,n, \quad \tau_u v = u_0\}, \tag{2.9}$$

gdzie $L^2(\Omega)$ jest przestrzenią funkcji całkowalnych z kwadratem w Ω, $H^1(\Lambda_k)$ oznacza przestrzeń Sobolewa funkcji całkowalnych z kwadratem w Λ_k wraz ze swoimi pochodnymi dystrybucyjnymi pierwszego rzędu, oraz gdzie τ_u jest operatorem śladu na Γ_u. V interpretujemy jako przestrzeń przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych.

Ponadto zdefiniujemy: — biliniową formę teorii sprężystości:

$$a(u,v) = \int_\Lambda C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(v)d\Omega, \quad u,v \in V, \tag{2.10}$$

— funkcjonał $f \in V^*$ sił zewnętrznych działających na kompozyt:

$$< f,v > \stackrel{df}{=} \int_\Omega \rho b\cdot v d\Omega + \int_{\partial\Omega} p\cdot v ds, \quad v \in V, \tag{2.11}$$

gdzie V^* jest przestrzenią sprzężoną do V, $<\cdot,\cdot>$ jest formą biliniową na $V^*\times V$,
— całkowitą energię materiału wiążącego:

$$J(u) = \int_\Pi \gamma([u])ds, \quad u \in V, \tag{2.12}$$

— zbiór przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych spełniających warunek nieprzenikalności:

$$K = \{u \in V : [u]_N \geq 0 \text{ na } \Pi\}. \tag{2.13}$$

Niech:

$$J^0(u; v) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \searrow 0}} \frac{J(u + h + \lambda v) - J(u + h)}{\lambda}, \tag{2.14}$$

oznacza uogólnioną pochodną kierunkową funkcjonału J. Wówczas zasada prac wirtualnych dla zagadnienia delaminacji przyjmuje postać następującej nierówności hemiwariacyjnej:

$$a(u, v - u) + \langle f, v - u \rangle + J^0(u; v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K, \tag{2.15}$$

gdzie $u \in K$ jest poszukiwanym polem przemieszczenia. Powstały naturalnie problem istnienia rozwiązania powyższej nierówności można wyrazić za pomocą multifunkcji:

$$A + \partial J + \partial I_K,$$

gdzie $\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V$ jest operatorem Lamé, ∂J jest uogólnionym gradientem Clarke'a funkcjonału J, tzn:

$$\partial J(u) = \{v^* \in V^* : J^o(u; v) \geq \langle v^*, v \rangle, \quad \forall v \in V\},$$

natomiast ∂I_K jest subróżniczką funkcji indykatorowej zbioru K, tzn:

$$\partial I_K(u) = \{v^* \in V^* : \langle v^*, v - u \rangle \leq 0, \quad \forall v \in K\}.$$

Stawiamy następujące pytanie: czy istnieje taki element $u \in K$, dla którego:

$$f \in Au + \partial J(u) + \partial I_K(u). \tag{2.16}$$

Zasadnicze problemy pojawiające się przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia polegają na tym, że multioperator ∂J nie jest monotoniczny (energia wiązania nie jest funkcją wypukła). nie możemy więc posługiwać się przy jego analizie wyłącznie teorią nierówności wariacyjnych, której metody, jak dobrze wiadomo, pozwoliły w ostatnich latach rozwiązać taki wiele interesujących nieklasycznych problemów mechaniki, por. np. [9]. Musimy rozszerzyć nasz aparat matematyczny o nowe środki stwarzające możliwość rozwiązania sformułowanego tu zagadnienia. Wykażemy, że metody teorii odwzorowań pseudo-monotonicznych oraz uogólnionych pseudo-monotonicznych stanowią taki środek i jak się wydaje mogą przynieść w najbliższej przyszłości istotny postęp w badaniach innych niewypukłych zagadnień mechaniki ciała stałego.

Celem zaprezentowania teorii odwzorowań pseudo-monotonicznych udowodnimy istnienie rozwiązań zagadnienia delaminacji (2.16) w dowolnej ustalonej chwili t. Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że w swojej historii do chwili t kompozyt nie uległ delaminacji w żadnym punkcie powierzchni interlaminarnych oraz że kompozyt jest zamocowany na brzegu w ten sposób, że każda z jego warstw jest utwierdzona na części swego brzegu, tzn:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad \text{na} \quad \Gamma_u, \qquad \mathrm{mes}(\Gamma_u \cap \partial \Lambda_K) > 0, \quad k = 1, ..., n. \tag{2.17}$$

Dowód istnienia rozwiązania zagadnienia (2.16) będzie polegał na uzasadnieniu, że odwzorowanie $A + \partial J + \partial I_K$ jest surjekcją. W tym celu zauważmy, że wobec (2.17) oraz dzięki nierówności Korna operator A spełnia nierówność:

$$< A\mathbf{v}, \mathbf{v} > \geq c\|\mathbf{v}\|_V^2, \qquad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Jest on zatem maksymalnie monotonicznym koercytywnym operatorem z V do V^*. Maksymalna monotoniczność ∂I_K jest konsekwencją wypukłości i domkniętości zbioru K w V, [4]. Przejdźmy teraz do własności odwzorowania ∂J. Udowodnimy poniżej, że jest ono pseudo-monotoniczne, tzn. spełnia następujące warunki [14]:

(i) $\partial J(\mathbf{v})$ jest niepusty, wypukły, domknięty i ograniczony dla każdego $v \in V$;

(ii) ∂J jest półciągły dolnie z V do V^* (V^* wyposażona w słabą topologię);

(iii) Jeśli $\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}$, $\quad v_n^* \in \partial J(\mathbf{v}_n)$ oraz $\limsup < \mathbf{v}_n^*, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} > \leq 0$, to dla każdego $\mathbf{w} \in V$ istnieje $v^*(\mathbf{w}) \in \partial J(\mathbf{v})$ taki, że:

$$\liminf < v_n^*, \mathbf{v}_n - \mathbf{w} > \; \geq \; < v^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} - \mathbf{w} >,$$

gdzie "$\rightharpoonup$" oznacza słabą zbieżność w V.
Przyjmijmy teraz, że dowód pseudo-monotoniczności ∂J został już przeprowadzony. Wówczas mając na uwadze fakt, że $A + \partial I_K$ jest maksymalnie monotoniczny oraz $0 \in \mathrm{dom}(A + \partial I_K)$[1], wnosimy na mocy twierdzenia 8 ([14], s.283), że $A + \partial J + \partial I_K$ jest odwzorowaniem regularnym współliniowym pseudo-monotonicznym (w terminologii [14]). Ponadto, z koercytywności A łatwo wnioskujemy koercytywność $A + \partial J + \partial I_K$. Zatem wobec Twierdzenia 2 ([14], s.263) $A + \partial J + \partial I_K$ jest surjekcją, tzn:

$$R(A + \partial J + \partial I_K) = V^*,$$

gdzie R oznacza obraz danego odwzorowania. Tym samym istnienie rozwiązania zagadnienia delaminacji (2.13) jest uzasadnione. Celem skompletowania dowodu winniśmy jeszcze wykazać pseudomonotoniczność ∂J. Zauważmy w tym celu, że funkcja γ dana przez (2.6) spełnia następujące związki:

$$|\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{y})| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_R^3, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3, \tag{2.18}$$

[1] "dom" oznacza dziedzinę efektywną odwzorowania.

dla pewnego $k > 0$, czyli γ jest funkcją lipschitzowską, oraz:

$$(-\gamma)^0(x;y) = (-\gamma)'(x;y), \qquad \forall x, y \in R^3, \tag{2.19}$$

gdzie:

$$(-\gamma)'(x;y) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{(-\gamma)(x + \lambda y) - (-\gamma)(x)}{\lambda},$$

czyli $-\gamma$ jest funkcją regularną w sensie Clarke'a, [15]. Zdefiniujmy funkcjonał $\bar{J} : L^2(\Pi)^3 \to R$ kładąc:

$$\bar{J}(w) = \int_\Pi \gamma(w) d\Pi, \qquad w \in L^2(\Pi)^3. \tag{2.20}$$

Otrzymujemy wówczas następujący związek pomiędzy J danym przez (2.12) a $\bar{J}$:

$$J(u) = \bar{J}([u]), \qquad u \in V. \tag{2.21}$$

Z (2.18) wynika, że $\bar{J}$ jest lipschitzowski w $L^2(\Pi)^3$, co z kolei, dzięki ciągłości operatora $[\cdot]$ oraz (2.21) implikuje:

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v)| &= |\bar{J}([u]) - \bar{J}([v])| \leq c \parallel [u] - [v] \parallel_{L^2_{(\Pi)^3}} \leq \\ &\leq \bar{c} \parallel u - v \parallel_V, \qquad \forall u, v \in V, \end{aligned} \tag{2.22}$$

gdzie c i $\bar{c}$ są stałymi dodatnimi. Oznacza to, że J spełnia warunek Lipschitza w V. Jest rzeczą znaną, że uogólniony gradient Clarke'a takiego funkcjonału spełnia warunki (i) oraz (ii), [15]. Winniśmy zatem skoncentrować się na wykazaniu warunku (iii). Załóżmy wobec tego, że $v_n \rightharpoonup v$, $v_n^* \in \partial J(v_n)$ oraz $\limsup < v_n^*, v_n - v > \leq 0$. Wykorzystując oczywistą nierówność:

$$J^0(u;v) \leq \bar{J}^o([u];[v]), \qquad \forall u, v \in V, \tag{2.23}$$

gdzie:

$$\bar{J}^o([u];[v]) = \limsup_{\substack{h \xrightarrow{L^2(\pi)} 0 \\ \lambda \searrow 0}} \frac{\bar{J}([u] + h + \lambda[v]) - \bar{J}([u] + h)}{\lambda},$$

oraz (2.22) dochodzimy do oszacowania:

$$| < v_n^*, v_n - v > | \leq c \, \|[v_n] - [v]\|_{L^2(\Pi)^3}. \tag{2.24}$$

Następnie, ze zwartości operatora śladu $\tau : H^1(\Lambda_k) \to L^2(\partial\Lambda_k)$, [16], wynika zwartość operatora skoku $[\cdot]: V \to L^2(\Pi)^3$, co pociąga za sobą silną zbieżność:

$$[v_n] \to [v] \quad \text{w} \quad L^2(\Pi)^3.$$

Stąd na mocy (2.24):

$$\lim < v_n^*, v_n - v >= 0. \tag{2.25}$$

W wyniku tego:

$$\liminf < v_n^*, v_n - w >= \liminf < v_n^*, v - w > \tag{2.26}$$

dla dowolnego $w \in V$.

Ponieważ J jest lipschitzowski, ciąg (v_n^*) jest ograniczony w V^*. Zatem, wobec (2.26), celem udowodnienia warunku (iii) wystarczy pokazać, że każda słaba granica ciągu (v_n^*) jest elementem $\partial J(v)$. Nie tracąc ogólności rozważań możemy przyjąć, że $v_n^* \rightharpoonup v^*$. Z (2.19) wynika, że $-\bar{J}$ jest również regularny w sensie Clarke'a. Stąd:

$$\bar{J}^0(u; v) = (-\bar{J})'(u; -v), \qquad \forall u, v \in L^2(\Pi)^3,$$

co pociąga za sobą:

$$J^0(u; v) = \bar{J}^0([u]; [v]), \qquad \forall u, v \in V. \tag{2.27}$$

A więc nierówność (2.23) jest w istocie równością. Fakt ten wraz z półciągłością górną $J^o(\cdot,\cdot)$ w $L^2(\Pi)^3 \times L^2(\Pi)^3$, [15], oraz ze zwartością operatora $[\cdot]$ pozwala na stwierdzenia, że $J^o(\cdot,\cdot)$ jest słabo półciągłą górnie funkcją w $V \times V$, tzn:

$$\limsup J^0(v_n; w) \leq J^0(v, w), \qquad \forall w \in V. \tag{2.28}$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę:

$$J^0(v_n; w) \geq < v_n^*, w >, \qquad \forall w \in V,$$

oraz (2.28) dochodzimy do:

$$J^0(v; w) \geq < v^*, w >, \qquad \forall w \in V.$$

Oznacza to, że $v^* \in \partial J(v)$. Co było do okazania.

3. Homogenizacja mikrolokalna kompozytów periodycznych

Spośród ciał materialnych wyróżnić można kompozyty o strukturze periodycznej. Jeśli kompozyty te składają się z niewielkiej liczby powtarzających się części, to badać je można w ramach teorii mechaniki ciał stałych. W przypadku gdy komórek tych jest "dużo", to przy takim podejściu napotyka się na ogół na znaczne trudności analityczne. Pojawia się więc potrzeba konstrukcji teorii uproszczonych.

Takie modelowanie uproszczone jest znane i określone terminem teorii ośrodków "uśrednionych" albo zhomogenizowanych. Do najbardziej znanych metod homogenizacyjnych należy homogenizacja asymptotyczna [10–11]. Prowadzi ona, między innymi, do poszukiwania rozwiązania zagadnienia na komórce podstawowej, jednak rozwiązanie takiego problemu na ogół wcale nie jest prostsze od poszukiwania rozwiązania wyjściowego. Przedstawiona w tej pracy metoda homogenizacji zwana homogenizacją mikrolokalną oparta jest na pracach [17–18]. Różni się ona przede wszystkim tym od metod znanych, że bazuje na nieklasycznej analizie matematycznej tzw. analizie niestandardowej [6]. W konsekwencji schemat założeń tej teorii i układ relacji modelujących jest inny i nie prowadzi do rozwiązywania problemu dla komórki podstawowej.

Kompozyty, które poddamy homogenizacji opiszemy najpierw na gruncie analizy klasycznej. nie zawężając ogólności rozważań ograniczymy się do periodycznych kompozytów sprężystych. Przyjmijmy, że Ω jest konfiguracją rozważanego kompozytu; $\Omega \subset R^3$. Z założenia o periodyczności kompozytu wynika, że znany jest rozkład obszaru $\bar{\Omega} = U\bar{\Omega}_A$, $A = 1,2,...,r$ oraz dany jest wektor $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^k)$, $\xi^k \in \bar{R}_+$, $k = 1,2,3$ taki, że każda część Ω_A jest obszarem translacji zbioru $C = \{X \in R^3;\ |X^k| < 0.5\xi^k\}$ o pewien wektor $(\pm n\xi^k)$ i n są liczbami naturalnymi. Niech tensor B^{klmn} będzie tensorem stałych sprężystości ciała, wtedy dla $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\xi}$ zachodzi:

$$B^{klmn}(\boldsymbol{X}) = B^{klmn}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\xi}). \tag{3.1}$$

Wyodrębniony kompozyt sprężysty o strukturze periodycznej opisać można znanymi relacjami teorii sprężystości. I tak, jeśli przez $\boldsymbol{u}$ oznaczymy wektor przemieszczenia, przez $\boldsymbol{b}$ siły masowe a przez $\boldsymbol{p}$ obciążenia powierzchniowe to podstawową relacją liniowej teorii sprężystości jest:

$$\int_{\Omega} (B^{klmn} u_{n,} l^{v}_{m,n} - b^k v_k) dv = \int_{\partial\Omega} p^k v_k da, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.2}$$

gdzie V jest przestrzenią przemieszczeń wirtualnych. Relacja (3.2) z warunkiem (3.1) opisuje periodyczny kompozyt sprężysty. Jest więc to opis klasyczny, liniowej teorii sprężystości. W opisie tym dla danego kompozytu sformułować należy problem poszukiwania przemieszczeń przy zadanych $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{p}$. W takim sformułowaniu złożenie periodyczności kompozytu nie upraszcza poszukiwania rozwiązań.

Jeżeli kompozyt złożony jest z "dużej" liczby komórek periodyczności to to, czy jest ich dwa, trzy czy też n razy więcej nie powinno wpływać na rozwiązanie problemu, tzn. rozwiązanie problemu dla kompozytu o m komórkach czy dla kompozytu o $m' = nm$ komórkach powinno się różnić "pomijalnie mało", jedno powinno "aproksymować" drugie. Przedstawiona wyżej argumentacja może być ujęta formalnie w postaci pewnej hipotezy zwanej hipotezą homogenizacyjną [18].

W celu sformułowania tej hipotezy rozpatrzmy kompozyt, dla którego Ω, $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ są takie jak poprzednio, wektor ξ jest pomniejszony n-krotnie, $n \in N$, tzn. $\xi = \bar{\xi}/n$ zaś stałe materiałowe są postaci:

$$\bar{B}^{klmn}(X) = B^{klmn}(nX). \tag{3.3}$$

Z (3.1) wynika, że $\bar{B}^{klmn}$ jest teraz funkcją o okresie ξ zaś skoro Ω się nie zmieniło, to komórek periodyczności jest n^3 razy więcej.

Relacja (3.2) przyjmie dla tego ciała postać:

$$\int_{\Omega}(\bar{B}^{klmn}\bar{u}_{k,l}v_{k,l} - b^k v_k)dv = \int_{\partial\Omega} p^k v_k dv, \qquad \mathbf{v} \in V. \tag{3.4}$$

Oznaczmy przez P problem określony związkami (2.9) - (3.2), zaś przez P_n związkami (3.3) - (3.4). Będziemy zakładać, że problem P jest aproksymowany przez problem P_n tzn. że określona jest w pewien sposób aproksymacja rozwiązania problemu P przez rozwiązanie problemu P_n. Relację aproksymacji oznaczymy przez $\cong$. Założenie o aproksymacji nazywamy hipotezą homogenizacyjną i formułujemy w postaci:

$$P \cong P_n, \qquad n \in N, \tag{3.5}$$

tj. "problem P jest aproksymowany przez problem P_n dla każdego $n \in N$". O relacji $\cong$ zakładamy, że zachodzi dla przemieszczeń (globalnie) i naprężeń (lokalnie) $U \cong U_n$ dla $X \in \Omega$:

$$\mathbf{T} \cong \mathbf{T}_n \quad \text{dla} \quad X \in \Delta,$$

gdzie Δ jest komórką podstawową.

W dalszym ciągu skonstruujemy model kompozytu w oparciu o analizę niestandardową. W tym celu przytoczymy niektóre fakty [6].

Struktura analizy niestandardowej (tj. zbiór liczbowy i relacje na liczbach), którą oznaczmy przez $^*M$, jest rozszerzeniem struktury analizy klasycznej opartej na zbiorze liczb rzeczywistych, którą oznaczymy przez M. Struktura $^*M$ charakteryzuje się między innymi tym, że każdą relację $\alpha \in M$ można jednoznacznie rozszerzyć do $^*\alpha \in {}^*M$. Taką rozszerzoną relację nazywa się standardową. Relacja standardowa będąca zbiorem nieskończonym jest istotnie różna od α, gdyż zawiera także elementy niestandardowe. I tak, rozszerzeniem zbioru R, liczb rzeczywistych jest zbiór $^*R$, który zawiera R, wszystkie liczby postaci $r + \varepsilon$, gdzie $r \in R$ a ε jest inifinitesymalną oraz liczby nieskończone $1/\varepsilon$. Zbiór infinitezymalnych Mon(0) zawiera 0 oraz wszystkie liczby niestandardowe nie należące do R i takie, że ich wartość bezwzględna jest mniejsza od każdej liczby $r \in R_+$. Wykazuje się, że zbiór ten zawiera nieskończenie wiele elementów. W przestrzeni $^*R$ można określić relację:

$$a \simeq b \Longleftrightarrow a, b \text{ skończone}, \quad a - b \in \mathrm{Mon}(0).$$

Przejdźmy teraz do modelu niestandardowego rozpatrywanego kompozytu. W ujęciu tym konfigurację ciała będzie obszar standardowy $^*\Omega \subset {}^*R^3$, tj. zbiór wszystkich $Y = X + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon = (\varepsilon^k)$, $k = 1,2,3$, $\varepsilon^k \in \mathrm{Mon}(0)$ i $X \in \Omega$. Funkcje $^*B^{klmn}$, $^*p^k$, $^*b^k$, $^*u^k$, $^*v^k$ mają w strukturze niestandardowej swoje standardowe rozszerzenia $^*B^{klmn}$, $^*p^k$, $^*b^k$, $^*v^k$, które są funkcjami określonymi na $^*\Omega$ o wartościach w R.

W dalszym postępowaniu istotne jest wykorzystanie następującego faktu z analizy niestandardowej; jeżeli relacja (3.5) zachodzi dla każdego naturalnego n, to istnieje liczba naturalna nieskończona $\omega \in {}^*N \backslash N$ taka, że spełniony jest związek:

$$^*P \; ^*\!\cong P_\omega. \tag{3.6}$$

W związku (3.6) $^*P$ jest standardowym rozszerzeniem problemu P, $^*\cong$ standardowym rozszerzeniem relacji $\cong$, zaś P_ω przyjmuje postać:

$$\int_{^*\Omega} (\bar{B}^{klmn}\bar{u}_k, l^{\bar{v}} m, n - {}^*b^k \bar{v}_k) dv = \int_{^*\partial\Omega} {}^*p^k \bar{v}_k da, \qquad \bar{v} \in {}^*V, \tag{3.7}$$

gdzie:

$$\bar{B}^{klmn}(X) = {}^*B(\omega X). \tag{3.8}$$

Funkcje $\bar{u}$, $\bar{v}$ występujące w (3.7) są funkcjami niestandardowymi należącymi do $^*V$.

Zgodnie z (3.8) funkcje $\bar{B}^{klmn}$ są okresowe o okresie $\varepsilon = \xi/\omega$ czyli okresie infinitezymalnym. Rozwiązanie problemu (3.7) — przemieszczenie $\bar{u}$ różni się od standardowego rozszerzenia rozwiązania problemu (3.2) $^*u$ o część infinitezymalną:

$$\bar{u}^k(X) = {}^*u^k(X) + u_0^k(X),$$

gdzie: $u_0^k = \bar{u}^k - {}^*u^k \simeq 0$.

Przemieszczenia $\bar{u}^k$ są więc sumą dwu składników: wektora przemieszczenia całej komórki $^*u$, tzw. wektora "makro" oraz wektora u_0 opisującego zachowanie się komórki w jej wnętrzu - przemieszczenia "mikro". Przemieszczenie mikro jest pomijalnie małe względem przemieszczenia makro. Jednakże gradienty tego przemieszczenia mogą już przyjmować wartości rzeczywiste różne od zera a więc nieinfinitezymalne.

Kolejnym założeniem, jakie wprowadzamy, jest założenie o istnieniu więzów mikrolokalnych. Więzy te ograniczają klasę funkcji niestandardowych u_0^k do funkcji postaci:

$$u_0^k(X) = h_a(X) \, {}^*q^{ak}(X),$$

gdzie $h_a : {}^*R^3 \to R$ są funkcjami infinitezymalnymi $h_a(X) \simeq 0$, $X \in {}^*\Omega$ okresowymi, o okresie ε i oscylującymi, tzn. całka po komórce periodyczności Δ jest równa 0.

Funkcje h_a stanowią bazę w podprzestrzeni skończenie wymiarowej $^*V$ i otrzymuje się je z funkcji standardowych l_a, okresowych o okresie ξ i oscylujących w następujący sposób:

$$h_a(X) = \frac{1}{\omega}\, {}^*l_a(\omega X). \tag{3.9}$$

Funkcje (3.9) są dane i nazywa się je funkcjami kształtu.

Funkcje $^*q^a : {}^*\Omega \to {}^*R^3$ są funkcjami standardowymi i funkcjami poszukiwanymi. Nazywa się je parametrami mikrolokalnymi.

Zgodnie z tym co napisano wyżej, poszukuje się rozwiązań w klasie funkcji:

$$\bar{u}^k(X) = {}^*u^k(X) + h_a(X)\, {}^*q^{ak}(X). \tag{3.10}$$

Związek (3.10) określa więzy mikrolokalne dla kompozytu periodycznego.

Relacje (3.7) - (3.10) stanowią komplet relacji modelujących kompozyt mikroperiodyczny. Otrzymano je z relacji klasycznych opisujących kompozyt periodyczny (3.1) - (3.2) oraz z założenia (3.6) - hipotezy homogenizacyjnej. Drugim w tym modelu i ostatnim założeniem jest przyjęcie więzów w postaci (3.10).

Przedstawiony model będzie użyteczny jeżeli okaże się, że można w nim wyprowadzić proste związki na poszukiwane funkcje u^k i q^{ak} . Wprowadzimy teraz te związki.

Niech w $^*R^3$ dana jest siatka punktów:

$$\Lambda = \{X :\ X = n\varepsilon,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\} \cap {}^*\Omega,$$

oraz $\partial\Lambda = \Lambda \cap {}^*\partial\Omega$.

Zakładając, że wszystkie komórki periodyczności mające punkt wspólny z Λ należą do $^*\Omega$ związek (3.7) po podstawieniu w nim więzów (3.10) zapisać można w postaci:

$$\sum_{Y\in\Lambda} \int_{\Delta(Y)} [\bar{B}^{klmn}({}^*u_{k,l}\, {}^*v_{l,m} + h_{a,n}\, {}^*u_{k,l}\, {}^*r^a_m + h_{a,l}\, {}^*q^a_k\, {}^*v_{m,n} +$$

$$+ h_{a,l} h_{b,n}\, {}^*q^a_k\, {}^*r^b_m - {}^*b^k\, {}^*v_k] dv \simeq \sum_{Y\in\partial\Lambda} \int_{\partial\Delta(Y)\cap{}^*\partial\Omega} {}^*p^k\, {}^*v_k da, \tag{3.11}$$

gdzie $\Delta(Y)$ jest komórką periodyczności zawierającą punkt Y, zaś $^*r^a_k$, $^*v_k$ są funkcjami wyznaczającymi przemieszczenia wirtualne:

$$\bar{v}^k(X) = {}^*v^k(X) + h_a(X)\, {}^*r^{ka}(X).$$

Do relacji (3.11) zastosujemy teraz twierdzenie Robinsona [6]. Zgodnie z założeniami tego twierdzenia powinny istnieć funkcje standardowe:

$$^*{<}B^{klmn}{>} \simeq \frac{1}{\mathrm{Vol}\Delta} \int_{\Delta} \bar{B}^{klmn} dv,$$

$$^{*}<B^{klmn}h_{a,k}> \simeq \frac{1}{\mathrm{Vol}\Delta}\int\limits_{\Delta}\bar{B}^{klmn}h_{a,k}dv,$$

$$^{*}<B^{klmn}h_{a,k}h_{b,m}> \simeq \frac{1}{\mathrm{Vol}\Delta}\int\limits_{\Delta}\bar{B}^{klmn}h_{a,k}h_{b,m}dv.$$

Jeżeli tak jest, wtedy relacja (3.11) przyjmie następującą postać (w strukturze rzeczywistej M):

$$\int\limits_{\Omega}(<\bar{B}^{klmn}> u_{k,l}\, v_{m,n} + <\bar{B}^{klmn}h_{a,n}> (u_{k,l}\, r^{a}_{m} + q^{a}_{m}\, v_{k,l}) +$$

$$+ <\bar{B}^{klmn}h_{a,l}\, h_{b,n}> q^{a}_{k}\, r^{b}_{m} - b^{k}v_{k})dv = \int\limits_{\partial\Omega} p^{k}v_{k}\, da, \qquad v, r^{a} \in V. \tag{3.12}$$

Stąd stosując klasyczny formalizm wariacyjny otrzymujemy :

$$< B^{klmn} > u_{k,ln} + < B^{klmn}h_{a,l} > q^{a}_{k,n} = b^{m},$$

$$< B^{klmn}h_{a,n} > u_{k,l} + < B^{klmn}h_{a,l}\, h_{b,n} > q^{b}_{k} = 0, \tag{3.13}$$

oraz warunki brzegowe:

$$< B^{klmn} > u_{k,l}\, u_{n} + < B^{klmn}h_{a,k} > q^{a}_{l}\, u_{n} = p^{m}. \tag{3.14}$$

Równania (3.13) wraz z warunkami brzegowymi (3.14) opisują periodyczne ciała sprężyste. Poszukiwanymi funkcjami są przemieszczenia u^{k} i parametry mikrolokalne q^{a}_{k}. Wykazuje się, że z układu równań (3.13) można wyeliminować parametry mikrolokalne (równania (3.13) są równaniami algebraicznymi na parametry mikrolokalne q^{a}). Otrzymuje się wtedy układ równań drugiego rzędu na przemieszczenie u.

Zauważmy, że wpływ parametrów mikrolokalnych jest pomijalny w przypadku przemieszczeń. Zgodnie bowiem z (3.10) człony z tymi parametrami są infinitezymalne, więc ich części standardowe znikają, Tak jednak nie jest dla odkształceń, mamy bowiem, po pominięciu członów infinitezymalnych:

$$\nabla\bar{u} = \nabla\bar{u} + \nabla h_{a}q^{a}.$$

W powyższych związkach części standardowe gradientów funkcji kształu nie są infinitezymalne i należą do R.

Niestandardowy model kompozytów mikroperiodycznych otrzymano w oparciu o analizę niestandardową, bez założeń o przejściach asymptotycznych. Układ związków opisujących przemieszczenia ciała zależy od dodatkowych niewiadomych funkcji opisujących zachowanie się ciała w komórce podstawowej (tzn. parametrów mikrolokalnych). Układ otrzymanych równań na przemieszczenia i parametry mikrolokalne nie wymaga rozwiązania zagadnienia na komórce podstawowej. W szczególnym przypadku prowadzi on do klasycznego zagadnienia teorii sprężystości.

Przedstawiony model można rozszerzyć na przypadki ciał niesprężystych i nieliniowych.

Literatura

1. CHRISTENSEN R.M., *Mechanics of composite materials*,J.Wiley and Sons, New York, 1980
2. JONES R., *Mechanics of composite materials*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975
3. *Mechanical Behaviour of Composities and Laminates*, ed. W.A.Green and M.Micunovic, Elsevier Applied Science Publ., 1987
4. ELEKAND I., TEMAN R., *Convex analysis and variational problems*, North-Holland - American Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York, 1976
5. DUVANT G., LIONS J.L., *Les Inequations en mecanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972
6. ROBINSON A., *Nonstandard analysis*, North-Holland - American Elsevier, Amsterdam-London-New York, 1974
7. STROYAN K.D., LUXEMBURG W.A.J., *Introduction to theory of infinitesimals*, Academic Press, New York-London, 1976
8. NELSON E., *Internal set theory; a new approach to nonstandard analysis*, Bull.Amer.Math.Soc., 83, 1977
9. PANAGIOTOPOULOS P.D., *Inequality problems in mechanics and applications*, Birkhäuser, Boston, 1985
10. BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978
11. SANCHEZ-PALENCIA E., *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer Verlag, Berlin, 1980
12. LUTZ R., GOZEM.,*Nonstandard analysis; a practical guide with applications*, Lecture Notes in Mathematics 881, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981
13. WOŹNIAK CZ, *Nonstandard analysis in mechanics*, Advances in Mech., 9, 1986
14. BROWDER F.E., HESS P., *Nonlinear Mappings of Monotone Type in Banach Spaces*, J.Fund.Anal. 11, 1972, 251-294
15. CLARKE F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, A Wiley-Interscince Publication, John Wiley and Sons, New York 1983
16. KUFNER A., JOHN O., FUCIK S., *Function Spaces*, Academia, Publ.House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1977

17. WOŹNIAK CZ., *Homogenized thermoelasticity with microlocal parameters*, Bull. Pol. Ac. Techn. 35, 1987, 3-5

18. WOŹNIAK CZ., *A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites*, Int.J.of Engng.Sci., 25, 5, 1987, 483-499

Summary

Methods of nonsmooth analysis and nonstandard analysis are used to formulate and discuss some mechanical problems of composite materials. Firstly, the delamination problem of such structures is investigated. The corresponding variational formulations leading to the hemivariational inequalities are derived and analysed from the point of view of the existence of solutions. Secondly, by making use of some concepts and theorems of nonstandard analysis the microlocal homogenization method for periodic composities is formulated. It is an alternative to the well know asymptotic homogenization approach.

Резюме

Методы негладкого анализа и нестандартный анализ употребляются для формулировки и обсуждения некоторых механических проблем композытных матерялов. Во первых исследуется проблема деламинации таких структур. Вариационная формулировка редущая к гемивариационным неравенствам происходит и анализуется с точки зрения существования решений. Во вторих – при помощи некоторих понятий и теорем нестандартного анализа формулируется метод микролокальной гомогенизации для периодических композитов. Это есть альтернатива к хорошо известному подходу ассимптотической гомогенизации.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 czerwca 1988 roku