

MÉCANIQUE DES MILIEUX DÉNOMBRABLES. MILIEUX INFINIS DISCRETS

ROMAN NAGÓRSKI
PIOTR WIŚNIAKOWSKI
L'École Polytechnique de Varsovie

1. Introduction

Ce travail est une continuation du traité [1] qui contient des éléments de la cinématique et de la dynamique des milieux dénombrables, présentés comme une généralisation des notions et des équations de la mécanique analytique des systèmes à nombre fini des degrés de liberté.

Le but de cet essai est une illustration des considérations théoriques contenues dans [1] et la présentation d'un exemple de leurs applications à l'analyse de certain milieu dénombrable.

Le milieu est un système matériel "linéaire" infini composé des particules isolées (discretement distribuées) dans un espace de configuration de référence. Ce milieu peut-être traité comme un modèle approché de la structure "atomique" des milieux matériels (solides) (v. e.g.[2]-[4]) mais aussi comme un modèle de calcul obtenu à l'aide l'une des méthodes d'échantillonnage (e.g. la méthode des différences finies) appliquée à un système composé des milieux continus infinis (v. e.g.[5],[6]). Puisque ces méthodes ont la grande importance pratique, mais sont bien développées plutôt pour des systèmes finis (bornés) nous croyons que des résultats obtenus, à notre avis originaux, peuvent-être intéressants pour des ingénieurs.

Nous prouvons quelques théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy ainsi qu'un théorème sur l'approximation de ce problème dans un espace de dimension finie qui rend possible d'effectuer une analyse quantitative du milieu en question.

Un exemple de la propagation de perturbation est donné comme exemple de calcul illustratif de telle analyse.

Il est à noter que des études concernant le milieu ledit sont représentatifs pour une classe des structures et peuvent-être adoptés (après certaines modifications) aux autres exemples de systèmes.

2. Équations et notions fondamentales

Prenons en considerations le systeme schematisé sur la fig.1.

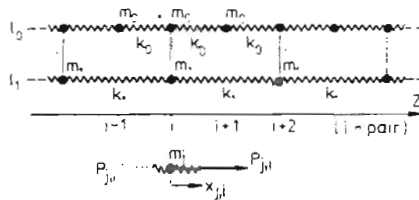


Fig. 1.

Imaginons deux droites parallèles l_0 et l_1 sur lesquelles on a distribué des particules matérielles: de masse m_0 aux points de coordonnées i ($i \in Z$ - l'ensemble des entiers relatifs) situées sur l_0 et de masse m_1 aux points de coordonnées i ($i \in Z_p$ - l'ensemble des entiers pairs) sur la droite l_1 . Les particules sur l_j sont liées par des ressorts à caractéristiques k_j , symbolisant des interactions entre elles ($j = 0, 1$). En outre, les particules $p_{j,i}$ ($i \in Z$ si $j = 0$ et $i \in Z_p$ si $j = 1$) sont pour tout $i \in Z_p$ liées par des tiges rigides, représentantés par exemple la compatibilité des déplacements d'elements $p_{j,i}$ ($i \in Z_p$) (si la longueur des tiges tend vers zero).

Admettons que sous des forces extérieures $P_{j,i}$ appliquées aux particules $p_{j,i}$ et de direction l_j , le mouvement possible n'est que le long des axes l_j . Admettons aussi que sans des charges $P_{j,i}$ le systeme est en état d'équilibre naturel.

Pour les particules $p_{j,i}$ nous avons des équations du mouvement (de Newton) suivantes:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_{0,i} &= F_{0,i} + R_{0,i}, & i &= \dots - 2, 0, 2, 4, \dots \\ m_0 \ddot{x}_{0,i} &= F_{0,i}, & i &= \dots - 1, 1, 3, 5, \dots \\ m_1 \ddot{x}_{1,i} &= F_{1,i} + R_{1,i}, & i &= \dots - 2, 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $x_{j,i}$ dénotent des déplacements des $p_{j,i}$:

$$\begin{aligned} F_{0,i} &= P_{0,i} + k_0(x_{0,i+1} - 2x_{0,i} + x_{0,i-1}), & i &\in Z, \\ F_{1,i} &= P_{1,i} + k_1(x_{1,i+2} - 2x_{1,i} + x_{1,i-2}), & i &\in Z_p, \end{aligned} \quad (2.2)$$

sont des forces actives (avec les efforts des ressorts) et $R_{0,i}$, $R_{1,i}$ ($i \in Z_p$) des réactions des liaisons réalisées par les tiges, vérifiantes la relation:

$$R_{0,i} + R_{1,i} = 0, \quad i \in Z_p. \quad (2.3)$$

Par le milieu (D); évidemment dénombrable, nous comprenons le système (v.[1],par.3):

$$(D) = \{(\alpha) = p_\alpha; \alpha = (j, i), i \in Z \text{ si } j = 0 \text{ et } i \in Z_p \text{ si } j = 1\}. \quad (2.4)$$

Par D nous allons noter l'ensemble des couples α .

Posons l'espace des nombres réels \mathcal{R} comme l'espace de configuration de la particule p_α et l'espace vectoriel (sur \mathcal{R}) des suites

$$X = \{x = (\dots, x_{0,i}, x_{0,i+1}, x_{1,i}, \dots); x_\alpha \in \mathcal{R}, (\alpha \in D), (i \in Z_p)\}. \quad (2.5)$$

Posons aussi formellement:

$$\begin{aligned} P &= (\dots, P_{0,i}, P_{0,i+1}, P_{1,i}, \dots), \\ F &= (\dots, F_{0,i}, F_{0,i+1}, F_{1,i}, \dots), \quad (i \in Z_p) \\ R &= (\dots, R_{0,i}, 0, R_{1,i}, \dots). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les liaisons réalisées par les tiges sont en effet holonomes, bilatérales et stationnaires car leurs équations sont:

$$x_{0,1} - x_{1,i} = 0, \quad i \in Z_p. \quad (2.7)$$

On peut les présenter sous la forme:

$$f(x) = 0, \quad (2.8)$$

si $f: X \rightarrow X$ nous définissons comme suit:

$$f(x) = (\dots, x_{0,i} - x_{1,i}, 0, 0, \dots), \quad x \in X. \quad (2.9)$$

On voit que f est linéaire.

Définissons formellement encore deux applications linéaires de X dans X : d'inertie M et de rigidité K :

$$\begin{aligned} Mx &= (\dots, m_0 x_{0,i}, m_0 x_{0,i+1}, m_1 x_{1,i}, \dots), \\ Kx &= (\dots, k_0(x_{0,i+1} - 2x_{0,i} + x_{0,i-1}), k_0(x_{0,i+2} - 2x_{0,i+1} + x_{0,i}), \\ &\quad k_1(x_{1,i+2} - 2x_{1,i} + x_{1,i-2}), \dots). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Soit ensuite l'espace vectoriel:

$$\Psi = \{\psi = (\dots, \psi_i, \psi_{i+1}, \dots); \psi_i, \psi_{i+1} \in \mathcal{R}, i \in Z_p\} \quad (2.11)$$

et l'application $\pi: \Psi \rightarrow X$:

$$\pi\psi = (\dots, \psi_i, \psi_{i+1}, \psi_i, \dots), \quad (i \in Z_p), \quad (2.12)$$

i.e. $x_{0,i} = \psi_i$, $x_{1,i} = \psi_i$, $x_{0,i+1} = \psi_{i+1}$. Alors $x = \pi\psi$ vérifie indistinctement l'équation des liaisons (2.8) En outre, on voit que π est linéaire et injective.

Soit encore l'application linéaire $\pi': X' = X \rightarrow \Psi' = \Psi$ (v.[1], par.2):

$$\pi'x' = (\dots, x'_{0,i} + x'_{1,i}, x'_{0,i+1}, \dots), \quad x' \in X \quad (i \in Z_p). \quad (2.13)$$

3. Analyse qualitative

Ci-dessous nous nous occupons de deux cas de structure de l'espace de configuration du milieu (D) et de l'espace des formes linéaires sur lui pour lesquels nous allons démontrer, entre autre, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations (2.1). Pour abrégier les considérations nous allons omettre des calculs détaillés.

3.1. Cas "hilbertien"

Comme espace de configuration X_D posons l'espace de Hilbert $l^2(X)$ avec le produit scalaire (v.[1], par.2):

$$\langle x, y \rangle_X = \sum_{i \in Z_p} (x_{0,i} y_{0,i} + x_{0,i+1} y_{0,i+1} + x_{1,i} y_{1,i}) \quad (3.1)$$

et la norme:

$$\|x\|_X = \langle x, x \rangle_X^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Les opérateurs d'inertie M et de rigidité K définis sur X_D et à valeurs dans $X_D = X'_D$ sont continus car en vertu de (2.10), (3.1), (3.2) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons:

$$\begin{aligned} \|Mx\|_X^2 &\leq (m^*)^2 \|x\|_X^2, & m^* &= \sup(m_0, m_1), \\ \|Kx\|_X^2 &\leq 18(k^*)^2 \|x\|_X^2, & k^* &= \sup(k_0, k_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Il s'en suit à l'occasion que les formes:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, y) &= \langle Mx, y \rangle_X = \sum_{i \in Z_p} (m_0 x_{0,i} y_{0,i} + m_0 x_{0,i+1} y_{0,i+1} + m_1 x_{1,i} y_{1,i}), \\ \mathcal{K}(x, y) &= - \langle Kx, y \rangle_X = - \sum_{i \in Z_p} [k_0(x_{0,i+1} - 2x_{0,i} + x_{0,i-1})y_{0,i} + \\ &+ k_0(x_{0,i+2} - 2x_{0,i+1} + x_{0,i})y_{0,i+1} + k_1(x_{1,i+2} - 2x_{1,i} + x_{1,i-2})y_{1,i}] = \\ &= \sum_{i \in Z} k_0(x_{0,i+1} - x_{0,i})(y_{0,i+1} - y_{0,i}) + \sum_{i \in Z_p} k_1(x_{1,i+2} - x_{1,i})(y_{1,i+2} - y_{1,i}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

bilinéaires, symétriques et positives sont continues sur $X_D \times X_D$.

Soit la fonction du mouvement $x = x(t)$ de classe $C^2(T, X_D)$. En vertu de (2.5), (2.6) et de (2.10) nous pouvons écrire les équations (2.1) comme suit:

$$M\ddot{x}(t) = F(t, x(t)) + R(t), \quad (3.5)$$

avec:

$$F(t, x(t)) = Kx(t) + P(t) \quad (3.6)$$

Si $P(t) \in X_D$ pour tout $t \in T$, alors en vue de (3.3),(3.5), et de (3.6) on a $R(t) \in X_D$ quelque soit $t \in T$. Donc l'équation (3.15) est de forme postulée dans [1] (par.4.1) (avec $X_D = X'_D = l^2(X)$).

Vérifions que les liaisons sont parfaites (v.(2.8)). De (2.9) il découle que $f : X_D \rightarrow X_D$ est continue (donc comme linéaire est dérivable) car:

$$\|f(x)\|_X^2 \leq 2\|x\|_X^2. \quad (3.7)$$

De (2.9) il suit:

$$U = \ker f = \{u \in X_D : u = (\dots, u_i, u_{i+1}, u_i, \dots), (i \in Z_p)\}. \quad (3.8)$$

Alors en vertu de (3.1),(2.3),(2.6)₃ et de (3.8) nous avons:

$$\langle R, u \rangle_X = \sum_{i \in Z_p} (R_{0,i}u_i + 0u_{i+1} + R_{1,i}u_i) = 0 \quad (3.9)$$

pour tout $u \in U$.

Comme espace de configuration généralisé Ψ_D posons l'espace de Hilbert $l^2(\Psi)$ avec le produit scalaire (v.[1],par.2):

$$\langle \psi, \varphi \rangle_\Psi = \sum_{i \in Z} \psi_i \varphi_i = \sum_{i \in Z_p} (\psi_i \varphi_i + \psi_{i+1} \varphi_{i+1}), \quad (3.10)$$

et la norme:

$$\|\psi\|_\Psi = \langle \psi, \psi \rangle_\Psi^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

L'application π définie à l'aide de formule (2.12) est continue sur Ψ_D et $\pi(\Psi_D) = U$ (v.(3.8)) car:

$$\|\pi\psi\|_X^2 \leq 2\|\psi\|_\Psi^2, \quad \|\pi\psi\|_X^2 \geq \|\psi\|_\Psi^2. \quad (3.12)$$

Continue sur X_D (et à valeurs dans Ψ_D) est également l'application π' (v.(2.13)) puisque:

$$\|\pi'x'\|_\Psi^2 \leq 2\|x'\|_X^2. \quad (3.13)$$

Cette application est en outre adjointe à π au sens de définition formulée dans [1] (par.4.5) (avec $X'_D = X_D = l^2(X)$) comme en vue de (2.12),(2.13):

$$\begin{aligned} \langle \pi'x', \psi \rangle_\Psi &= \sum_{i \in Z_p} [(x'_{0,i} + x'_{1,i})\psi_i + x_{0,i+1}\psi_{i+1}] = \\ &= \sum_{i \in Z_p} (x'_{0,i}\psi_i + x'_{0,i+1}\psi_{i+1} + x'_{1,i}\psi_i) = \langle x', \pi\psi \rangle_X. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En utilisant (3.9),(2.12),(2.13),(3.14),(3.6) et les formules:

$$\begin{aligned} A\psi &= (\pi' \circ M \circ \pi)\psi = (\dots, (m_0 + m_1)\psi_i, m_0\psi_{i+1}, \dots), & (3.15) \\ \Phi &= \pi'F = C\psi + \Pi, \quad \Pi = \pi'P = (\dots, P_{0,i} + P_{1,i}, P_{0,i+1}, \dots), \\ C\psi &= (\pi' \circ K \circ \pi)\psi = (\dots, (k_0\Delta_1 + k_1\Delta_2)\psi_i, k_0\Delta_1\psi_{i+1}, \dots), \end{aligned}$$

ou:

$$\Delta_l(\dots)_i = (\dots)_{i+l} - 2(\dots)_i + (\dots)_{i-l}, \quad (l = 1, 2), \quad (3.16)$$

nous transformons l'équation (3.5) à l'équation de Lagrange'a de deuxième genre (v.[1] par.4.5):

$$A\bar{\psi}(t) = \Phi(t, \psi(t)). \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) se ramène aux équations du mouvement de (D) suivantes (v.(3.15),(3.16)):

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1)\bar{\psi}_i(t) - k_0[\psi_{i+1}(t) - 2\psi_i(t) + \psi_{i-1}(t)] + \\ - k_1[\psi_{i+2}(t) - 2\psi_i(t) + \psi_{i-2}(t)] &= P_{0,i}(t) + P_{1,i}(t), & (3.18) \\ m_0\bar{\psi}_{i+1}(t) - k_0[\psi_{i+2}(t) - 2\psi_{i+1}(t) + \psi_i(t)] &= P_{0,i+1}(t), \quad (i \in \mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

auxquelles nous adjoignons les conditions initiales:

$$\psi_i(0) = \overset{\circ}{\psi}_i, \quad \dot{\psi}_i(0) = \overset{\circ}{\varphi}_i, \quad (i \in \mathbb{Z}), \quad (3.19)$$

avec $\overset{\circ}{\psi}_i = \overset{\circ}{\psi}$, $\overset{\circ}{\varphi}_i = \overset{\circ}{\varphi}$.

Remarquons que (v.(3.15)₁):

$$\|A\psi\|_{\Psi}^2 \geq m_0^2 \|\psi\|_{\Psi}^2. \quad (3.20)$$

Nous pouvons donc formuler le corollaire que si $P = P(t) \in l^2(X)$ est continue sur T et $\overset{\circ}{\psi}$, $\overset{\circ}{\varphi} \in l^2(\Psi)$, alors le problème de Cauchy pour les équations (3.18) avec les conditions initiales (3.19) a la solution unique de classe $C^2(T, l^2(\Psi))$.

En effect, comme π , π' , K et P sont continues, alors C , Π et en consequence Φ sont en vue de (3.15) continues. De plus Φ est lipschitzienne car C est linéaire et borné, i.e:

$$\|\Phi(t, \psi_1) - \Phi(t, \psi_2)\|_{\Psi} = \|C(\psi_1 - \psi_2)\|_{\Psi} \leq \|C\| \|\psi_1 - \psi_2\|_{\Psi}.$$

En outre, en vue de (3.20) nous remarquons que les hypothèses de la proposition 1 du par.5.1 de [1] sont remplies. Donc la thèse est prouvée.

Nous pouvons arriver à cette thèse en utilisant aussi la proposition 2 du par.5.2 démontrée dans [1]. Apercevons notamment qu'on peut présenter les équations (3.18) sous la forme variationnelle:

$$A(\bar{\psi}(t), \varphi) = \langle \Phi(t, \psi(t)), \varphi \rangle_{\Psi}, \quad \varphi \in \Psi_D, \quad t \in T, \quad (3.21)$$

où (v.(3.15)₁, (3.4)₁):

$$\mathcal{A}(\psi, \varphi) = \langle A\psi, \varphi \rangle_{\Psi} = \mathcal{M}(\pi\psi, \pi\varphi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} [(m_0 + m_1)\psi_i\varphi_i + m_0\psi_{i+1}\varphi_{i+1}]. \quad (3.22)$$

Comme $\mathcal{A}(\psi, \psi) \geq m_0\|\psi\|_{\Psi}^2$ et Φ est continue et lipschitzienne, alors les hypothèses la proposition mentionnée sont remplies.

L'équation (3.17) peut-être écrite aussi comme suit (v.(3.15)₂):

$$A\ddot{\psi}(t) - C\psi(t) = \Pi(t), \quad t \in T, \quad (3.23)$$

soit:

$$A(\ddot{\psi}(t), \varphi) + C(\psi(t), \varphi) = \langle \Pi(t), \varphi \rangle_{\Psi}, \quad \varphi \in \Psi_D, \quad t \in T, \quad (3.24)$$

où (v.(3.15)₂, (3.4)₂):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\psi, \varphi) &= \langle -C\psi, \varphi \rangle_{\Psi} = \langle -(\pi' \circ K \circ \pi)\psi, \varphi \rangle_{\Psi} = \\ &= -\langle (K \circ \pi)\psi, \pi\varphi \rangle_X = \mathcal{K}(\pi\psi, \pi\varphi) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} k_0(\psi_{i+1} - \psi_i)(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} k_1(\psi_{i+2} - \psi_i)(\varphi_{i+2} - \varphi_i) \end{aligned} \quad (3.25)$$

est une forme bilinéaire, symétrique, positive et continue sur $\Psi_D \times \Psi_D$.

Mentionnons encore que dans le cas considéré, il existe l'énergie cinétique de (D) égale à (v.[1], par.4.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}\mathcal{M}(\dot{x}, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} (m_0\dot{x}_{0,i}^2 + m_0\dot{x}_{0,i+1}^2 + m_1\dot{x}_{1,i}^2) = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(\dot{\psi}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} [(m_0 + m_1)\dot{\psi}_i^2 + m_0\dot{\psi}_{i+1}^2]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque de (3.6), (3.14) et de (3.25) il découle:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \langle F, x \rangle_X = \langle Kx + P, \dot{x} \rangle_X = \langle (K \circ \pi)\psi + P, \pi\dot{\psi} \rangle_X = \\ &= -\mathcal{C}(\psi, \dot{\psi}) + \langle \Pi, \dot{\psi} \rangle_{\Psi} = -\frac{d}{dt}\mathcal{U}_{(i)} + \mathcal{P}_{(e)}, \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(i)} &= \frac{1}{2}\mathcal{C}(\psi, \psi) = \frac{1}{2}\mathcal{K}(\pi\psi, \pi\psi) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} k_0(\psi_{i+1} - \psi_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} k_1(\psi_{i+2} - \psi_i)^2, \\ \mathcal{P}_{(e)} &= \langle \Pi, \dot{\psi} \rangle_{\Psi} = \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} [(P_{0,i} + P_{1,i})\dot{\psi}_i + P_{0,i+1}\dot{\psi}_{i+1}], \end{aligned} \quad (3.27)$$

signifiant l'énergie potentielle intérieure (des ressorts) et la puissance des forces extérieures (actives), alors l'équation de l'énergie prend la forme:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E} + \mathcal{U}_{(i)}) = \mathcal{P}_{(e)}, \quad t \in T. \quad (3.28)$$

3.2. Cas "généralisé"

Comme l'espace de configuration X_D posons maintenant l'espace de Banach $l^p(X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) avec la norme (v.[1] par.2):

$$\|x\|_X = \|x\|_p = \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}_p} (|x_{0,i}|^p + |x_{0,i+1}|^p + |x_{1,i}|^p) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_X = \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{Z}_p} (|x_{0,i}|, |x_{0,i+1}|, |x_{1,i}|), \quad p = \infty. \quad (3.29)$$

Les opérateurs M et K (v.(2.10)) restreints au domaine X_D et à valeurs dans $X = X' \subset \overset{\circ}{l}^p(X)$ (v.[1] par.2) sont bien définis.

Soit la fonction du mouvement $x = x(t)$ de classe $C^2(T, X_D)$. En vertu de (2.5), (2.6) et de (2.10) nous pouvons écrire les équations (2.1) comme suit:

$$M\ddot{x}(t) = F(t, x(t)) + R(t), \quad t \in T, \quad (3.30)$$

avec:

$$F(t, x(t)) = Kx(t) + P(t). \quad (3.31)$$

Si $P(t) \in X$ pour $t \in T$, alors en vue de (3.30), (3.31) on a $R(t) \in X$ quelque soit $t \in T$. Donc l'équation (3.30) est de forme postulée dans [1] (v.par.4.6) (avec $X' = X$).

La fonction des liaisons $f: X_D \rightarrow X_D$ (v.(2.9)) est bien définie et continue (et comme linéaire est dérivable) car (v.(3.29)):

$$\|f(x)\|_X \leq 2\|x\|_X, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f(x)\|_X \leq 2\|x\|_X, \quad p = \infty. \quad (3.32)$$

De (2.8) et de (2.9) il découle:

$$U = \ker f = \{u \in X_D; u = (\dots, u_i, u_{i+1}, u_i, \dots), (i \in \mathbb{Z}_p)\}. \quad (3.33)$$

Alors en vertu de (2.3) et de (3.33) des liaisons (réalisées par les tiges - v.fig.1) sont parfaites car:

$$\langle R, u \rangle_{X'} = \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} (R_{0,i}u_i + 0u_{i+1} + R_{1,i}u_i) = 0,$$

pour tout $u \in \overset{\circ}{U} = U \cap \overset{\circ}{l}^p(X)$ (v.[1] par.2 et 4.6).

Comme l'espace des configurations généralisées Ψ_D posons l'espace de Banach $l^p(\Psi)$ ($1 \leq p \leq \infty$) avec la norme:

$$\|\psi\|_\Psi = \|\psi\|_p = \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}_p} (|\psi_i|^p + |\psi_{i+1}|^p) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\psi\|_\Psi = \|\psi\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{Z}_p} (|\psi_i|, |\psi_{i+1}|), \quad p = \infty, \quad (3.34)$$

L'application $\pi: \Psi_D \rightarrow X_D$ (v.(2.12)) est bien définie et continue ainsi que $\pi(\Psi_D) = U$ (v.(3.33) car:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\Psi}^p &\leq \|\pi\psi\|_X^p \leq 2\|\psi\|_{\Psi}^p, & 1 \leq p < \infty, \\ \|\psi\|_{\Psi} &= \|\pi\psi\|_X, & p = \infty \end{aligned} \quad (3.35)$$

En outre nous avons:

$$\pi\varphi \in \dot{U} \quad \text{pour } \varphi \in \dot{l}(\Psi). \quad (3.36)$$

L'application $\pi': \mathcal{F}(X) \supset X \rightarrow \Psi \subset l'(\Psi)$ (v.(2.13)) est bien définie. Elle est adjointe à π au sens de définition (v.[1] par.4.6):

$$\begin{aligned} \langle \pi'x', \varphi \rangle_{\Psi} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} [(x'_{0,i} + x'_{1,i})\varphi_i + x_{0,i+1}\varphi_{i+1}] = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} (x'_{0,i}\varphi_i + x'_{0,i+1}\varphi_{i+1} + x'_{1,i}\varphi_i) = \\ &= \langle x', \pi\varphi \rangle_X, \quad x' \in X, \quad \varphi \in \dot{l}(\Psi). \end{aligned} \quad (3.37)$$

De plus $\pi': X_D \rightarrow \Psi_D$ est bien définie et continue car:

$$\begin{aligned} \|\pi'x\|_{\Psi}^p &\leq (2^p + 1)\|x\|_X^p, & 1 \leq p < \infty, \\ \|\pi'x\|_{\Psi} &\leq 2\|x\|_X, & p = \infty. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Remarquons que les opérateurs M et K restreints au domaine X_D ont des valeurs en X_D et sont continus.

Notamment (v.(2.10) et (3.34)):

$$\begin{aligned} \|Mx\|_X^p &\leq (m^*)\|x\|_X^p, & m^* = \max(m_0, m_1), & 1 \leq p < \infty, \\ & \|Mx\|_X \leq m^*\|x\|_X, & p = \infty, \\ \|Kx\|_X^p &\leq 3 \cdot 4^p (k^*)^p \|x\|_X^p, & k^* = \max(k_0, k_1), & 1 \leq p < \infty, \\ & \|Kx\|_X \leq 6k^*\|x\|_X, & p = \infty. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les faits nommés ci-dessus permettent de constater qu'on peut ramener l'équation (3.30) à la forme (v.[1] par.4.6):

$$A\bar{\psi}(t) = \Phi(t, \psi(t)), \quad t \in T, \quad (3.40)$$

avec:

$$\begin{aligned} A &= \pi' \circ M \circ \pi, \\ \Phi(t, \psi) &= \pi' F = (\pi' \circ K)x + \pi' P = (\pi' \circ K \circ \pi)\psi + \pi' P = C\psi + \Pi, \\ C &= \pi' \circ K \circ \pi, \quad \Pi = \pi' P, \end{aligned} \quad (3.41)$$

où A, C, H s'expriment à l'aide de (3.15).

Adjoignons à l'équation (3.40) les conditions initiales:

$$\psi(0) = \overset{\circ}{\psi}, \quad \dot{\psi}(0) = \overset{\circ}{\dot{\psi}}. \quad (3.42)$$

Évidemment la forme développée de (3.40) et de (3.42) est (3.18) et (3.19) respectivement.

Remarquons qu'en de (3.15)₁ et de (3.34) on a:

$$\begin{aligned} \|A\psi\|_{\Psi}^p &\geq m_0^p \|\psi\|^p, & 1 \leq p < \infty, \\ \|A\psi\|_{\Psi} &\geq m_0 \|\psi\|_{\Psi}, & p = \infty, \end{aligned} \quad (3.43)$$

alors $A: \Psi_D \rightarrow \Psi_D$ est une bijection. En outre, en vertu de (3.34), (3.15) et de (3.16) l'opérateur $C: \Psi_D \rightarrow \Psi_D$ est continu, donc $\Phi(t, \psi)$ est lipschitzienne (par rapport à ψ) et continue si $H: T \rightarrow \Psi_D$ est continue (v.3.41)₂). Alors, d'après la proposition 3 du par. 5.3 de [1] nous pouvons formuler corollaire que si $P: T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est continue et $\overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\dot{\psi}} \in \mathcal{P}(\Psi)$, le problème de Cauchy (3.40), (3.42) a la solution unique $\psi = \psi(t)$ de classe $C^2(T, \mathcal{P}(\Psi))$ (pour $p \in [1, \infty]$).

Il faut mentionner encore que la solution unique du ledit problème est assurée aussi pour la fonction du mouvement $\psi = \psi(t)$ de classe $C^2(T, \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Psi))$ si $P: T \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{C}}(X)$ est continue et $\overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\dot{\psi}} \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Psi)$ (v.[1] par.2).

En effet, en vertu de (3.41) et de (3.16) on a $\Phi(t, \psi) = C\psi + H(t) \in \overset{\circ}{l}(\Psi)$, $A\psi \in \overset{\circ}{l}(\Psi)$ pour tout ψ et $H(t)$ dans $\overset{\circ}{l}(\Psi)$ ainsi que $H(t) = \pi'P(t) \in \overset{\circ}{l}(\Psi)$ si $P(t) \in \overset{\circ}{l}(X)$. Puisque $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Psi) = \text{clos}(\overset{\circ}{l}(\Psi))$, $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(X) = \text{clos}(\overset{\circ}{l}(X))$ (par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ et les applications A, C, π' sont linéaires et continues (par rapport à $\|\cdot\|_{\infty}$), alors les hypothèses de la proposition 3 du par.5.3 de [1] sont remplies.

Notons que $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Psi)$ est l'espace des suites bornées $\psi = (\psi_i)$ telles que $\lim_{|i| \rightarrow \infty} \psi_i = 0$, ($i \in Z$).

4. Analyse quantitative

La détermination de la façon exacte des fonctions du mouvement pour des milieux dénombrables est généralement difficile et même impossible. Ci-dessus nous montrons une possibilité d'approximation de la solution du problème de Cauchy pour le milieu de la fig.1 par la solution d'un autre problème formulé dans l'espace de dimension finie, i.e. pour un système à nombre fini des degrés de liberté. Ensuite, nous illustrons cet algorithme d'approximation d'un exemple numérique.

4.1. Approximation

Considérons le cas du par.3.2 dans lequel Ψ_D est l'espace de Hilbert.

Soit $\psi = \psi(t)$ la solution du problème de Cauchy (3.17),(3.19) i.e. (v.(3.23)):

$$\begin{aligned} A\ddot{\psi} - C\psi &= \Pi, & t \in T, \\ \psi(0) &= \overset{\circ}{\psi}, & \dot{\psi}(0) = \overset{\circ}{\dot{\psi}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\dot{\psi}} \in l^2(\Psi)$, $\Pi = \Pi(t)$ est de classe $C(T, l^2(\Psi))$.

Soit $\psi^{(N)}: T \rightarrow l^2(\Psi)$ telle que:

$$\psi_i^{(N)}(t) = \begin{cases} \psi_i(t), & i \in Z_N \\ 0, & i \notin Z_N \end{cases} \quad (i \in Z), \tag{4.2}$$

où

$$Z_N = [-2N - 1, 2N + 1] \cap Z, \quad (N - \text{entier positif}). \tag{4.3}$$

La fonction $\psi^{(N)} = \psi^{(N)}(t)$ vérifie l'équation:

$$A\ddot{\psi}^{(N)} - C\psi^{(N)} = \Pi - \Lambda^{(N)} \tag{4.4}$$

où $\Lambda^{(N)}$ est le résidu de équation (4.1)₁.

En soustrayant (4.4) de (4.1)₁ nous obtenons:

$$\Lambda^{(N)} = A\ddot{\lambda}^{(N)} - C\lambda^{(N)}, \tag{4.5}$$

avec (v.(4.2)):

$$\begin{aligned} \lambda^{(N)}(t) &= \psi(t) - \psi^{(N)}(t) \\ \lambda_i^{(N)}(t) &= \begin{cases} 0, & i \in Z_N \\ \psi_i(t), & i \notin Z_N \end{cases} \quad (i \in Z). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Comme A et C sont bornés, alors:

$$\|\Lambda^{(N)}\|_{\Psi} \leq \|A\| \|\ddot{\lambda}^{(N)}\|_{\Psi} + \|C\| \|\lambda^{(N)}\|_{\Psi},$$

d'où:

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{(N)}(t)\|_{\Psi}^2 &\leq c(\|\ddot{\lambda}^{(N)}(t)\|_{\Psi}^2 + \|\lambda^{(N)}(t)\|_{\Psi}^2) = \\ &= c \sum_{i \notin Z_N} (\ddot{\psi}_i^2(t) + \psi_i^2(t)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

où c est une constante positive non dépendante de N .

Considérons l'espace (de dimension finie):

$$\Psi_{(N)} = \{ \xi = (\xi_i) = \{ \xi_i \in \mathcal{R}; i \in Z_N \} \}. \quad (4.8)$$

Nous le munissons du produit scalaire:

$$\langle \xi, \eta \rangle_N = \sum_{i \in Z_N} \xi_i \eta_i, \quad \xi, \eta \in \Psi_{(N)}, \quad (4.9)$$

et de la norme:

$$\|\xi\|_N = \langle \xi, \xi \rangle_N^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i \in Z_N} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Soit $\mu^{(N)}: T \rightarrow \Psi_{(N)}$ la fonction suivante (v.(4.2)):

$$\mu^{(N)}(t) = \psi_i^{(N)}(t) = \psi_i(t), \quad i \in Z_N, \quad (t \in T). \quad (4.11)$$

Remarquons que $\mu^{(N)}$ vérifie l'équation (4.4) restreinte à $\Psi_{(N)}$, i.e. (v.(3.15),(3.16) et (3.18)):

$$A^{(N)} \bar{\mu}^{(N)} - C^{(N)} \mu^{(N)} = H^{(N)} - \Delta^{(N)}, \quad (4.12)$$

où:

$$\bar{H}_i^{(N)}(t) = H_i(t), \quad \bar{\Delta}_i^{(N)}(t) = \Delta_i^{(N)}(t) \quad \text{pour } i \in Z_N, \quad t \in T \quad (4.13)$$

et

$$\begin{aligned} A^{(N)} \xi &= (m_0 \xi_{-2N-1}, (m_0 + m_1) \xi_{-2N}, \dots, (m_0 + m_1) \xi_{2N}, m_0 \xi_{2N+1}), \\ C^{(N)} \xi &= (k_0 \Delta_1 \xi_{-2N-1}, (k_1 \Delta_2 + k_0 \Delta_1) \xi_{-2N}, \dots, \\ &\quad, (k_1 \Delta_2 + k_0 \Delta_1) \xi_{2N}, k_0 \Delta_1 \xi_{2N+1}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Soit $\xi^{(N)} = \xi^{(N)}(t)$ la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{aligned} A^{(N)} \bar{\xi}^{(N)} - C^{(N)} \xi^{(N)} &= H^{(N)}, \quad t \in T, \\ \xi^{(N)}(0) &= \overset{\circ}{\psi}^{(N)}, \quad \bar{\xi}^{(N)}(0) = \overset{\circ}{\varphi}^{(N)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec $\overset{\circ}{\psi}_i = \overset{\circ}{\psi}_i$, $\overset{\circ}{\varphi}_i = \overset{\circ}{\varphi}_i$ pour $i \in Z_N$ (v.(4.1)_{2,3}). Cette solution existe et est unique car $\Psi_{(N)}$ est de dimension finie et $A^{(N)}$ est l'opérateur nonsingulier.

En soustrayant (4.12) de (4.15)₁ nous trouvons:

$$\Delta^{(N)} = A^{(N)} \bar{\rho}^{(N)} - C^{(N)} \rho^{(N)}, \quad t \in T, \quad (4.16)$$

où (v.(4.11))

$$\rho^{(N)}(t) = \xi^{(N)}(t) - \mu^{(N)}(t), \quad \rho_i^{(N)}(t) = \xi_i^{(N)}(t) - \psi_i(t), \quad i \in Z_N. \quad (4.17)$$

Notons qu'en vertu de (4.15)_{2,3} on a:

$$\rho^{(N)}(0) = 0, \quad \dot{\rho}^{(N)}(0) = 0. \quad (4.18)$$

Multiplions scalairement (4.16) par $\dot{\rho}^{(N)}$ (v.(4.9)) et transformons comme suit:

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)} \rangle_N &= \langle A^{(N)} \dot{\rho}^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)} \rangle_N - \langle C^{(N)} \rho^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)} \rangle_N = \\ &= A^{(N)}(\dot{\rho}^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)}) + C^{(N)}(\rho^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} A^{(N)}(\dot{\rho}^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} C^{(N)}(\rho^{(N)}, \rho^{(N)}) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(N)}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où:

$$A^{(N)}(\xi, \eta) = \sum_{i \in Z_N \cap Z_p} [(m_0 + m_1) \xi_i \eta_i + m_0 \xi_{i+1} \eta_{i+1}] \quad (4.20)$$

$$C^{(N)}(\xi, \eta) = \sum_{i \in Z_N} k_0 (\xi_i - \xi_{i-1})(\eta_i - \eta_{i-1}) + \sum_{i \in Z_N \cap Z_p} k_1 (\xi_i - \xi_{i-2})(\eta_i - \eta_{i-2}),$$

$$\mathcal{E}^{(N)} = \frac{1}{2} A^{(N)}(\dot{\rho}^{(N)}, \dot{\rho}^{(N)}) + \frac{1}{2} C^{(N)}(\rho^{(N)}, \rho^{(N)}).$$

Comme en vue de (4.20), (4.13):

$$\begin{aligned} m_0 \|\xi\|_N^2 &\leq A^{(N)}(\xi, \xi) \leq (m_0 + m_1) \|\xi\|_N^2, \\ C^{(N)}(\xi, \xi) &\geq k_* \left[\sum_{i \in Z_N} (\xi_i - \xi_{i-1})^2 + \sum_{i \in Z_N \cap Z_p} (\xi_i - \xi_{i-2})^2 \right] \geq 0, \\ k_* &= \min(k_0, k_1), \quad \|\Delta^{(N)}\|_N^2 \leq \|A^{(N)}\|_{\Psi}^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

alors (v.(4.19), (4.20)₃):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(N)}(t) &\leq |\langle \Delta^{(N)}(t), \dot{\rho}^{(N)}(t) \rangle_N| \leq \frac{1}{2} \|\Delta^{(N)}(t)\|_N^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\rho}^{(N)}(t)\|_N^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Delta^{(N)}(t)\|_N^2 + \frac{1}{2m_0} A^{(N)}(t) \leq \frac{1}{2} \|A^{(N)}(t)\|_{\Psi}^2 + \frac{1}{m_0} \mathcal{E}^{(N)}(t), \end{aligned}$$

d' où en vertu de l'inégalité de Gronwall:

$$\mathcal{E}^{(N)}(t) \leq \frac{1}{2} e^{\frac{t}{m_0}} \int_0^t \|A^{(N)}(t')\|_{\Psi}^2 e^{-\frac{t'}{m_0}} dt', \quad (4.22)$$

car $\mathcal{E}^{(N)}(0) = 0$ (v.(4.18), (4.20)₃).

De (4.7) et du fait que $\psi = \psi(t)$ est de classe $C^2(T, I^2(\Psi))$ il découle que pour $T = [0, \tau]$ fixé et quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe \tilde{N} tel que:

$$\int_0^t \|\Lambda^{(N)}(t')\|_{\Psi}^2 dt' < \varepsilon \quad \text{pour tout } N > \tilde{N} \text{ et } t \in T. \quad (4.23)$$

En tenant compte de (4.23) en (4.22) nous obtenons résultat:

$$\mathcal{E}^{(N)}(t) \leq \tilde{c}\varepsilon \quad \text{pour tout } N > \tilde{N} \text{ et } t \in T,$$

(\tilde{c} est une constante positive ne dépendant pas de N) signifiant que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \mathcal{E}^{(N)}(t) = 0. \quad (4.24)$$

En vue de (4.20), (4.21) et de (4.17) il s'écrit:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left\{ \sum_{i \in Z_N} |\psi_i(t) - \xi_i^{(N)}(t)|^2 + \sum_{i \in Z_N} \left[|\psi_i(t) - \xi_i^{(N)}(t)| - \right. \right. \\ \left. \left. - |\psi_{i-1}(t) - \xi_{i-1}^{(N)}(t)| \right]^2 + \sum_{i \in Z_N \cap Z_p} \left[|\psi_i(t) - \xi_i^{(N)}(t)| - |\psi_{i-2}(t) - \xi_{i-2}^{(N)}(t)| \right]^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Il s'en suit que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \sum_{i \in Z_N} |\psi_i(t) - \xi_i^{(N)}(t)|^2 = 0 \quad (4.26)$$

et comme $\psi_i(0) = \xi_i^{(N)}(0)$ pour $i \in Z_N$ (v. (4.15)_{2,3}):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \sum_{i \in Z_N} |\psi_i(t) - \xi_i^{(N)}(t)|^2 = 0 \quad (4.27)$$

également.

Nous pouvons donc formuler le corollaire que la solution du problème de Cauchy (4.15) tend vers la solution du problème (4.1) pour N tenant vers l'infini au sens (4.25)-(4.27).

Le problème de Cauchy (4.15) c'est le problème pour le système fini des équations différentielles ordinaires, linéaires, de deuxième ordre et à coefficients constants. Pour la grande valeur de N on applique usuellement l'une des méthodes approchées de analyse numérique. Par exemple, nous pouvons utiliser la méthode des différences finies du schéma suivant:

$$\begin{aligned} \xi_0^{(N)} = \psi^{(N)}, \quad \xi_{(1)}^{(N)} = \Delta t \psi^{(N)} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 B^{(N)} \circ [C^{(N)} \psi^{(N)} + \Pi_{(0)}^{(N)}], \\ \frac{1}{(\Delta t)^2} [\xi_{(s+1)}^{(N)} - 2\xi_{(s)}^{(N)} + \xi_{(s-1)}^{(N)}] = B^{(N)} \circ [C^{(N)} \xi_{(s)}^{(N)} + \Pi_{(s)}^{(N)}], \quad (4.28) \\ s = 1, 2, 3, \dots, \bar{s}, \quad \bar{s} \Delta t = \tau, \end{aligned}$$

eù:

$$\xi_{(s)}^{(N)} = \xi^{(N)}(s\Delta t), \quad \Pi_{(s)}^{(N)} = \Pi^{(N)}(s\Delta t), \quad B^{(N)} = (A^{(N)})^{-1}. \quad (4.29)$$

C' est le schéma explicite, de deuxième ordre (par rapport à Δt) et conditionnellement stable (v. e.g.[5]). La condition suffisante de stabilité est:

$$(\Delta t)^2 < \frac{m_0}{\max(k_0, k_1)}. \quad (4.30)$$

4.2. Exemple numérique

À titre d'exemple nous déterminons une propagation de perturbation de l'état d'équilibre naturel du milieu (D) (v. fig.1), causée par les conditions initiales:

$$\overset{\circ}{\psi} = 0, \quad \overset{\circ}{\varphi} = (v\delta_{0i}), \quad (4.31)$$

(δ - symbol de Kronecker). Nous trouvons cette propagation à l'aide du schéma (4.28) en tenant compte de (4.31) et de $\Pi_{(s)}^{(N)} = 0$ ($s = 0, 1, \dots, \bar{s}$). Notons la par (I).

Comme des solutions de référence prenons les mouvements des systèmes composés des éléments sur la droite $l_0(II)$ et sur la droite $l_1(III)$ (nonliés par les tiges - v. fig.1) et forcés de même façon que le milieu (D). Ces solutions peuvent être déterminées aussi à l'aide du schéma (4.28), respectivement adopté (il est évidemment valable ce qui n'est pas difficile à montrer - v.par.4.1.).

Les valeurs numériques des masses m_0 et m_1 ainsi que des caractéristiques k_0 et k_1 nous choisissons de telle manière pour que la rigidité globale d'un segment " $i \div i + 2$ " ($i \in Z_p$) soit égale à k et la masse totale égale à m pour chaque système (I), (II) et (III).

Les rigidités mentionnées k_I, k_{II}, k_{III} sont les valeurs des forces P_I, P_{II}, P_{III} provoquant des déplacements unitaires $\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}$ (v.fig.2). Puisque:

$$\Delta_I = \frac{P_I}{k_{0,I}/2 + k_{1,I}}, \quad \Delta_{II} = \frac{P_{II}}{k_{0,II}/2}, \quad \Delta_{III} = \frac{P_{III}}{k_{1,III}},$$

alors:

$$k_I = \frac{k_{0,I}}{2} + k_{1,I}, \quad k_{II} = \frac{k_{0,II}}{2}, \quad k_{III} = k_{1,III},$$

d' où en vue de $k_I = k_{II} = k_{III} = k$ et pour $k_{0,I} = k_{1,I}$ nous obtenons:

$$k_{0,I} = k_{1,I} = \frac{2}{3}k, \quad k_{0,II} = 2k, \quad k_{1,III} = k. \quad (4.32)$$

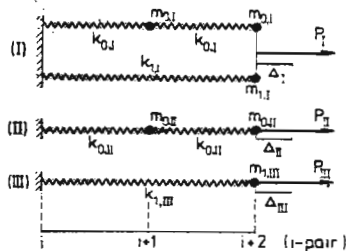


Fig. 2.

Pour des masses nous avons (v.fig.2):

$$2m_{0,I} + m_{1,I} = m_I, \quad 2m_{0,II} = m_{II}, \quad m_{1,III} = m_{III},$$

d'où après avoir tenu compte de $m_I = m_{II} = m_{III} = m$ on a:

$$m_{0,I} = \frac{1}{6}m, \quad m_{1,I} = \frac{2}{3}m, \quad m_{0,II} = \frac{m}{2}, \quad m_{1,III} = m \quad (4.33)$$

si on pose $2m_{0,I} = m_{1,I}/2$.

Nous croyons que ce choix permet mieux de comparer le comportement du système (I) par rapport au (II) et (III) car ils ont les mêmes caractéristiques "globales".

Dans les calculs posons:

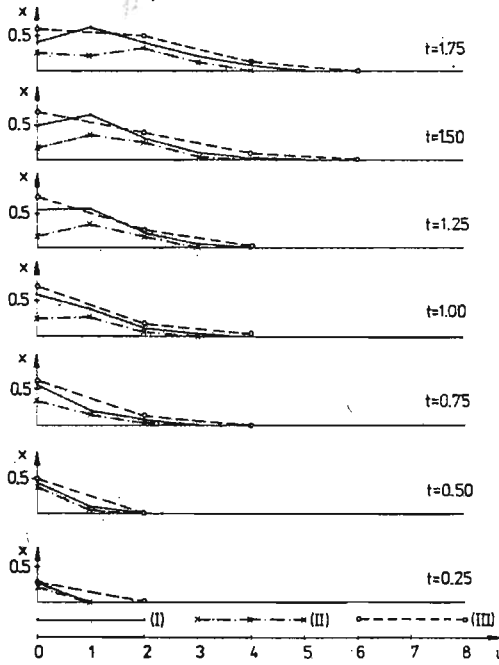
$$v = 1, \quad k = 1, \quad m = 1, \quad \tau = 3.5. \quad (4.34)$$

Des épreuves ont montré que l'exactitude des calculs est suffisante pour:

$$\Delta t = 0.125, \quad N = 4. \quad (4.35)$$

Sur la figure 3 on a présenté l'effet de propagation de la perturbation causée par la vitesse initiale en point $i = 0$ (en vue de la symétrie on n'a envisagé que les parties droites des systèmes - à partir du point $i = 0$). On voit que la "vitesse" de propagation est approximativement identique pour tous les trois systèmes (I) - (III). Les valeurs des déplacements pour le système (I) se contiennent presque toujours entre les valeurs pour les systèmes (II) et (III). On peut remarquer aussi que les déplacements en point de numéro "i" (pour i donné) varient en temps de façon différente pour chaque système - le plus rapidement pour la structure (II) et le plus lentement pour la structure (III).

(a)



(b)

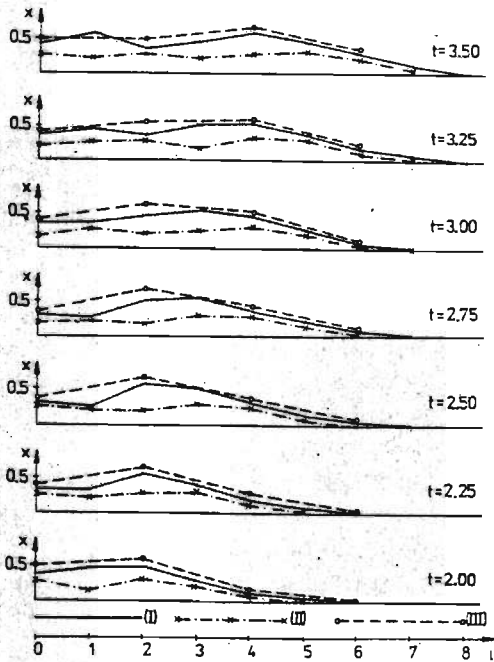


Fig. 3.

5. Remarques terminales

Le système matériel envisagé dans ce paragraphe, présenté comme un système infini des particules et considéré comme un milieu dénombrable peut-être traité comme un modèle approché d'une structure "atomique" du matériau formant un milieu matériel "à une dimension". Ce système peut-être interprété aussi comme un modèle de calcul obtenu à l'aide de la méthode des différences finies appliqué au système de deux milieux continus infinis dont des équations du mouvement sont:

$$\rho_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} - \kappa_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial \vartheta^2} = p_j, \quad (j = 0, 1). \quad (5.1)$$

S'il est raisonnable de poser:

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \vartheta^2}(t, ih) \approx \frac{1}{h^2} [\xi_0(t, ih + h) - 2\xi_0(t, ih) + \xi_0(t, ih - h)], \quad (i \in Z), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \vartheta^2}(t, ih) \approx \frac{1}{(2h)^2} [\xi_1(t, ih + 2h) - 2\xi_1(t, ih) + \xi_1(t, ih - 2h)], \quad (i \in Z_p)$$

et si:

$$\xi_0(t, ih) - \xi_1(t, ih) = 0, \quad (i \in Z_p), \quad (5.3)$$

nous obtenons de (5.1) le système d'équations (2.1) avec:

$$\begin{aligned} x_{0,i}(t) &= \xi_0(t, ih) \quad (i \in Z), & x_{1,i}(t) &= \xi_1(t, ih) \quad (i \in Z_p), \\ m_0 &= h\rho_0, & m_1 &= 2h\rho_1, & k_0 &= \frac{\kappa_0}{h}, & k_1 &= \frac{\kappa_1}{2h}, \\ P_{0,i}(t) &= hp_0(t, ih) \quad (i \in Z), & P_{1,i}(t) &= 2hp_1(t, ih) \quad (i \in Z_p). \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'exemple de la fig.1 étudié détaillé dans les par.2-4 est représentatif pour une classe des structures dénombrables. Sur la fig.4 on a montré schématiquement d'autres exemples qui peuvent-être étudiés à l'aide des méthodes présentées au-dessus, bien sur respectivement adoptées et modifiées. Ces méthodes s'appliquent particulièrement, en cas de l'échantillonnage (dans la méthode de différences finies) plus dense que sur la fig.1 (v.fig.4) ainsi qu'en cas de l'approximation plus complexe que (5.2).

Évidemment les considérations des par.2-4 restent valables en cas plus simple, i.e. pour la structure composée d'une "couche" des particules (des noeuds). Par exemple pour le milieu dénombrable comme sur la fig.4a, i.e. pour le système composé d'éléments sur l'axe l_0 seulement (v.fig.1), les opérateurs A et C dans l'équation (3.23) s'expriment comme suit (v.(3.15)_{1,4}):

$$A\psi = (m_0\psi_I), \quad C\psi = (k_0(\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1})), \quad (5.5)$$

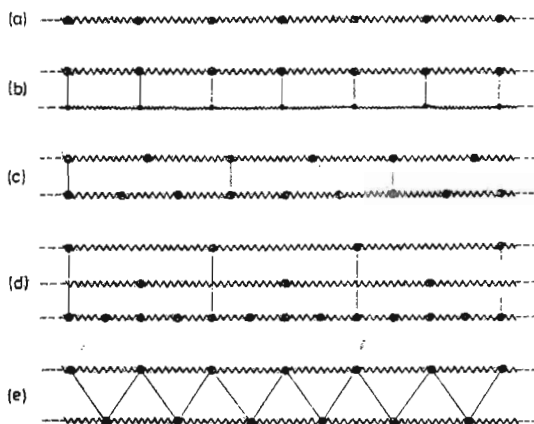


Fig. 4.

pour $\psi = (\psi_i)$, ($i \in Z$).

Cet article contient des résultats du travail effectué dans le cadre du Problème Central des Recherches Fondamentales 02.05.

References

1. NAGÓRSKI R., *Mécanique des milieux dénombrables. Problèmes généraux*, Mech.Theor. i Stos. (Mec.Theor. et Appl.) 29,1,1991
2. KUNIN I.A., *Théorie des milieux élastiques avec microstructure*, (en russe), Science, Moscou 1975
3. LAX P., *The relations between microscopic and macroscopic theories of elasticity - lattice dynamics*, Pergamon Press 1965
4. LUDWIG W., *Recent development in lattice theory*, Springer -Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967
5. MARTCHOUK G., *Méthodes numériques d'analyse des équations de la physique mathématique* (en russe), Science, Moscou 1981
6. COLLATZ L. *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955

Streszczenie

Praca jest kontynuacją rozprawy [1], która zawiera elementy kinematyki i dynamiki ośrodków przeliczalnych, przedstawione jako pewne uogólnienie pojęć i równań mechaniki analitycznej układów o skończonej liczbie stopni swobody.

Celem tej pracy jest ilustracja rozważań o charakterze teoretycznym zawartych w [1] oraz przedstawienie przykładu ich zastosowań do analizy pewnego ośrodka przeliczalnego.

Ośrodek ten jest nieskończonym układem "liniowym" cząstek materialnych izolowanych. Może być traktowany jako przybliżony model "łańcucha atomowego" a także jako model obliczeniowy, otrzymany w wyniku zastosowania metody różnic skończonych do równań układu ośrodków ciągłych.

Wykazano twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego oraz twierdzenie o aproksymacji skończenie wymiarowej tego zagadnienia.

Na zakończenie zamieszczono przykład propagacji zaburzenia w rozważanym ośrodku przeliczalnym.

Summary

The paper is a continuation of paper [1], in which the elements of kinematics and dynamics of countable media have been presented as a generalization of the notions and equations of analytical mechanics of the systems with finite number of degrees of freedom.

The aim of the paper is to illustrate theoretical considerations discussed in [1] and to present an example of their applications to the analysis of a countable medium.

The medium is an infinite "linear" system of particles. It can be interpreted also as a calculating model obtained by means of finite differences method applied to a system of continuous media.

This case is supplied with theorems on existence and uniqueness of initial - value problem as well as a theorem on approximation in a certain finite dimensional space. Both are proved in the paper. A numerical example is given.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 czerwca 1988 roku