

PROBLEMY OPTIMALIZACJI PRZY STEROWANIU OKRESOWYM W SKOŃCZONYM PRZEDZIALE

ZBIGNIEW PIEKARSKI

Politechnika Krakowska

Celem niniejszej pracy jest analiza problemu optymalizacji przy nie stosowanym dotychczas założeniu, że wektor sterowania jest okresowy w zadanym, skończonym przedziale zmiennej niezależnej, przy z góry narzuconym okresie. Warunki konieczne optymalności otrzymać można np. z zasady maximum Pontriagina [1,2].

1. Sformułowanie i rozwiązanie problemu

Całkowity przedział $[0, L]$ zmiennej niezależnej t dzielimy na n podprzedziałów o długości:

$$T = \frac{L}{n} \quad (1.1)$$

gdzie $n = 1, 2, \dots, \bar{n} < \infty$. Zmienne niezależne t_q zadane w poszczególnych podprzedziałach określamy zależnością:

$$t_q = t_1 + (q - 1)T \quad (1.2)$$

orzy $q = 1, 2, \dots, n$. Wielkość t_1 przebiega pierwszy podprzedział:

$$0 \leq t_1 < T \quad (1.3)$$

lub

$$0 \leq t_1 \leq T \quad (1.4)$$

w zależności, czy podprzedziały są otwarte, czy domknięte.

Rozważać będziemy układ fizyczny, którego dynamiczne zachowanie opisane jest przez skończoną liczbę zmiennych rzeczywistych $x_1(t), \dots, x_N(t)$. Wartości tych zmiennych określają stan układu w każdym punkcie $t \in [0, L]$. Konkretnie przyjmujemy, że stan obiektu opisany jest układem N równań różniczkowych, zwyczajnych, pierwszego rzędu:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.5)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, N$, (\cdot) oznacza pochodną po t , $\mathbf{x}(t)$ jest N -wymiarowym wektorem stanu. O funkcjach f_i zakładamy, że są określone dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{u}, t$, ciągle wraz z pochodnymi $\delta f_i / \delta \mathbf{x}$ ze względu na \mathbf{x}, \mathbf{u} , oraz odcinkami ciągle ze względu na t .

Występujący w (1.5) wektor $\mathbf{u}(t)$ o współrzędnych $u_1(t), \dots, u_r(t)$ jest r -wymiarowym wektorem sterowania układu, czyli sterowaniem. Narzucamy na niego następujące ograniczenia:

a) zakładamy, że funkcje sterowania są dopuszczalne, tzn., że należą do zbioru funkcji określonych i odcinkami ciągłych:

$$\mathbf{u}(t) \in U \quad \text{dla} \quad t \in [0, L]. \quad (1.6)$$

O zbiorze U zakładamy, że jest ustalony, czyli niezależny od stanu \mathbf{x} i punktu t . Sterowania dopuszczalne mają skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju. W punktach tych jako wartość sterowania przyjmujemy jego prawostronną granicę $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(\tau + 0)$;

b) zakładamy dodatkowo, że funkcje sterowania są okresowe w skończonym przedziale $[0, L]$. Znaczy to, że zachodzi równość:

$$\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_q) \quad (1.7)$$

w której t_q określone jest wzorami (1.2), (1.3). Przyjmujemy, że tak określone okresowe sterowanie jest dopuszczalne, tzn., że pojawiające się w krańcowych punktach podprzedziałów ewentualne nieciągłości są pierwszego rodzaju. Założenia a), b) mówią, że ze zbioru dowolnych sterowań dopuszczalnych wydzielany jest podzbiór funkcji odcinkami ciągłych i jednocześnie okresowych, czyli powtarzających swój przebieg w każdym podprzedziale. Do równań stanu (1.5) dołączamy warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \varphi_l(\mathbf{x}(0)) &= 0 & l &= 1, 2, \dots, p \leq N \\ \bar{\varphi}_k(\mathbf{x}(L)) &= 0 & k &= 1, 2, \dots, p \leq N. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O funkcjach $\varphi_l, \bar{\varphi}_k$ zakładamy, że są określone i ciągle wraz z pochodnymi ze względu na swoje argumenty.

Przy wszystkich założeniach dotyczących funkcji f_i , wektora sterowania \mathbf{u} , funkcji brzegowych $\varphi_l, \bar{\varphi}_k$ można zawsze znaleźć jednoznaczne, ciągle, odcinkami różniczkowalne rozwiązanie układu równań (1.5).

Szukać będziemy rozwiązania następującego problemu: przy ograniczeniach (1.5) ÷ (1.8) należy znaleźć takie \mathbf{x}, \mathbf{u} , które funkcjonalowi:

$$J = \int_0^L f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.9)$$

nadają minimalną wartość. Przyjmujemy, że funkcja f_0 jest tej samej klasy co funkcja f_i .

Sposób rozwiązania postawionego problemu sprowadza się do eliminacji okresowości sterowania przez zwiększenie liczby równań stanu tak, aby nowy układ był określony w jednym z podprzedziałów, np. pierwszym. W tym celu równania (1.5) zapisujemy w poszczególnych podprzedziałach:

$$\dot{x}_i(t_q) = f_i(\mathbf{x}(t_q), \mathbf{u}(t_q), t_q). \quad (1.10)$$

Równania (1.10) stanowią układ nN równań różniczkowych zwyczajnych. Aby układy (1.5) i (1.10) były równoważne należy do (1.10) dołączyć warunki ciągłości zmiennych \mathbf{x} w krańcowych punktach podprzedziałów. Mają one postać:

$$x_i(t_m) \Big|_{t_m=mT} = x_i(t_{m+1}) \Big|_{t_{m+1}=mT}. \quad (1.11)$$

Po wykorzystaniu (1.2) i (1.7) równania (1.10) przechodzą w układ zależny od zmiennej t_1 :

$$\dot{x}_i(t_1 + (q-1)T) = f_i(\mathbf{x}(t_1 + (q-1)T), \mathbf{u}(t_1), t_1 + (q-1)T). \quad (1.12)$$

Warunki brzegowe (1.8) pozostają bez zmian, natomiast warunki ciągłości (1.11) przechodzą w:

$$x_i(mT - 0) = x_i(mT + 0) \quad m = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (1.13)$$

Analogicznie należy postąpić z funkcjonalem (1.9). Zapisując go w poszczególnych podprzedziałach mamy:

$$J = \sum_{q/1}^n \int_{(q-1)T}^{qT} f_0(\mathbf{x}(t_q), \mathbf{u}(t_q), t_q) dt_q. \quad (1.14)$$

Po zmianie zmiennych we wszystkich składnikach sumy za pomocą definicji (1.2), oraz po wykorzystaniu ograniczenia (1.7) dostajemy:

$$J = \int_0^T \sum_{q/1}^n f_0(\mathbf{x}(t_1 + (q-1)T), \mathbf{u}(t_1), t_1 + (q-1)T) dt_1. \quad (1.15)$$

Z otrzymanych zależności wynika, że problem optymalizacji zadany w przedziale $[0, L]$ funkcjonalem (1.9), równaniami (1.5) z warunkami (1.8), przy ograniczeniach na sterowanie (1.6) i dodatkowo (1.7) jest równoważny problemowi określone w podprzedziale $[0, T]$ funkcjonalem celu (1.15), równaniami stanu

(1.12) z warunkami brzegowymi (1.8) i dodatkowo warunkami ciągłości (1.13), przy ograniczeniach na sterowanie:

$$\mathbf{u}(t_1) \in U \quad (1.16)$$

bez warunku okresowości, który został formalnie wyeliminowany.

Warunki konieczne optymalności rozwiązań rozważanego problemu wyprowadzone zostały z zasady maximum Pontriagina [1,2]. Sterowania okresowe określone ograniczeniami (1.6) i (1.7) stanowią podzbiór zbioru sterowań dopuszczalnych U – wzór (1.6). Jeżeli zasada maximum stosuje się do dowolnego zbioru tych sterowań, to musi również stosować się do każdego jego podzbioru. Tym samym musi być słuszna dla przypadków optymalizacji ze sterowaniem okresowym w skończonym przedziale.

Zasadę maximum stosować będziemy w następującej formie: aby w problemie optymalizacji funkcjonal celu (1.9), przy ograniczeniach (1.6), osiągał minimum należy rozwiązać równania (1.5) z warunkami (1.8), oraz równania sprzężone:

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_i(t)} \quad (1.17)$$

z warunkami:

$$\lambda_i(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i(0)} \quad (1.18)$$

$$\lambda_i(L) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i(L)}$$

Hamiltonian H określony jest wzorem:

$$H(t) = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \sum_{i/1}^N \lambda_i(t) f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.19)$$

przy $\lambda_0 = \text{const} \leq 0$, natomiast funkcja brzegowa wzorem:

$$\varphi = \sum_{l/1}^p \rho_l \varphi_l(\mathbf{x}(0)) + \sum_{k/1}^{\bar{p}} \bar{\rho}_k \bar{\varphi}_k(\mathbf{x}(L)) \quad (1.20)$$

w których $\rho_l, \bar{\rho}_k$ są stałymi podlegającymi w (1.18) eliminacji. Sterowanie optymalne występujące w (1.5) i (1.17) wyznacza się z warunku optymalności:

$$\mathbf{H}_{\text{opt}}(t) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\dot{t}). \quad (1.21)$$

O hamiltonianie (1.21) wiemy, że jest funkcją ciągłą, w szczególności dla przypadków autonomicznych jest stałą.

Z wszystkich dotychczasowych rozważań widać, że zasadę maximum Pontriagina można bez żadnych istotnych zmian stosować do problemu optymalizacji zadanej w przedziale $[0, T]$ wzorami (1.15), (1.12), (1.8) i (1.16), oraz warunków ciągłości (1.13), które są warunkami brzegowymi równań stanu w poszczególnych podprzedziałach (1.2) i dlatego muszą być uwzględnione w funkcji brzegowej (1.20).

Funkcja φ , która określa warunki (1.18) przyjmuje obecnie postać:

$$\begin{aligned} \rho = & \sum_{l/1}^p \rho_l \varphi_l(\mathbf{x}(0)) + \sum_{k/1}^{\bar{p}} \bar{\rho}_k \bar{\varphi}_k(\mathbf{x}(L)) + \\ & + \sum_{i/1}^N \sum_{m/1}^{n-1} \mu_{mi} (x_i(mT - 0) - x_i(mT + 0)) \end{aligned} \quad (1.22)$$

gdzie μ_{mi} mają wartość stałą.

Z warunków (1.18) wydzielamy zależności związane z warunkami (1.13):

$$\lambda_i(mT - 0) = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i(mT - 0)} \quad (1.23)$$

$$\lambda_i(mT + 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i(mT + 0)}.$$

Po wstawieniu (1.22) do (1.23) dostajemy warunki ciągłości zmiennych λ_i :

$$\lambda_i(mT - 0) = \lambda_i(mT + 0). \quad (1.24)$$

Widać ostatecznie, że prawdziwe jest następujące - szukane - twierdzenie dotyczące problemów optymalizacji ze sterowaniem okresowym w skończonym przedziale. Jeżeli chcemy znaleźć minimum funkcjonału (1.9) układu opisanego równaniami (1.5) z warunkami brzegowymi (1.8) i ograniczeniami na sterowanie (1.6) i dodatkowo (1.7), to należy rozwiązać układ nN równań (1.12) z warunkami ciągłości (1.13) i warunkami brzegowymi (1.8) oraz układ nN równań sprzężonych:

$$\dot{\lambda}_i(t_1 + (q-1)T) = - \frac{\partial H(t_1)}{\partial x_i(t_1 + (q-1)T)} \quad (1.25)$$

$$H(t_1) = \sum_{q/1}^n H_q(t_1)$$

z warunkami brzegowymi (1.18), w których funkcja brzegowa φ dana jest wzorem (1.20), oraz warunkami ciągłości (1.24), przy ograniczeniach na sterowanie (1.16), bez ograniczeń (1.7), które formalnie zostały wyeliminowane. Sterowanie

optymalne występujące w równaniach (1.12) i (1.25) należy wyznaczyć z warunku optymalności:

$$H_{\text{opt}}(t_1) = \max_{u \in U} \sum_{q/1}^n H_q(t_1) \quad (1.26)$$

w którym hamiltoniany cząstkowe $H_q(t_1)$ mają postać:

$$H_q(t_1) = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}(t_1 + (q-1)T), \mathbf{u}(t_1), t_1 + (q-1)T) + \sum_{i/1}^N \lambda_i(t_1 + (q-1)T) f_i(\mathbf{x}(t_1 + (q-1)T), \mathbf{u}(t_1), t_1 + (q-1)T) \quad (1.27)$$

gdzie $\lambda_0 = \text{const} \leq 0$. Hamiltonian (1.26) jest ciągły, a dla układów autonomicznych ma wartość stałą.

2. Przykład 1

Aby zilustrować przedstawione twierdzenie przebadany został problem optymalizacji drgań poprzecznych belki sprężystej, swobodnie podpartej, o skończonej długości L , podzielonej na n części. Stan belki opisany jest równaniem:

$$\left(EJ(t) \ddot{x}_1(t) \right) - \rho \omega^2 F(t) x_1(t) = 0. \quad (2.1)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_1(L) = 0 \\ -EJ(0) \ddot{x}_1(0) = -EJ(L) \ddot{x}_1(L) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Równania (2.1) sprowadzić można do układu równań różniczkowych, pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_3(t)}{EJ(t)} \\ \dot{x}_3 &= x_4(t) \\ \dot{x}_4 &= -\rho \omega^2 F(t) x_1(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

z warunkami:

$$\begin{aligned}x_1(0) = x_1(L) = 0 \\ x_3(0) = x_3(L) = 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Związki (2.3), (2.4) odpowiadają wzorom (1.5), (1.8). Przyjmujemy, że między momentem J i przekrojem F zachodzi zależność:

$$J(t) = aF^b(t)\tag{2.5}$$

w której wielkości a, b są stałe. Zgodnie z oznaczeniami punktu 1 mamy:

$$\begin{aligned}q = 1, 2, \dots, n \\ T = \frac{L}{n}.\end{aligned}$$

Zakładamy, że przekrój $F(t)$ jest okresowym sterowaniem:

$$F(t_1) = F(t_1 + (q-1)T)\tag{2.6}$$

oraz, że jest ograniczony:

$$F_1 \leq F(t) \leq F_2.\tag{2.7}$$

Wzory (2.6) i (2.7) są szczególnym przypadkiem ograniczeń (1.6), (1.7).

Szukać będziemy minimum objętości belki:

$$J = \int_0^L F(t) dt = n \int_0^T F(t_1) dt_1\tag{2.8}$$

przy ustalonej częstotliwości drgań:

$$\omega = \text{const}.\tag{2.9}$$

Równania (2.3) zgodnie z (1.12) mają postać:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t_1 + (q-1)T) &= x_2(t_1 + (q-1)T) \\ \dot{x}_2(t_1 + (q-1)T) &= -\frac{x_3(t_1 + (q-1)T)}{aEF^b(t_1)} \\ \dot{x}_3(t_1 + (q-1)T) &= x_4(t_1 + (q-1)T) \\ \dot{x}_4(t_1 + (q-1)T) &= -\rho\omega^2 F(t_1)x_1(t_1 + (q-1)T)\end{aligned}\tag{2.10}$$

z warunkami brzegowymi (2.4).

Hamiltoniany cząstkowe zadane za pomocą (1.27) w formie:

$$H_q = \lambda_0 F(t_1) + \lambda_1 x_2 - \frac{x_3}{aEF^b(t_1)} \lambda_2 + x_4 \lambda_3 - \rho \omega^2 F(t_1) x_1 \lambda_4 \quad (2.11)$$

w których funkcje x, λ zależą od zmiennej $t_1 + (q-1)T$ pozwalają z ogólnych wzorów (1.25) otrzymać układ równań sprzężonych:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t_1 + (q-1)T) &= \rho \omega^2 F(t_1) \lambda_4(t_1 + (q-1)T) \\ \dot{\lambda}_2(t_1 + (q-1)T) &= -\lambda_1(t_1 + (q-1)T) \\ \dot{\lambda}_3(t_1 + (q-1)T) &= \frac{1}{aEF^b(t_1)} \lambda_2(t_1 + (q-1)T) \\ \dot{\lambda}_4(t_1 + (q-1)T) &= -\lambda_3(t_1 + (q-1)T). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Warunki brzegowe dla równań sprzężonych wynikają ze związków (1.18), (1.20):

$$\lambda_2(0) = \lambda_4(0) = 0 \quad (2.13)$$

$$\lambda_3(L) = \lambda_4(L) = 0.$$

Do układów równań (2.10) i (2.13) należy dołączyć jeszcze warunki ciągłości typu (1.13), (1.24) przy $i = 1, 2, 3, 4$, oraz $m = 1, 2, \dots, n-1$.

Dla badanego przykładu ze względu na postać hamiltonianów (2.11) warunek optymalności (1.26) sprowadza się do poszukiwania zwyczajnego ekstremum $H(t_1)$ po przekroju $F(t_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial F(t_1)} \sum_{q/1}^n H_q(t_1) = 0. \quad (2.14)$$

Po wykorzystaniu (2.11) otrzymujemy optymalne kształt:

$$F^{b+1}(t_1) = \frac{b \sum_{q/1}^n \lambda_2(t_1 + (q-1)T) x_3(t_1 + (q-1)T)}{aE \left\{ -n\lambda_0 + \rho \omega^2 \sum_{q/1}^n \lambda_4(t_1 + (q-1)T) x_1(t_1 + (q-1)T) \right\}}. \quad (2.15)$$

Rozważany problem jest samosprzężony, t.zn., że podstawienie:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= kx_4 & \lambda_2 &= -kx_3 \\ \lambda_3 &= kx_2 & \lambda_4 &= -kx_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

dla stałego k sprowadza układ równań (2.12) i warunki (2.13) do układu (2.10) i warunków (2.4). Tym samym sprowadza wyrażenie (2.16) na optymalny przekrój do postaci:

$$F^{b+1}(t_1) = \frac{bk \sum_{q/1}^n x_3^2(t_1 + (q-1)T)}{aE \left\{ n\lambda_0 + \rho\omega^2 k \sum_{q/1}^n x_1^2(t_1 + (q-1)T) \right\}}. \quad (2.17)$$

Widać, że aby znaleźć warunki konieczne optymalności rozwiązania problemu drgań poprzecznych belki przy okresowo zmiennym przekroju w przedziale $[0, L]$ należy rozwiązać układ równań (2.10) z warunkami (2.4) uwzględniając postać przekroju (2.17) z ograniczeniami (2.7) i (2.9).

3. Przykład 2

Rozważany przykład został tak dobrany, aby do końca mógł być przeliczony analitycznie i nie był samosprężony.

Przyjmujemy, że równania stanu obiektu mają formę:

$$\dot{x}_1 = x_2(t) \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = u(t)$$

gdzie $0 \leq t \leq L = \text{const}$. Warunki brzegowe są następujące:

$$x_1(0) = x_{10} \quad (3.2)$$

$$x_2(0) = x_{20}.$$

Rozpatrujemy dwa przypadki optymalizacji różniące się od siebie funkcjami celu i ograniczeniami na sterowanie:

i) w przypadku pierwszym tak dobieramy funkcję celu (1.9), aby wystąpiło sterowanie ciągle w podprzedziałach, na które podzielony został cały przedział $[0, L]$:

$$J = \int_0^L \left(-ax_1 + \frac{1}{4}bu^2 \right) dt. \quad (3.3)$$

Na sterowanie u narzucamy ograniczenia typu (1.6):

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2. \quad (3.4)$$

Wielkości $a > 0$, $b > 0$, $u_1 > 0$, u_2 są zadane i stałe;

ii) w drugim przypadku przyjęta funkcja celu pozwala otrzymać sterowanie skokowe typu bang-bang:

$$J = \int_0^L (-ax_1 + bu) dt. \quad (3.5)$$

Ograniczenie na sterowanie występujące w (3.5) ma postać:

$$u(t) \leq M \quad (3.6)$$

gdzie stała $M > 0$ jest zadana.

W obu przypadkach przyjmujemy, że sterowanie u jest okresowe w ustalonym przedziale. Aby to uzyskać dzielimy przedział $[0, L]$ na podprzedziały. Dla przejrzystości obliczeń przyjmujemy:

$$n = 2 \quad q = 1, 2 \quad T = \frac{L}{2}. \quad (3.7)$$

Zgodnie z powyższym założeniem zachodzi równość (1.7) w postaci:

$$u(t_1) = u(t_1 + T) \quad (3.8)$$

$$0 \leq t_1 \leq T.$$

Chcąc skorzystać z otrzymanego w punkcie 1 twierdzenia należy równania (3.1) zapisać w formie zgodnej z (1.12). Otrzymujemy

- dla $q = 1$:

$$\dot{x}_1(t_1) = x_2(t_1) \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_2(t_1) = u(t_1).$$

- dla $q = 2$:

$$\dot{x}_1(t_1 + T) = x_2(t_2 + T) \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_2(t_1 + T) = u(t_1)$$

z warunkami brzegowymi (3.2).

C.d. przypadku i). Sterowanie ciągle w podprzedziałach.

Funkcjonał celu (3.3) na podstawie (1.15) ma następującą formę:

$$J = \int_0^T \left(-ax_1(t_1) + \frac{1}{4}bu^2(t_1) \right) dt_1 + \\ + \int_0^T \left(-ax_1(t_1 + T) + \frac{1}{4}bu^2(t_1 + T) \right) dt_1. \quad (3.11)$$

Hamiltonian dany wzorami:

$$H(t_1) = \sum_{q/1}^n H_q(t_1) \quad (3.12)$$

oraz (1.27) przyjmuje postać (przy $\lambda_0 = -1$):

$$\begin{aligned} H(t_1) = & ax_1(t_1) - \frac{1}{4}bu^2(t_1) + \lambda_1(t_1)x_2(t_1) + \\ & + \lambda_2(t_1)u(t_1) + ax_1(t_1 + T) - \frac{1}{4}bu^2(t_1) + \\ & + \lambda_1(t_1 + T)x_2(t_1 + T) + \lambda_2(t_1 + T)u(t_1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na podstawie (1.25), (3.12) i (3.13) można napisać układ równań sprzężonych
- dla $q = 1$:

$$\dot{\lambda}_1(t_1) = -a \quad (3.14)$$

$$\dot{\lambda}_2(t_1) = -\lambda_1(t_1)$$

- dla $q = 2$:

$$\dot{\lambda}_1(t_1 + T) = -a \quad (3.15)$$

$$\dot{\lambda}_2(t_1 + T) = -\lambda_1(t_1 + T).$$

Warunki brzegowe (3.2) i funkcja (1.20) z wzorów (1.18) dają warunki transwersalności:

$$\lambda_1(L) = 0 \quad (3.16)$$

$$\lambda_2(L) = 0.$$

Równania (3.14) i (3.15) można łatwo rozwiązać. Po wykorzystaniu warunku ciągłości typu (1.24) funkcji λ_i w punkcie $t = T$, oraz warunków (3.16) otrzymujemy

- dla $q = 1$:

$$\lambda_1(t_1) = -at_1 + aL \quad (3.17)$$

$$\lambda_2(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 - aLt_1 + \frac{1}{2}aL^2$$

- dla $q = 2$:

$$\lambda_1(t_1 + T) = -a(t_1 + T) + aL \quad (3.18)$$

$$\lambda_2(t_1 + T) = \frac{1}{2}a(t_1 + T)^2 - aL(t_1 + T) + \frac{1}{2}aL^2.$$

Ponieważ w hamiltonianie (3.12), (3.13) przy u^2 występuje znak minus, więc warunek optymalności (1.26) sprowadza się do:

$$\frac{\partial H(t_1)}{\partial u(t_1)} = 0 \quad (3.19)$$

skąd, po wstawieniu (3.13) dostajemy:

$$u(t_1) = \frac{1}{b} (\lambda_2(t_1) + \lambda_2(t_1 + T)). \quad (3.20)$$

Związki (3.19) i (3.20) określają sterowanie $u(t_1)$ bez uwzględnienia ograniczeń typu (1.38).

Wstawiając do (3.20) odpowiednie rozwiązania (3.17) i (3.18) mamy:

$$u(t_1) = \frac{a}{b} \left(t_1^2 - 3Tt_1 + \frac{5}{2}T^2 \right). \quad (3.21)$$

Sterowanie (3.21) nie ma miejsc zerowych. Jego minimum przypada w punkcie:

$$t_{1m} = \frac{3}{2}T \quad (3.22)$$

i wynosi:

$$u_{\min} = \frac{a}{b} \frac{1}{4} T^2. \quad (3.23)$$

Aby numerycznie wyznaczyć przebieg szukanego sterowania przyjmujemy, że:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = 2 \quad T = 3. \quad (3.24)$$

Z (3.21) otrzymujemy:

$$u(t_1) = \frac{1}{4} (t_1^2 - 9t_1 + 22.5). \quad (3.25)$$

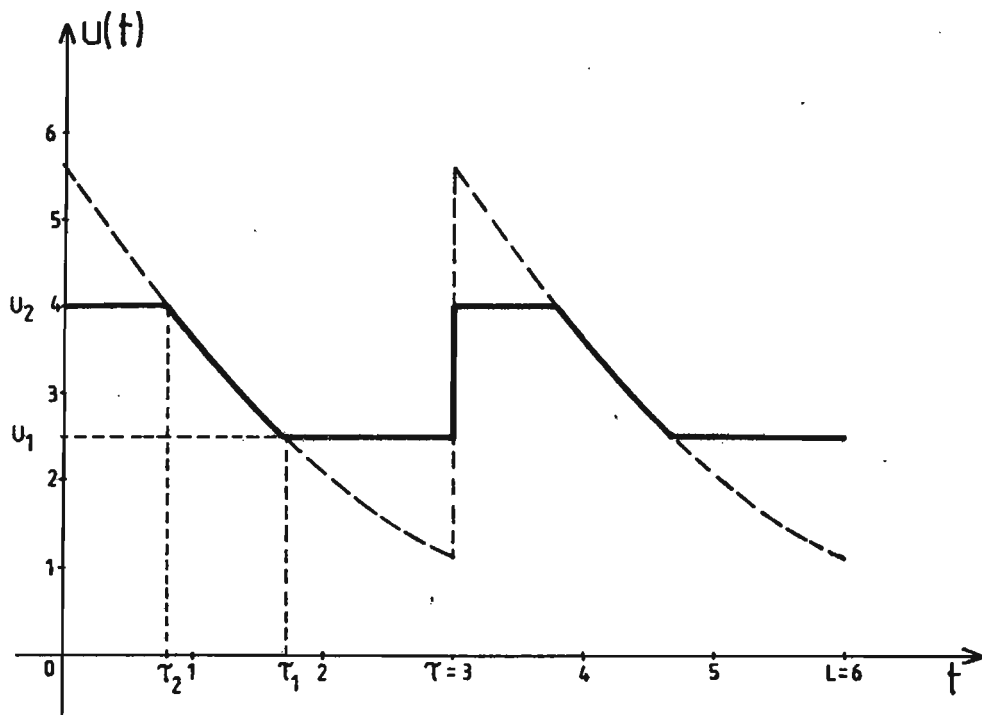
Graficzny przebieg sterowania $u(t_1)$ przedstawiono na rys.1.

Linie w przedziałach $[0, T]$, $[T, 2T]$ będące częściami parabol określają sterowanie bez ograniczeń. Gdy występują ograniczenia aktywne typu (3.4), to przebieg sterowania pokazuje krzywa pogrubiona. Punkty τ_1, τ_2 wyznaczyć można ze związków:

$$u_{1,2} = \frac{1}{4} (\tau_{1,2}^2 - 9\tau_{1,2} + 22.5) \quad (3.26)$$

w których $u_{1,2}$ są zadanymi, stałymi ograniczeniami.

C.d. przypadku ii). Sterowanie bang-bang.



Rys. 1.

Na podstawie (3.5), gdy sterowanie jest okresowe, funkcjonal celu przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 J = & \int_0^T (-ax_1(t_1) + bu(t_1)) dt_1 + \\
 & + \int_0^T (-ax_1(t_1 + T) + bu(t_1)) dt_1.
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Z (3.12), (1.27) i (3.27) można napisać:

$$\begin{aligned}
 H(t_1) = & ax_1(t_1) - bu(t_1) + \lambda_1(t_1)x_2(t_1) + \\
 & + \lambda_2(t_1)u(t_1) + ax_1(t_1 + T) - bu(t_1) + \\
 & + \lambda_1(t_1 + T)x_2(t_1 + T) + \lambda_2(t_1 + T)u(t_1).
 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Z zależności (3.27) i (1.25) widać, że równania sprzężone i warunki transversalności dane są wzorami (3.14), (3.15) i (3.16). Rozwiązania tych równań dane są więc przez (3.17) i (3.18).

Z warunku optymalności (1.26) wynika, że aby hamiltonian (3.28) osiągał maksimum, to sterowanie musi mieć postać:

$$u(t_1) = M \operatorname{sign}(\lambda_2(t_1) + \lambda_2(t_1 + T) - 2b) \quad (3.29)$$

gdzie stała M pojawia się z ograniczenia (3.6). Po wstawieniu (3.17), (3.18) do (3.29) dostajemy:

$$u(t_1) = M \operatorname{sign}\left(at_1^2 - 3aTt_1 + \frac{5}{2}aT^2 - 2b\right). \quad (3.30)$$

Miejsca zerowe funkcji pod znakiem sign w podprzedziale $[0, T]$ znajdują się w punkcie:

$$t_{10} = \frac{3}{2}T - \sqrt{\frac{2b}{a} - \frac{T^2}{4}}. \quad (3.31)$$

Minimum tej funkcji leży w punkcie:

$$t_{1m} = \frac{3}{2}T \quad (3.32)$$

i wynosi:

$$u_{\min} = a\left(\frac{T^2}{4} - \frac{2b}{a}\right). \quad (3.33)$$

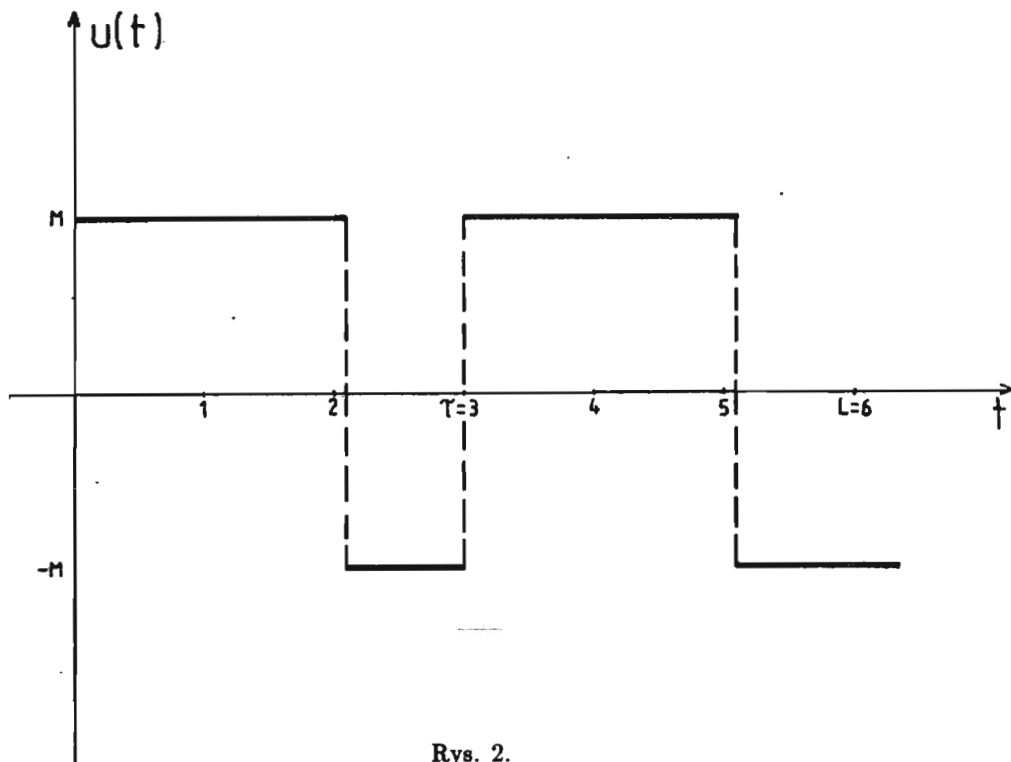
Z wzorów (3.33) i (3.31) widać, że gdy $u_{\min} < 0$, to t_{10} jest rzeczywiste i leży w podprzedziale $(0, T)$.

Graficzny przebieg sterowania (3.30) typu bang-bang w przedziale $[0, L]$ został przedstawiony na rys.2.

Stale a, b, T przyjęto jak w przykładzie i). Miejsce zerowe (3.31) sterowania leży wewnątrz podprzedziału $(0, T)$ i wynosi $t_{10} = 2.1$. Ponieważ dla $t_1 = 0$ sterowanie (3.30) jest dodatnie, a $u_{\min} < 0$, więc da się ono, zgodnie z rysunkiem, zapisać wzorem:

$$u(t_1) = \begin{cases} M & 0 \leq t_1 \leq t_{10} \\ -M & t_{10} \leq t_1 \leq T \end{cases} \quad (3.34)$$

W obu przypadkach - dla sterowania ciągłego w podprzedziałach, oraz typu bang-bang - można z równań (3.1), po wykorzystaniu odpowiedniego sterowania, wyznaczyć ich rozwiązania w całym przedziale $[0, L]$. Na przykład w przypadku ii) trzeba wyznaczyć 8 stałych całkowania, (każde rozwiązanie daje 2 stele), z 8 warunków, t.zn. z 2 warunków brzegowych (3.2) i 6 warunków ciągłości w punktach wewnętrznych przedziału $[0, L]$, w których sterowanie zmienia swoją wartość.



Rys. 2.

Rozwiązania równań (3.9) i (3.10) dla $u = 1$, $M = 1$ mają postać:

- dla $0 \leq t_1 \leq t_{10}$

$$x_1(t_1) = \frac{1}{2}t_1^2 + x_{20}t_1 + x_{10} \quad (3.35)$$

$$x_2(t_1) = t_1 + x_{20}$$

- dla $T \leq t_1 + T \leq t_{10} + T$

$$x_1(t_1 + T) = \frac{1}{2}(t_1 + T)^2 + d_2(t_1 + T) + d_1 \quad (3.36)$$

$$x_2(t_1 + T) = (t_1 + T) + d_2$$

gdzie:

$$d_1 = T^2 - t_{10}^2 + x_{10} \quad (3.37)$$

$$d_2 = 2t_{10} - 2T + x_{20}.$$

Rozwiązania tych samych równań dla $u = -1$ są następujące:

- dla $t_{10} \leq t_1 \leq T$

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2}t_1^2 + c_2t_1 + c_1 \quad (3.38)$$

$$x_2(t_1) = -t_1 + c_2$$

gdzie:

$$c_1 = -t_{10}^2 + x_{10} \quad (3.39)$$

$$c_2 = 2t_{10} + x_{20}$$

- dla $t_{10} + T \leq t_1 + T \leq L$

$$x_1(t_1 + T) = -\frac{1}{2}(t_1 + T)^2 + f_2(t_1 + T) + f_1 \quad (3.40)$$

$$x_2(t_1 + T) = -(t_1 + T) - f_2$$

gdzie:

$$f_1 = -(t_{10} + T)^2 + T^2 - t_{10}^2 + x_{10} \quad (3.41)$$

$$f_2 = 4t_{10} + x_{20}.$$

Stale całkowania d_1 , d_2 , c_1 , c_2 , f_1 , f_2 otrzymane zostały z warunków ciągłości w punktach t_{10} , T , $t_{10} + T$. Przy wyznaczaniu rozwiązań (3.35) - (3.41) wykorzystane zostały warunki brzegowe (3.2).

Na koniec należy jeszcze sprawdzić, czy wartość hamiltonianu układu ii) dla otrzymanych rozwiązań jest stała. Wstawiając do hamiltonianu (3.28) rozwiązania (3.35) - (3.41), oraz (3.17) i (3.18), po prostych przeliczeniach, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} H(t_1) &= a(x_{10} + c_1 + d_1 + f_1) + \\ &+ 2aT(x_{20} + c_2 + d_2 + f_2) = \text{const} \end{aligned} \quad (3.42)$$

gdzie występujące stałe dane są wzorami (3.37), (3.39) i (3.41). Zgodnie z teorią stała wartość hamiltonianu określona jest przez parametry charakteryzujące badany układ.

Literatura

1. PONTIAGIN L.S., BOLTIAŃSKI W.G., GAMKRELIDZE R.W., MISZCZENKO E.F., *Matematyčeskaja teorija optimalnych procesow*, Nauka, Moskwa 1969
2. GABASOW R., KIRILLOWA F.M., *Princip maksimuma w teorii optimalnego upravlennija*, Nauka i Technika, Minsk 1974

Optimization problems occurring while the control process of specified is performed**Summary**

The optimization problem in which a control function is of specified period has been analyzed. The necessary optimality conditions have been obtained in the form of the suitable modified Pontriagin's maximum principle.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 listopada 1989 roku