

Los Problemas de Esbeltez en el Diseño de Columnas de Concreto

El presente es el primero de una serie de artículos en los cuales se pretende estudiar los problemas de segundo orden en el diseño de columnas, la razón de las expresiones que proponen los reglamentos, y de paso los problemas de inestabilidad estructural de pórticos y estructuras elementales.

Luis Guillermo Aycardi
Profesor Asociado
Universidad Nacional

Sin entrar en discusiones sobre los significados y ventajas de los diversos métodos que han venido empleándose para tener en cuenta la esbeltez en el diseño de Columnas, nos limitaremos al análisis del método del momento incrementado, que consiste en seleccionar la armadura como si se tratara de una columna corta, con una carga axial igual a la carga obtenida del análisis, y con un momento igual al obtenido también del análisis pero multiplicado por un factor δ mayor que la unidad y cuya expresión es;

$$\delta = C_m / \left(1 - \frac{P_u}{\phi P_{cr}} \right)$$

En esta expresión C_m es un valor que depende de las condiciones en los extremos de la columna, P_u es la carga que la columna tiene que soportar, afectada de su factor de carga, ϕ es el coeficiente de reducción correspondiente según el fenómeno considerado tal como se propone en el ACI y, P_{cr} es la carga crítica de pandeo de la columna.

Parece pues conveniente y necesario plantear algunas discusiones sobre el fenómeno de pandeo de columnas, en vista de que la carga crítica aparece en esta expresión.

Por otra parte, la intención es presentar expresiones más sencillas y prácticas para calcular la carga crítica y aclarar la relación existente entre la expresión del factor de incrementos δ y los problemas de consideración de los llamados efectos

$P - \Delta$ en una estructura, o sea, los incrementos de momentos que se presentan porque las fuerzas horizontales originan desplazamientos laterales, los cuales facilitarán a su vez la presencia de momentos adicionales producidos por las cargas verticales P como se observa en la figura 1.

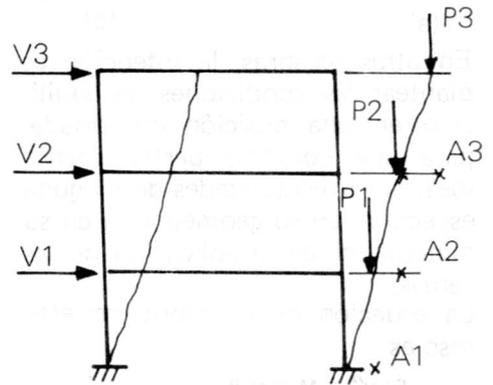


Fig. 1

Adicionalmente consideramos que en nuestro medio es benéfica una discusión sobre los problemas de pandeo porque por ser poco frecuentes en el caso de estructuras de concreto, no reciben con frecuencia nuestra atención especial. Por la anterior razón iniciemos la discusión por el problema más elemental de inestabilidad.

LA COLUMNA ARTICULADA EN LOS EXTREMOS

Se trata de una columna sometida a compresión PERFECTAMENTE AXIAL, articulada en sus extremos y si ello fuera posible, PERFECTAMENTE RECTA.

◀ Consideraremos además que el material de la columna es PERFECTAMENTE HOMOGENEO, y si bien es cierto que en estas condiciones tan ideales la mayoría diría que la columna está en posición de la figura 2a, vamos a investigar LA POSIBILIDAD de que persista el equilibrio en la posición deformada de la figura 2b.

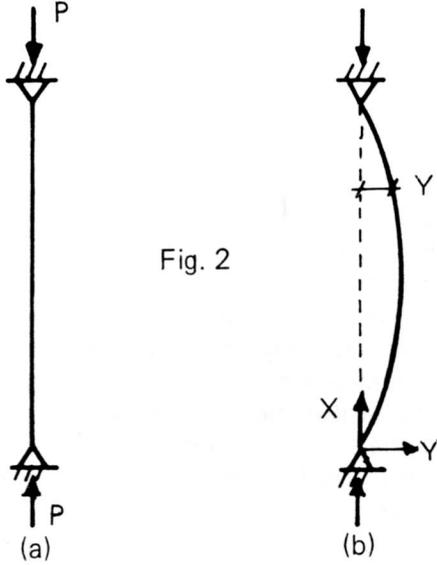


Fig. 2

b) $\text{Sen } KH=0$ y C_2 cualquier valor, lo cual implica $KH=n\pi$ o para el menor valor $KH = \pi$ o sea $\sqrt{\frac{P'}{EI}} = \frac{\pi}{H}$

es decir:
$$P = \frac{\pi^2 EI}{H^2}$$

A este valor de la menor carga para la cual existe la posibilidad de equilibrio en una posición deformada, lo llamamos la carga crítica o carga de pandeo elástico de la columna.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{H^2}$$

Nótese que para este valor de P la deflexión lateral puede ser cero porque $C_2 = 0$, pero también puede tener cualquier valor, ya que C_2 puede tener cualquier valor como se dijo. La expresión Pvs y sería como se indica en la fig. 3a.

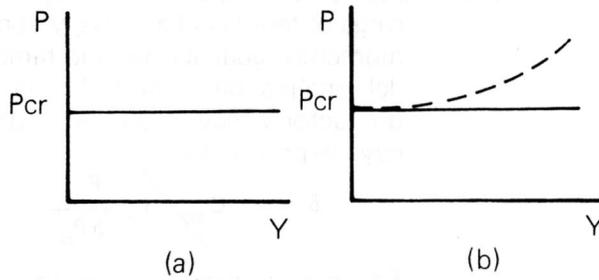


Fig. 3

En otras palabras, la intención es plantear las condiciones de equilibrio en una posición deformada, para una columna perfectamente ideal sin irregularidades de ninguna especie ni en su geometría ni en su material ni en la aplicación de las cargas.

La ecuación de equilibrio en este caso es;

$$EI y'' = M = -P_y$$

$$\therefore EI y'' + P_y = 0$$

$$y \text{ si } K^2 = \frac{P}{EI} \quad y'' + k^2 y = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal de coeficientes es;

$$y = C_1 \cos Kx + C_2 \text{ Sen } Kx$$

En esta expresión deben determinarse los coeficientes C_1 y C_2 según las condiciones de borde, las cuales en nuestro caso son:

$$\text{Para } \left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\} 0 = C_1$$

$$\text{y para } \left. \begin{matrix} x=H \\ y=0 \end{matrix} \right\} 0 = C_2 \text{ Sen } HK$$

En este caso se presentan dos posibilidades:

a) $C_2 = 0$, lo cual implica $y=0$ o sea la columna es perfectamente recta.

to de esta columna ideal resulta como en la fig. 3b (Ref. 1), en la cual aparecen simplemente grandes deflexiones laterales según la magnitud de la carga.

Aquí se inicia toda la discusión de la variación de módulos de elasticidad y demás factores que no son del caso analizar por el momento. Sin embargo, conviene resaltar los puntos siguientes:

1. La condición de pandeo no se presenta porque haya irregularidades de alguna clase; el fenómeno corresponde a condiciones perfectamente ideales.

2. La carga de pandeo depende solamente del módulo de elasticidad y de las características geométricas de la sección. No tiene que ver nada con el esfuerzo que el material está soportando.

En el cálculo precedente ha existido una simplificación al partir de la expresión $EI y'' = M$

Porque en ella se ha considerado que el radio de curvatura es $R \approx \frac{1}{y''}$

siendo que en verdad

$$R = \left[\frac{1 + y'^2}{1 + y''} \right]^{3/2}$$

pero argumentando que si se trata de deflexiones pequeñas y' es igualmente pequeña y entonces

$$[1 + y'^2]^{3/2} = 1$$

Si se trabajara con la expresión completa, la gráfica del comportamiento

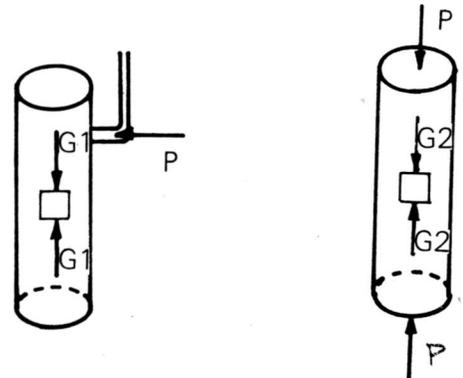


Fig. 4

3. Por lo comentado en el punto 2 podría inclusive presentarse pandeo en casos en los cuales el material está sometido a esfuerzo de tracción y no de compresión, como sería el caso que corresponde a un tubo sellado en sus extremos y sometido a una presión interna p. (Fig. 4a).

Esta presión produce esfuerzos longitudinales de Tracción σ_T los cuales se pueden hacer tan grandes como para que sean mayores que los σ_C que produce la carga exterior.

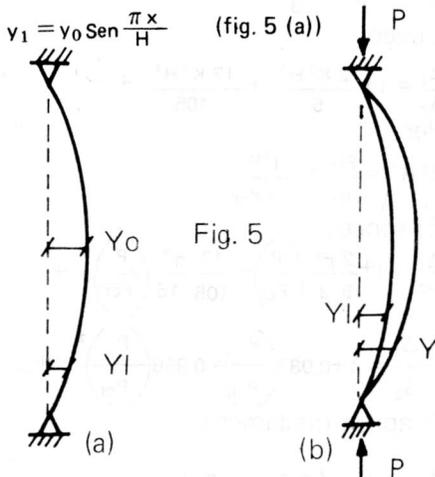
$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{Fig. 4(b)})$$

A pesar de esta circunstancia, es decir, inclusive teniendo esfuerzos de tracción y no de compresión la carga de pandeo

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ resultará inalterada.}$$

LA COLUMNA CON DESVIACION LATERAL INICIAL

Consideremos ahora el caso de una columna que no es perfectamente recta, sino que presenta una desviación lateral inicial y_0 , la cual para simplificar las expresiones matemáticas vamos a suponer



Al aplicar la carga P , la columna adoptará la posición y de la fig. 5b, de tal manera que se pueda escribir:

$$EI (y'' - y_1'') = -P_y \therefore EI y'' + P_y = EI y_1''$$

$$y'' + k^2 y = y_1''$$

$$\text{pero } y_1'' = \frac{\pi^2}{H^2} y_0 \text{ Sen } \frac{\pi x}{H}$$

$$\therefore y'' + k^2 y = \frac{\pi^2}{H^2} y_0 \text{ Sen } \frac{\pi x}{H}$$

Para la solución particular de esta ecuación diferencial ensayemos.

$$y = A \text{ Sen } \frac{\pi x}{H}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2}{H^2} A \text{ Sen } \frac{\pi x}{H}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial:

$$-\frac{\pi^2}{H^2} A \text{ Sen } \frac{\pi x}{H} + k^2 A \text{ Sen } \frac{\pi x}{H} = \frac{\pi^2}{H^2} y_0 \text{ Sen } \frac{\pi x}{H}$$

$$\therefore A = \frac{\pi^2 H^2}{\pi^2 H^2 - k^2} y_0 = \frac{y_0}{1 - k^2 H^2}$$

$$\text{como } k^2 = \frac{P}{EI} \quad A = \frac{y_0}{1 - \frac{PH^2}{EI \pi^2}} = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

La solución total de nuestra ecuación diferencial será

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \text{ sen } kx + \frac{y_0}{(1 - \frac{P}{P_{cr}})} \text{ Sen } \frac{\pi x}{H}$$

en ella para

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\} \therefore C_1 = 0$$

y para

$$\left. \begin{matrix} x=H \\ y=0 \end{matrix} \right\} 0 = C_2 \text{ Sen } KH + \frac{y_0}{(1 - \frac{P}{P_{cr}})} \times 0$$

y ahora si puede ser $C_2 = 0$

Luego la solución se limita a

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \text{ Sen } \frac{\pi x}{H} \text{ ó, } Y \text{ máx para } x = \frac{H}{2}$$

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

Expresión a la cual debemos agregar los siguientes comentarios;

$$1. \text{ Hemos llamado } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

y en esta expresión efectivamente es para esta carga para la cual $y \rightarrow \infty$ luego la carga de pandeo NO VARIA POR EL HECHO DE QUE HAYA IRREGULARIDAD TRANSVERSAL INICIAL.

2. Según la magnitud de la carga P , la deflexión lateral es igual a la inicial multiplicada por un factor de amplificación.

$$1 - \frac{P}{P_{cr}}$$

3. Este factor de amplificación es válido tanto para las deflexiones laterales como para los momentos que se presentan.

4. La representación de la deformación lateral según la magnitud de la carga será como en la fig. 6 y si hubiésemos trabajado con una expresión más completa que no desprecie los valores de las primeras derivadas, como se discutió anteriormente (fig. 3b), obtendríamos para un caso bastante real el comportamiento de la fig. 7.

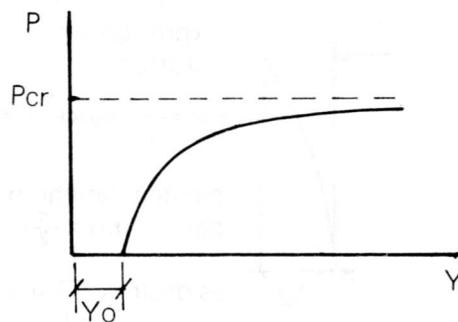


Fig. 6

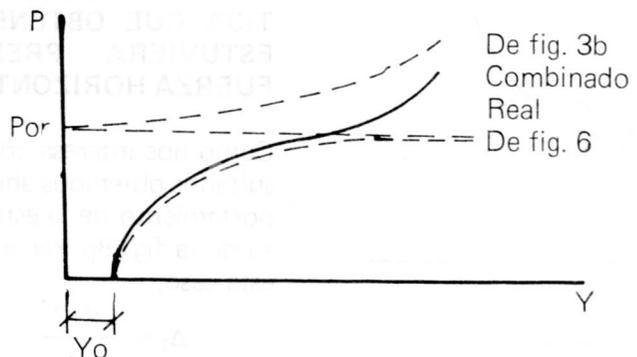


Fig. 7

◀5. El factor de amplificación es prácticamente igual al sugerido por la norma del ACI, aunque la intención en este último caso no es propiamente la de tener en cuenta el efecto de irregularidad en la rectitud de los elementos sino la deformación lateral producida por posibles momentos en los extremos que se tienen en cuenta en el valor de C_m .

Sin embargo, como esta expresión se aplica igualmente a los que se denominan marcos no arriostrados en la norma del ACI, o sea a aquellos con posibilidad de desplazamiento lateral, será conveniente estudiar lo que sucede básicamente en este caso.

EFFECTO P - Δ PARA UNA COLUMNA ELEMENTAL

Estudiemos el caso de la columna empotrada en el extremo inferior y libre en el superior y sometida a la acción simultánea de una fuerza horizontal y de una carga P. (fig. 8a), para comparar los resultados con lo que sucedería si solamente actúa la fuerza horizontal como en la fig. 8b.

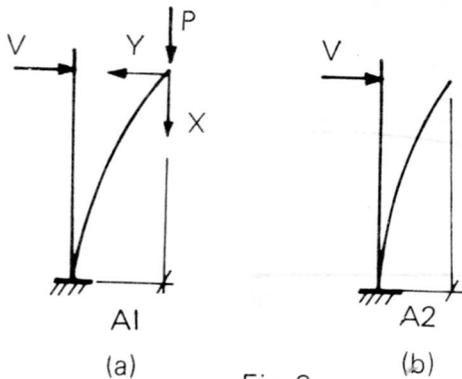


Fig. 8

En la fig. 8a, la ecuación de equilibrio será;

$$EI y'' = -P_y - V_x \quad EI y'' + P_y = -V_x$$

$$y'' + k^2 y = -\frac{V_x}{EI}$$

y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx - \frac{V_x}{k^2 EI}$$

o sea:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx - \frac{V}{P} X$$

Condiciones de borde:

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\} C_1 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} x=H \\ y'=0 \end{matrix} \right\} 0 = k C_2 \cos kH - \frac{V}{P} \therefore C_2 =$$

$$\frac{V}{kP \cos kH} \therefore y = \frac{V}{kP} \frac{\operatorname{sen} kx}{\cos kH} - \frac{V}{P} x$$

$$y = \frac{V}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{k \cos kH} - x \right]$$

Deformación máxima para $X = H$.

$$y_{x=H} = \Delta_1 = \frac{V}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} KH}{k \cos kH} - H \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{VH}{P} \left(\frac{\operatorname{tag} KH}{KH} - 1 \right)$$

Expresión en la cual para sorpresa nuestra si

$$KH = \frac{\pi}{2} \operatorname{tag} KH \rightarrow \infty \quad \text{o sea } \Delta_1 \rightarrow \infty$$

pandeo lateral o condición crítica para $KH = \frac{\pi}{2}$

$$\text{es decir } \sqrt{\frac{P}{EI}} H = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 H^2}}$$

Que ES LA MISMA CARGA CRITICA QUE OBTENEMOS SI NO ESTUVIERA PRESENTE LA FUERZA HORIZONTAL

Como nos interesa comparar los resultados obtenidos ahora, en el comportamiento de la estructura del caso de la fig. 8b, recordemos que en este caso;

$$\Delta_2 = \frac{V H^3}{3 EI}$$

o sea que

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{VH}{PV} \frac{3EI}{H^3} \left[\frac{\operatorname{tag} KH}{KH} - 1 \right]$$

$$\therefore \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{3EI}{PH^2} \left[\frac{\operatorname{tag} KH}{KH} - 1 \right]$$

$$\text{Pero } \frac{EI}{H^2} = \frac{4 P_{cr}}{\pi^2}, \text{ luego } \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{12 P_{cr}}{\pi^2 P}$$

$$\left[\frac{\operatorname{tag} KH}{KH} - 1 \right]$$

Ahora bien, si recordamos que se puede escribir:

$$\operatorname{tag} KH = KH + \frac{KH^3}{3} + \frac{2KH^5}{15} + \frac{17KH^7}{315} + \dots$$

$$\frac{\operatorname{tag} KH}{KH} = 1 + \frac{KH^2}{3} + \frac{2KH^4}{15} + \frac{17KH^6}{315} + \dots$$

Y reemplazando en la expresión de

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{12 P_{cr}}{\pi^2 P} \left\{ \frac{KH^2}{3} + \frac{2KH^4}{15} + \frac{17KH^6}{315} + \dots \right\}$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{12 P_{cr}}{\pi^2 P} \frac{k^2 h^2}{3} \left\{ 1 + \frac{17KH^4}{105} + \frac{2KH^6}{5} + \dots \right\}$$

Y se puede comprobar fácilmente que

$$\frac{12}{\pi^2} \frac{P_{cr}}{P} \frac{K^2 H^2}{3} = 1$$

Luego

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 1 + \frac{2K^2 H^2}{5} + \frac{17K^2 H^4}{105} + \dots$$

Pero

$$K^2 H^2 = \frac{PH^2}{EI} = \frac{\pi^2 P}{4 P_{cr}}$$

Entonces

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 1 + \frac{2\pi^2}{5 \cdot 4} \left(\frac{P}{P_{cr}} \right) + \frac{17}{105} \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 + \dots$$

$$\therefore \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 1 + 0.987 \left(\frac{P}{P_{cr}} \right) + 0.986 \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 + \dots$$

Y aproximadamente

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 1 + \left(\frac{P}{P_{cr}} \right) + \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 + \dots$$

Lo cual equivale a

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

Con lo cual hemos concluido que con una pequeña aproximación el factor de incremento de los efectos horizontales, por el hecho de que se encuentren también presentes las cargas verticales, o sea el efecto P - Δ para este caso, tiene la misma expresión encontrada para el caso de la columna con desviación lateral inicial.

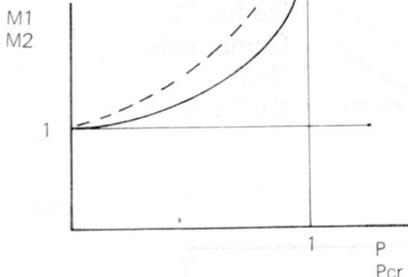


Fig. 9

Sin embargo, sería interesante averiguar cuál es el incremento de momentos por este efecto, pues no necesariamente es igual al de deformaciones.

Para fuerza horizontal sola

$$M_2 = V H$$

Para el efecto combinado

$$M_1 = V H + P \Delta_1$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{V H + P \Delta_1}{V H} = 1 + \frac{P \Delta_1}{V H}$$

$$\text{Pero } \Delta_1 = \Delta_2 \left(1 - \frac{1}{P_{cr}} \right) = \frac{V H^3}{3 E I}$$

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) = \frac{V H^3}{3 E I} \left(\frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} \right)$$

$$\text{Así } \frac{M_1}{M_2} = 1 + \frac{P V H^3}{V H 3 E I} \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 + \frac{P H^2}{3 E I} \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 + \frac{P \Delta^2}{12 P_{cr}} \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 + \frac{0.8225 P}{P_{cr} - P}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{P_{cr} - 0.1775 P}{P_{cr} - P} = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} - \frac{0.1775 P}{P_{cr} - P}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} + \frac{0.1775}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

Expresión de la cual concluimos que el incremento de momentos vuelve a ser aproximadamente igual a $\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$ pero no es exactamente

igual a este valor, máxime si se tiene en cuenta que para llegar a esta expresión se ha partido de que el mismo factor de amplificación era válido para las deformaciones siendo que allí existió ya una aproximación.

En la fig. 9 se presentan las representaciones gráficas de la relación $\frac{M_1}{M_2}$ calculada "exactamente" y con la expresión $\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$ considerada aproximada. ■

BIBLIOGRAFIA

- Theory of Elastic Stability* -- Timoshenko & Gere
Buckling Strength of Metal Structures -- F. Bleich
Structural Analysis -- Ghali-Neville
The Stability of Frames -- Horne-Merchant