Fórmulas empíricas para el diseño de columnas de madera

Uno de los factores que incide sobre el poco uso estructural de la madera en Colombia es el escaso conocimiento que tenemos de nuestras especies, entre otros, de sus constantes elásticas y en general del comportamiento bajo diversas solicitaciones de carga.

Consecuente con lo anterior se pretende, con esta investigación estudiar el comportamiento de las columnas de madera sometidas a carga axial, fundamentalmente en lo que respecta a establecer el grado de la ecuación que gobierna el comportamiento inelástico de las mismas. Además se corroborará si para la especie estudiada Abarco (Cariniana pyriformis), la ecuación que rige el comportamiento mencionado —recomendado por la casi totalidad de los textos americanos— se cumple con cierta precisión.

Al encontrar el grado de la ecuación, tomando los datos de una madera colombiana, no se pretende concluir que la ecuación empleada en otros países no sea cierta, ya que como es sabido se origina de ensayos de maderas con otras características morfológicas; por el contrario se plantea hallar una expresión más acorde con las maderas de nuestro país que permita racionalizar el diseño de columnas y dar comienzo a una vasta investigación con muchas más especies que permita establecer, en definitiva, una expresión acorde con las especies maderables de Colombia.

JAIME SALAZAR CONTRERAS
Ingeniero Agrícola M.Sc. en Estructuras
Profesor asociado.
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional - Bogotá

ELLIOT I. CORRECHA RICAURTE
Ingeniero Forestal
Profesor asistente
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional — Bogotá

FORMULAS EMPIRICAS PARA EL DISEÑO DE COLUMNAS

Se mostrará en una serie cronológica las diferentes ecuaciones que han sido desarrolladas por algunos investigadores[5] y las cuales, esencialmente, plantean la forma de obtener la capacidad resistiva de las columnas en zona inelástica.

Una de las fórmulas antiguas fue originalmente desarrollada por Tredgold, luego fue adaptada por Gordon para representar los resultados experimentales a los cuales les dio una representación final Rankine.

El esfuerzo promedio admisible a compresión, es dado por la fórmula de Rankine como:

$$(\sigma_c)_w = \frac{a}{1 + b\ (L/r)^2}$$

donde:

$\frac{L}{r}$ relación de esbeltez.

a y b son constantes para un determinado material.

L = Longitud que depende de las condiciones de apoyo.

Tetmajer mostró que el factor **b** no puede ser constante y debe disminuir a medida que se incrementa la relación (**L/r**); por ejemplo el AISC en sus especificaciones en 1928 desarrolló la siguiente expresión:

$$(\sigma_c)_w = \frac{18.000}{1 + \frac{L^2}{18.000 r^2}} \qquad \text{para } \frac{L}{r} > 60$$

Fórmula lineal: el valor del esfuerzo crítico a la compresión (σ_{cr}) se expresa por la siguiente fórmula:

$$\sigma_{cr} = a - b \ \left(\frac{L}{r}\right)$$

donde **a**, **b** dependen de las propiedades mecánicas del material.

Para columnas de acero doblemente articuladas, Tetmajer y Bauschinger establecieron la ecuación:

$$\sigma_{cr} = 48000 - 210\left(\frac{L}{r}\right) \qquad \text{Para } \frac{L}{r} \leq 110$$

Para mayores valores de **L/r** se debe emplear la fórmula propuesta por Euler.

La fórmula lineal presentada da esfuerzos de trabajo muy seguros, hecho que puede llevar a un diseño un tanto antieconómico.

Fórmula parabólica: fue propuesta por J. B. Johnson y se establece por la siguiente expresión:

$$\sigma_{cr} = a - b(L/r)^2 \qquad (5)$$

donde **a** y **b** dependen de las propiedades mecánicas del material.

Esta ecuación es tangente a la ecuación de Euler en un punto (**Cc, Ck**) a partir del cual se establece la zona elástica e inelástica para las columnas.

Para elementos metálicos la expresión (5) toma el siguiente valor:

$$\sigma_{cr} = F_y \left[\frac{1 - (L/r)^2}{2C_c^2}\right]$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

donde **Fy** = límite de fluencia del acero.

Para un acero 36 ksi el punto de tangencia se presenta para una relación de esbeltez de 126.1 y con un $\sigma_{cr} = F_y$ para $L/r = 0$

Un factor de seguridad adecuado puede utilizarse para encontrar el esfuerzo de trabajo, el cual puede variar de 1.67 a 1.92 (1).

FORMULAS EMPIRICAS PARA EL DISEÑO DE COLUMNAS DE MADERA

Generalmente las columnas de madera son de sección transversal cuadrada o rectangular, aspecto que hace conveniente utilizar la relación **L/b** en vez de **L/r**; así **b** representa la menor dimensión de la sección transversal y el radio de giro (**r**) en función de **b** será igual a $b/\sqrt{12}$

El punto que limita la zona elástica de la inelástica se denomina **Ck** y su valor depende del grado de la ecuación. (La deducción de dicho valor se puede apreciar en el subtítulo relacionado con la obtención de la fórmula polinomial...).

Cuando se revisan los textos relacionados con el diseño de elementos estructurales de madera y particularmente en lo concerniente al diseño de columnas, se observa una clasificación dependiendo de los valores de la relación **L/b** así:

Cuando la longitud no excede 11 veces la menor dimensión, la falla que se presenta es por aplastamiento; en longitudes entre 11 y **C/k** veces la menor dimensión, se produce una falla entre aplastamiento y pandeo lateral. Para longitudes entre **Ck** y 50 veces la menor dimensión, la falla es exclusivamente por pandeo lateral, hecho que hace que el esfuerzo **P/A** sea regido por la ecuación de Euler.

Para columnas cortas $L/b \leq 11$

el esfuerzo $P/A = \sigma_{c//}$

(esfuerzo a la compresión paralela a la fibra).

Para columnas $_{//} < L/b \leq C_k$ se han planteado diversas expresiones destacándose las siguientes:

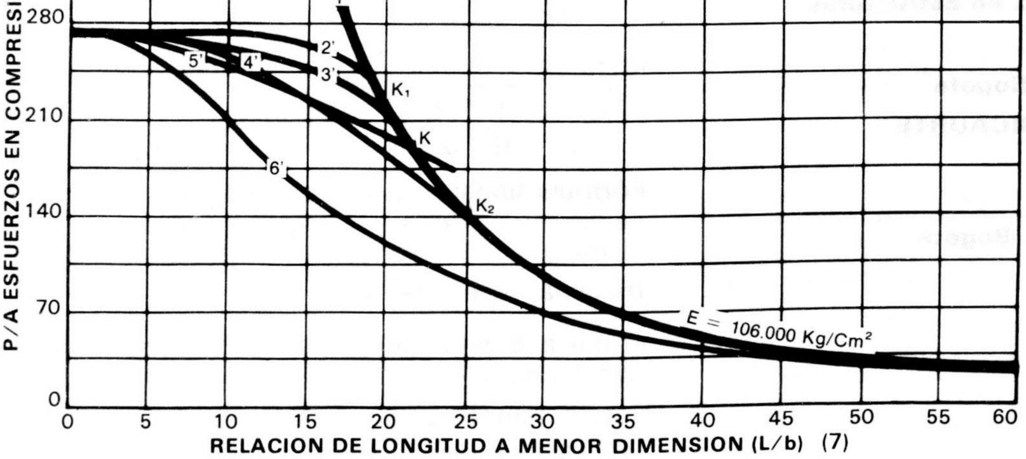


Gráfico 1.
Curvas resultantes para los diferentes tipos de ecuaciones en elementos sometidos a compresión (7).

$$P/A = \sigma_{c//}\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{L}{C_k\, b}\right)^8\right] \quad (2')$$

Fórmula de octavo grado.

$$P/A = \sigma_{c//}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{(L)^4}{(C_k b)^4}\right] \quad (3')$$

Fórmula de cuarto grado.

$$P/A = \sigma_{c//}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{(L)^2}{(C_k b)^2}\right] \quad (4')$$

Fórmula de Johnson.

$$P/A = \sigma_{c//}\left[\frac{49 + 1.05\,(L/b)}{700 + 15(L/b) + (L/b)^2}\right] \quad (5')$$

Fórmula empírica del Departamento de Agricultura de los EE.UU. Publicada en 1902 como resultado de 50 pruebas.

$$P/A = \left[\frac{\sigma_{c//}}{1 + 12\,\frac{(\sigma_{c//}\ )}{\pi^2 E}\,(L/b)^2}\right] \quad (6')$$

Fórmula de Rankine.

Para columnas largas $C_K < L/b \leq 50$

$$P/A = \frac{\pi^2 E}{12\,(L/b)^2}$$

Con el propósito de visualizar el efecto del grado del polinomio sobre la relación esfuerzos-**L/b,** se presenta el gráfico Nº 1, tomado de la referencia (7) el cual corresponde a una madera con un módulo de elasticidad longitudinal **EL= 106.000 K/cm²** y un esfuerzo a la comprensión paralela.

$\sigma_{c//} = 273$ Kg /cm²

$$P/A = \frac{\pi^2 E}{12(L/b)^2}$$

Ecuación de Euler

$$P/A = \sigma_{c//}\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{L}{C_k b}\right)^8\right]$$

Fórmula de octavo grado

$$P/A = \sigma_{c//}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{C_k b}\right)^4\right]$$

Fórmula de cuarto grado.

$$P/A = \sigma_{c//}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{Ckb}\right)^2\right]$$

Fórmula de Johnson.

$$P/A = \sigma_{c//}\left[\frac{49 + 1.05(L/b)}{700 + 15(L/b) + (L/b)^2}\right]$$

Fórmula empirica del Depto. de Agricultura de los EE. UU. publicada en 1902 como resultado de 50 pruebas.

Fórmula de Rankine.

$$P/A\left[\frac{\sigma_{c//}}{1 + 12\left(\frac{\sigma_{c//}}{\pi^2 E}\right)\left(\frac{L}{b}\right)^2}\right]$$

Como se aprecia existen diversas formas de poder encontrar el valor **P/A** para columnas de madera en zona inelástica, por lo cual se pretende hallar la ecuación que mejor se ajuste para especies de madera colombiana; es importante anotar que la mayoría de textos sobre maderas utilizan la fórmula polinomial de 4º grado.

Vale la pena señalar que para diseñar elementos estructurales de madera se deben utilizar esfuerzos de trabajo, los cuales se obtienen teniendo en cuenta aspectos tales como duración de carga, contenido de humedad, límite proporcional y defectos naturales de la madera por utilizar.

MATERIALES Y METODOS

Especie de madera utilizada

La madera utilizada en la investigación fue abarco, la cual se distingue por tener las siguientes características anatómicas:

Familia: Lecythidaceae
Nombre científico: Cariniana pyriformis
Nombre comercial: Abarco
Otros nombres: Abarco, cobano (Colombia); Bacu (Venezuela); Ceru, chorao, chupa, Jequitiva, Tauray (Brasil).

Propiedades generales: Madera de color café amarillento, café con visos rosados. Lustre de mediana a alta.
Olor y sabor no distinguible.
Alta a moderada dura y pesada. Gravedad específica de 0.5 a 0.7 (seca al aire). Grano recto, textura mediana.

Anillos de crecimiento: distinguibles a imperceptibles; presentes, debido a un incremento en la densidad de la fibra. Vasos visibles con lentes; numerosos, comúnmente distribuidos solitarios y en grupos de 2-3; diámetro tangencial de 107 μ a 215 μ; lúmina con abundantes tiliosis; punteaduras alternas con diámetro promedio de 8 μ Fibras libriformes, con punteaduras imperceptibles, parénquima visible con lentes. Radios imperceptibles con lentes en la sección transversal; perceptibles en la radial.

Obtención de las probetas

Las probetas se obtuvieron de piezas aserradas de madera de Abarco de las cuales, mediante un sistema de maquinado, se lograron aproximadamente seiscientos (600) elementos de sección transversal teórica de 2x1 cm y longitudes de hasta 42 cm variando de dos (2) en dos (2) cm.

Luego se procedió a hacer una selección de las probetas chequeando que estuvieran libres de defectos y alcanzando a tener 406 elementos, a los cuales se les sometió al ensayo correspondiente; adicionalmente, se procedió a determinar la inclinación de la fibra, la cual cumplió la especificación permisible contenida en la referencia (3).

Procedimiento de ensayo

Las probetas se guardaron en un cuarto a temperatura ambiente con el fin de que la madera alcanzara la humedad de equilibrio con el ambiente, la cual fue aproximadamente del 12%. Antes del ensayo se determinaron las dimensiones (**B, H, L**) de cada una de las probetas utilizando un calibrador; posteriormente fueron llevadas a la máquina universal de ensayos marca AMSLER de operación manual con una velocidad de 0.3 mm/minuto y aproximadamente constante durante todo el ensayo. Se utilizaron las escalas de 1.000 y 2.500 kg, con una precisión de 10 kg.

La carga se aplicó en forma continua hasta llevar la probeta a la rotura anotando este valor como carga máxima; una vez fallada la probeta se procedió a anotar el tipo de falla presentada (aplastamiento, pandeo o transición). Finalmente se tomó una muestra de 2.5 cm de longitud cerca al sitio de falla, con el propósito de obtener el contenido de humedad de la probeta ensayada.

Determinación del contenido de humedad

El contenido de humedad (**CH**) está definido como la relación entre el peso del agua (**Ww**) y el peso seco, al horno, de la madera (**Ws**), expresado en porcentaje. Con el fin de obtenerlo se toma una muestra de aproximadamente 2.5 cm de longitud cerca al sitio de falla de la probeta y se determina su peso **W** utilizando una balanza de precisión de 0.01 g; luego la muestra se lleva al horno a una temperatura de 103 ± 2° C hasta que su peso permanezca constante, tomando este proceso entre 12 y 48 horas.

Por consiguiente:

$$CH = \left[\frac{W - W_s}{W_s} \right] 100$$

RESULTADOS Y CALCULOS

Análisis estadístico

A los valores de esfuerzo a la compresión paralela, módulo de elasticidad longitudinal y **P/A** se les aplicaron los conceptos estadísticos básicos tales como media aritmética, desviación estándar y coeficiente de variación; este último valor permite obtener el grado de aceptación de los datos, los cuales estuvieron dentro del rango permisible.

Obtención del esfuerzo a la compresión paralela y módulo de elasticidad longitudinal

Para ello se utilizaron los datos obtenidos en los ensayos, procediendo de la siguiente manera:

Compresión paralela a la fibra $\sigma_{c_{//}}$

Se tomó la información obtenida de las relaciones de esbeltez (**L/b**) hasta 9.86, arrojando como valor promedio 555K/cm², utilizando 60 datos. Este valor de $\sigma_{c_{//}}$ = **555 K/cm²** se utilizó para la obtención de los valores empíricos para los diferentes valores de **n**.

Datos procesados estadísticamente y utlizados para el gráfico para el gráfico de la curva experimental. Especie: Abarco (Cariniana Pyriformis)

P/A (Kg/cm²)	L/b
576	5.92
575	7.92
512	9.86
444	11.51
531	13.48
460	15.45
406	17.43
425	19.43
351	20.01
296	22.8
293	24.6
259	27
224	28.9
185	32
162	34
150	36
136	38
106	40
109	42

Módulo de elasticidad longitudinal **EL**

Para ello se utilizaron los datos que garantizan para este caso la falla por pandeo o sea las probetas con relaciones de esbeltez (**L/b**) de 28.9 a 42.

Por consiguiente:

$$E_L = \frac{P_{crit} * L^2}{\pi^2 I}$$

donde: Pcrit = P. Máx. (Kg)

L = Longitud equivalente de la columna y como está doblemente articulada el factor es 1.

Inercia mínima centroidal en cm⁴ e igual a

$$\frac{H * B^3}{12}$$

El valor de **El** promedio se obtuvo de 140 datos, resultando un valor promedio de 217.000 K/cm², el cual se utilizó para la obtención de valores empíricos para los diferentes valores de **n**.

Obtención de la fórmula teórica polinomial en función de diferentes valores de n

Dado que la ecuación de Euler es tangente a la ecuación parabólica en un punto denominado **Ck** e igualmente se puede obtener el mismo valor **P/A** por cualquiera de las ecuaciones anteriormente mencionadas, se obtienen las fórmulas igualando pendientes y ordenadas de la siguiente manera:

$P/A = a - s\,(L/b)^n$, cuando $L/b = 0$

el valor de **a** sera el de $\sigma_{c_{//}}$

$\sigma_{c_{//}}$ Esfuerzo a la compresión paralela.

L = Longitud equivalente que depende de las condiciones de apoyo.

$$P/A = \sigma_{c_{//}} - S\,(L/b)^n$$

Ecuación polinomial de **n** grado.

$$P/A = \frac{\pi^2 E}{12(L/b)^2}$$ Ecuación de Euler.

Para cumplir lo inicialmente expuesto le damos a **L/b** el valor de **Ck**.

$$P/A = \sigma c_{//} - S\, C_k^n$$

$$P/A = \frac{\pi^2 E}{12 C_k^2}$$

Igualando pendientes tendremos:

$$- n\ S\ C_k^{n-1} = \frac{-2\pi^2 E}{12 C_k^3}$$

$$S = \frac{\pi^2 E}{6n\ C_k^3 C_k^{n-1}}$$

Igualando ordenadas:

$$\sigma c_{//} - S C_k^n = \frac{\pi^2 E}{12 C_k^2}$$

$$\sigma c_{//} - \frac{\pi^2 E}{6n C_k^3 C_k^{n-1}} * C_k^n = \frac{\pi^2 E}{12 C_k^2}$$

$$\sigma c_{//} = \frac{\pi^2 E}{12 C_k^2} + \frac{\pi^2 E C_k^n}{6n\ C_k^3\ C_k^{n-1}}$$

Para obtener los diferentes valores de **Ck**, le damos valores a **n**.

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
C_k	$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{4\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{6\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{5\pi^2 E}{36\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{8\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{7\pi^2 E}{60\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{9\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{9\pi^2 E}{84\sigma_{c11}}}$	$\sqrt{\frac{5\pi^2 E}{48\sigma_{c11}}}$

Conocido **Ck** el valor de la forma polinomial puede hallarse de la siguiente forma:

$$P/A = \sigma c_{//} - S\ (L/b)^n \qquad P/A = \sigma c_{//} - \frac{\pi^2 E}{6n C_k^3 C_k^{n-1}}\ (L/b)^n$$

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
P/A	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{L}{bC_k}\right)\right]$	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{bC_k^2}\right)\right]$	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{2}{5}\left(\frac{L^3}{bC_k^3}\right)\right]$	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{(L)^4}{(bC_k)^4}\right]$

	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
P/A	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{2}{7}\frac{(L)^5}{(bC_k)^5}\right]$	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{1}{4}\frac{(L)^6}{(bC_k)^6}\right]$	$\sigma c_{//}\left[1 - 2/9\ \frac{(L)^7}{(bC_k)^7}\right]$	$\sigma c_{//}\left[1 - \frac{1}{5}\frac{(L)^8}{(bC_k)^8}\right]$

Obtención de los valores empíricos para diferentes calores n.
VALORES DE P/A (Kg/cm²)

	n. = 1	n. = 2	n. = 3	n. = 4	n. = 5	n = 6	n = 7	n = 8
L/b	Ck = 31.06	Ck = 25.4	Ck = 23.2	Ck = 22.00	Ck = 21.2	Ck = 20.7	Ck = 20.3	Ck = 20.0
5.92	484	540	551	554	555	555	555	555
7.92	461	528	546	552	554	555	555	555
9.86	438	513	538	548	552	553	554	555
11.51	418	498	528	541	548	551	553	554
13.48	394	477	511	529	539	544	548	550
15.45	371	452	489	510	522	531	537	541
17.43	347	424	461	482	495	506	513	518
19.43	324	393	425	442	452	460	464	467
20	317	383	413	429	437	442	444	444
22.8	283	331	344	342				
24.6	262							
27	233							
28.9	211							

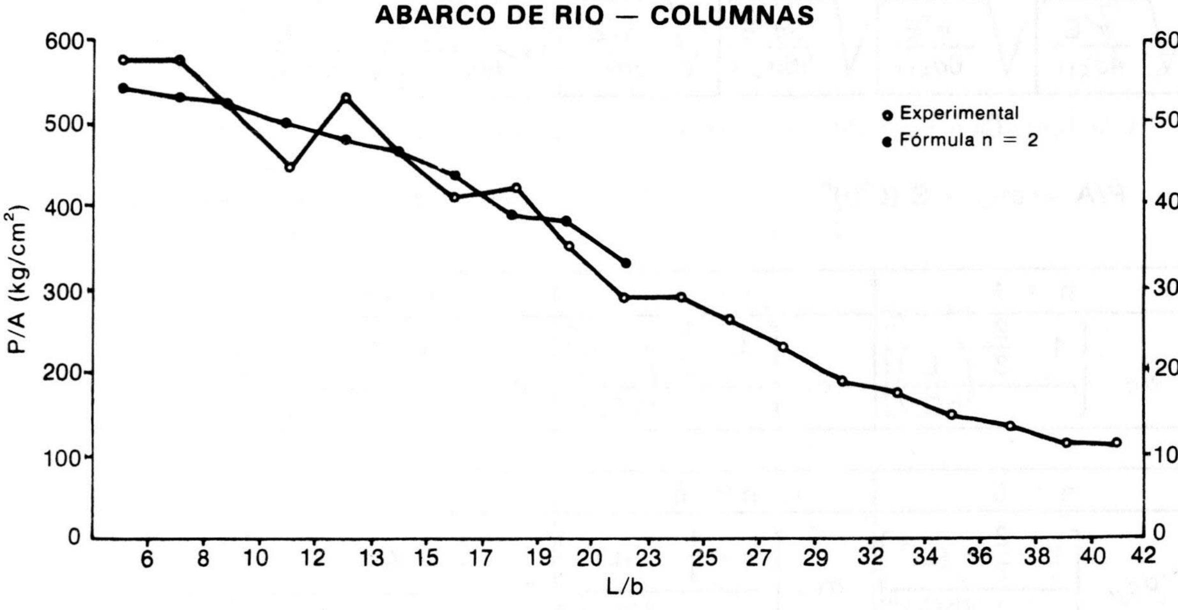
ANALISIS DE RESULTADOS

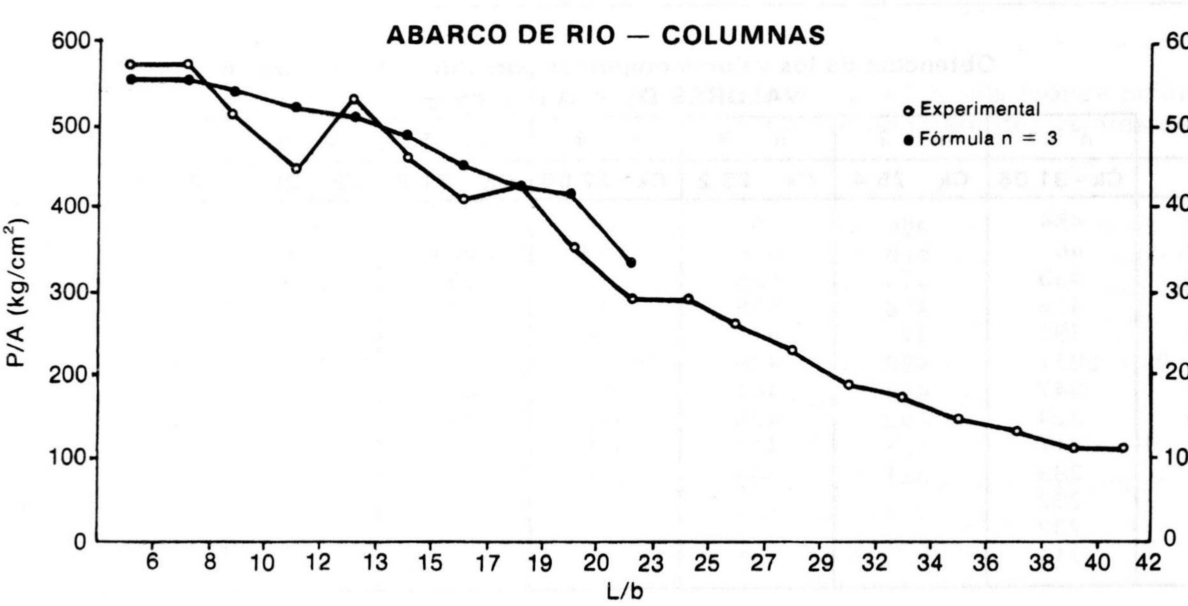
Con base en los resultados obtenidos se puede llegar a las siguientes consideraciones, al igual que se presentan cinco (5) gráficas que comparan los valores experimentales con las diferentes ecuaciones polinomiales que rigen el comportamiento de las columnas en la zona inelástica.

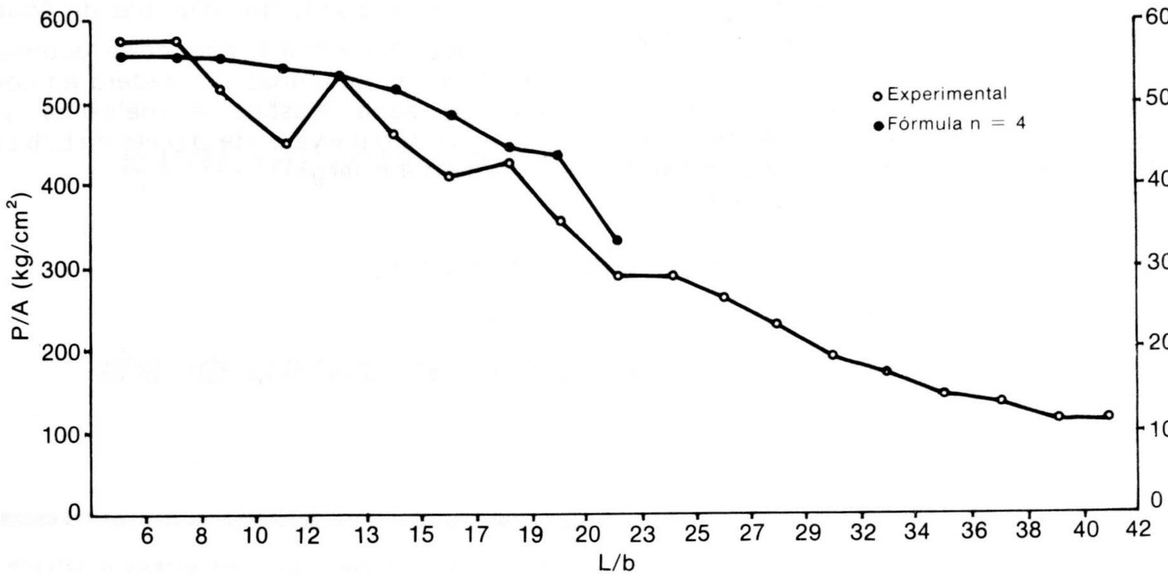
- La ecuación parabólica que mejor se ajusta a los valores experimentales es la de **n = 2.**
- Los valores de la ecuación polinomial de grado n = **4**, a partir de **L/b = 8**, superan los valores experimentales.
- El aumentar el grado de la ecuación a partir de **n = 5** a **n = 8** no representa variaciones significativas en los valores de **P/A.**
- A partir del grado de la ecuación **n = 5** todos los puntos **P/A** superan los valores experimentales.
- Se comprobó que el valor **Ck** teórico 25.4 para el grado de la polinomial de segundo grado, es el más cercano al valor experimental, 24.6.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

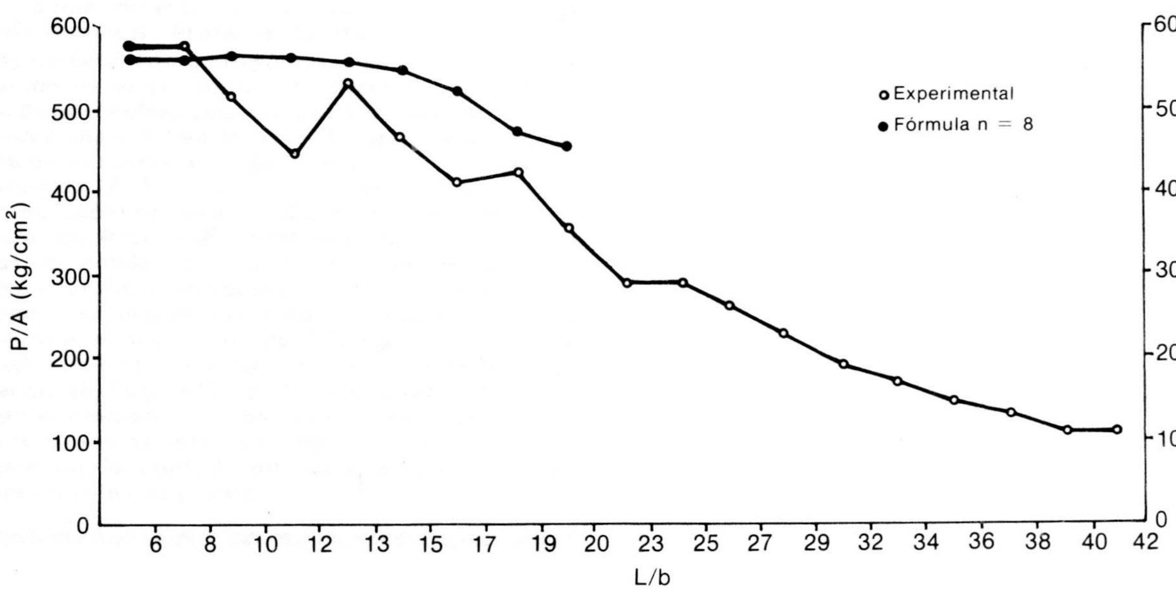
- Se demostró que la ecuación polinomial de segundo grado **n = 2**, es la que mejor se ajusta a los valores experimentales.
- Se recomienda utilizar para el diseño de columnas de abarco (Cariniana pyriformis) en zona inelástica, la curva parabólica de segundo orden **n = 2.**
- Con el propósito de establecer el grado de la ecuación polinomial para el diseño de columnas de madera, se debe continuar la presente investigación con el mayor número de especies.
- Los grados de la ecuación polinomial **n = 4** y



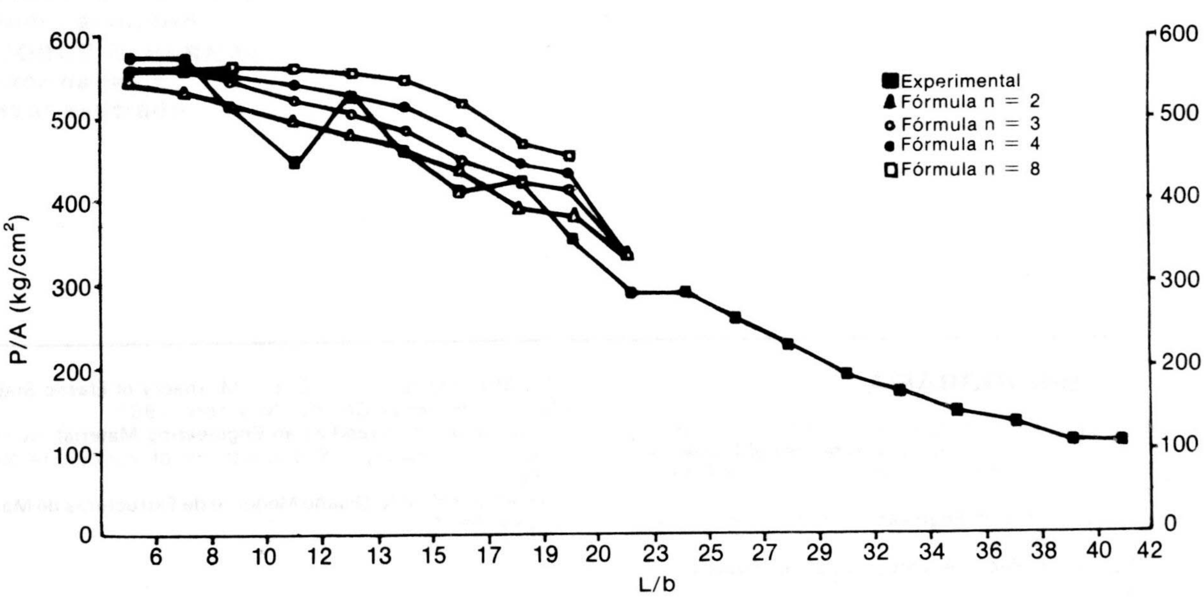




o Experimental
● Fórmula n = 4
P/A (kg/cm²)
L/b
0
100
200
300
400
500
600
6 8 10 12 13 15 17 19 20 23 25 27 29 32 34 36 38 40 42



o Experimental
● Fórmula n = 8
P/A (kg/cm²)
L/b
0
100
200
300
400
500
600
6 8 10 12 13 15 17 19 20 23 25 27 29 32 34 36 38 40 42



■ Experimental
▲ Fórmula n = 2
o Fórmula n = 3
● Fórmula n = 4
□ Fórmula n = 8
P/A (kg/cm²)
L/b
0
100
200
300
400
500
600
6 8 10 12 13 15 17 19 20 23 25 27 29 32 34 36 38 40 42

n = 8 recomendados por diferentes autores americanos no se ajustan exactamente para la especie ensayada.

El utilizar ecuaciones polinomiales de grado mayor a **4** y con **L/b** mayores a **8**, generan valores de áreas de sección transversal menores a las requeridas, hecho que hace peligroso su uso en el diseño de columnas de Abarco.

Con base en la teoría de pandeo se recomienda clasificar las columnas de madera en columnas en zona elástica e inelástica y no dependiendo del valor de la relación **L/b** corta, intermedia o larga).

BIBLIOGRAFIA

1. AISC. **Manual of Steel Construction.** Seventh Edition, 1973.
2. BOOTH, L.G., and REECE, P.O. **The Structural Use of Timber.** A comentary onthe British Standarc Code of Practice CP 112. London, 1981.
3. GURFINKEL GERMAN. **Wood Engineering.** Kendall/Hunt Publishing Company, 1981.
4. **Manual de Diseño del Pacto Andino.** Junta del Acuerdo de Cartagena, 1984.
5. TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. **Theory of Elastic Stability.** MacGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1961.
6. Wood Handbook. **Wood as an Engineering Material**, by Forest Products Laboratory U.S. Department of Agriculture Nº 72. 1955.
7. HOWARD HANSEN. **Diseño Moderno de Estructuras de Madera.** CECSA, 1971.