

Estudio del Efecto de las Máscaras de Convolución en Imágenes Mediante el Uso de la Transformada de Fourier

Manuel Guillermo Forero Vargas*, Edisson Antonio Arias Cruz**

RESUMEN

Las máscaras de convolución son útiles para extraer información relevante de una imagen. Este artículo presenta una técnica para la evaluación del efecto de estas máscaras a través de la transformada de Fourier, haciendo uso de su propiedad de convolución y su aplicación en la encriptación de imágenes.

Palabras clave: Transformada rápida de Fourier (FFT), filtros espaciales, procesamiento de imágenes, convolución, criptografía.

INTRODUCCIÓN

Durante varios años, el área del procesamiento de imágenes se ha visto involucrada como herramienta esencial en muchas áreas del conocimiento (sensores remotos, bioingeniería, etc). Su importancia ha aumentado junto al creciente avance en el desarrollo de tecnologías de *hardware* y *software* que soportan la alta carga computacional que algunos algoritmos requieren. Sin embargo, el área del análisis frecuencial de imágenes se ha visto relegada en parte debido a su mayor complejidad, comparada con las máscaras de convolución espacial, cuando su tamaño es pequeño. Esto ha hecho que en muchos casos se usen los filtros digitales observando sólo sus resultados, pero desconociendo su funcionamiento.

Algunos usuarios de *software* de procesamiento digital de imágenes se ven sometidos al uso de algoritmos, sin saber realmente el porqué de los efectos que éstos consiguen en las imágenes que tratan. La información que ofrece el histograma no es suficiente para el análisis de un filtro, puesto que ignora la distribución espacial de los datos, concentrándose solamente en la frecuencia de los niveles digitales (tonos de gris).

I. DESARROLLO

El realce espacial es un procesamiento matemático sobre los píxeles de una imagen, con el fin de resaltar ciertos tipos de relaciones. Para esto se usan las llamadas máscaras de convolución o filtros espaciales, que son ventanas con valores

dados por el tipo de relación espacial que se quiere resaltar. La figura 1 muestra un ejemplo típico de estas máscaras.

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 1. Filtro espacial pasabajos.

Para una señal en dos dimensiones, como es el caso de las imágenes, los bordes y demás cambios bruscos de los niveles de gris están relacionados con las componentes de alta frecuencia, mientras que los factores de iluminación y color tienen que ver con las frecuencias bajas.

El proceso mediante el cual se aplica un filtro espacial a una imagen matemáticamente se explica por el proceso de convolución.

La convolución viene dada por [3]:

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

donde,

x y y son las coordenadas del píxel.

a y b son variables artificiales para el desplazamiento de la matriz de convolución.

La convolución de la imagen con el filtro que se desea aplicar, da como resultado la imagen filtrada.

La figura 2 muestra el proceso de convolución aplicado a una imagen $f(x, y)$

Imagen original = $f(x, y)$

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

*Ingeniero Electrónico, PhD, profesor asistente, Universidad Nacional de Colombia.

**Ingeniero de Sistemas, miembro Grupo OHWAHA, Universidad Nacional de Colombia.

Filtro = $g(x,y)$

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

Imagen filtrada = $f(x,y)*g(x,y)$

11	10	12
11	13	15
13	15	14

Figura 2. Filtrado espacial.

Dado que se trabaja con imágenes discretizadas en niveles de gris, si al aplicar el filtro se obtiene un valor decimal, éste se trunca.

La convolución se realiza adicionando los productos obtenidos luego de multiplicar uno a uno los términos de la máscara de convolución con cada uno de los pixeles de la imagen, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

Elemento 2,1(fila 2, columna 1)=

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 23 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 13 \\ 10 & 12 & 19 \end{matrix} * \begin{matrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{matrix} = \\ \frac{23+5+7+4+6+13+10+12+9}{9} = \frac{99}{9} = 11 \end{matrix}$$

Elemento 3,3 (fila 3, columna 3)=

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 13 & 20 & 22 \\ 19 & 21 & 3 \\ 25 & 2 & 9 \end{matrix} * \begin{matrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{matrix} = \\ \frac{13+20+22+19+21+3+25+2+9}{9} = \frac{134}{9} = 14 \end{matrix}$$

La figura 3 presenta estas imágenes en escala de grises, usando una paleta de 32 niveles.

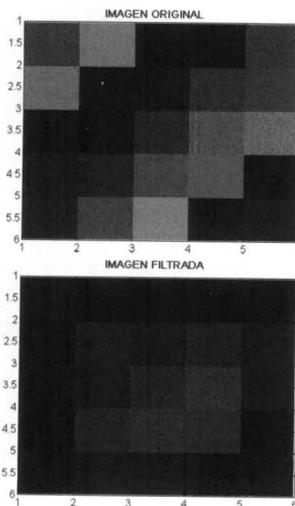


Figura 3. Proceso de filtrado.

Como puede observarse, los valores resultantes son más homogéneos, lo cual es un resultado directo de la aplicación de un filtro pasabajos.

Los principales objetivos del realce o filtrado espacial son [1]:

- Mejorar la apariencia visual de la imagen.
- Ayudar a la extracción de información.

De allí, la pregunta que surge es: ¿Cómo saber qué efectos tiene sobre una imagen la aplicación de una máscara, conociendo sus coeficientes? La respuesta puede ser dada empleando la transformada de Fourier.

En el caso de las imágenes, la transformada rápida de Fourier es un proceso por medio del cual se puede obtener información en el dominio de la frecuencia de una señal que está originalmente en el dominio del espacio. Esta transformada es definida para señales continuas en el espacio, pero para su manejo en el computador se define su equivalente discreto, dado por [4]:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

Ec. (1) $F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$

donde,

$f(x, y)$: señal discreta en el dominio del espacio.

$F(u, v)$: señal discreta equivalente en el dominio de la frecuencia.

x, y : coordenadas espaciales.

u, v : índices de frecuencia.

M, N : número de filas y columnas de la imagen, respectivamente.

Entre las propiedades de la transformada de Fourier se tiene el teorema de convolución dado por [2]:

$$h(x, y) = f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow H(u, v) = F(u, v) \cdot G(u, v)$$

donde,

$h(x, y)$ es la imagen filtrada vista en el dominio del espacio.

$H(u, v)$ es la imagen filtrada vista en el dominio de la frecuencia.

$g(x, y)$ es el filtro visto en el dominio del espacio.

$G(u, v)$ es el filtro visto en el dominio de la frecuencia.

La ecuación indica que el proceso de convolución espacial es equivalente a la multiplicación en frecuencia.

La relación de esta importante propiedad con el proceso de filtrado de imágenes radica en que si se tienen la imagen y el filtro en el dominio de la frecuencia, sus componentes se multiplican término a término y se calcula la transformada inversa de la multiplicación obteniendo la imagen filtrada. El proceso se muestra en la figura 4.

Para visualizar la transformada de Fourier de una señal, se hace uso del espectro de magnitud, definido como [3]:

$$|F(u, v)| = \sqrt{(\text{real}(F(u, v)))^2 + (\text{imag}(F(u, v)))^2}$$

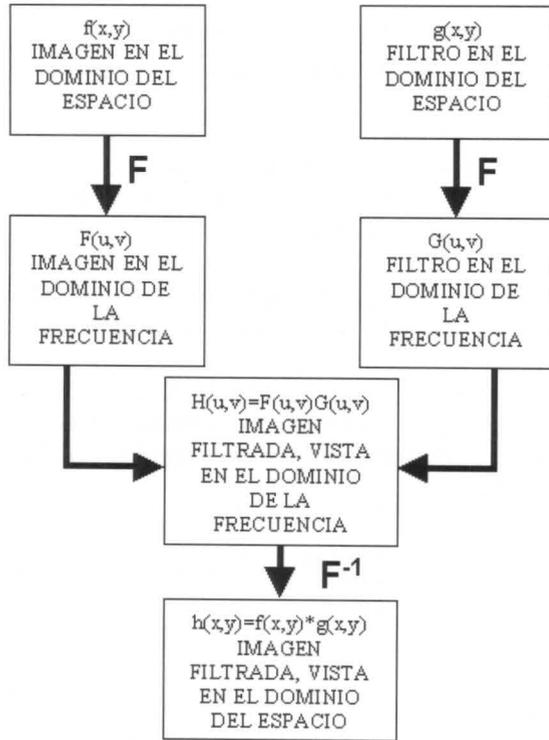


Figura 4. Proceso de filtrado usando la transformada de Fourier.

El espectro de magnitud que se obtiene al aplicar la transformada de Fourier tiene el inconveniente de estar centrado en el origen (esquina superior izquierda) lo cual dificulta una correcta percepción de frecuencias espaciales altas y bajas. Para facilitar el análisis se requiere que el espectro esté centrado en el centro de la imagen, esto se logra multiplicando los valores originales por $(-1)^{(x+y)}$ y calcular la transformada de Fourier sobre el resultado anterior [4]. La figura 5 muestra la diferencia entre un espectro centrado en el origen y uno centrado en el centro.

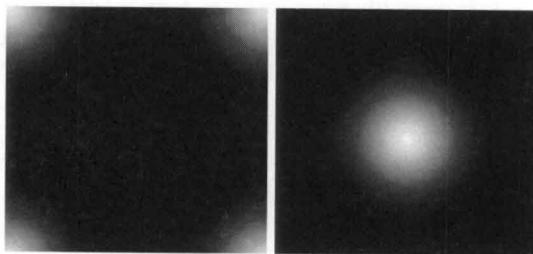


Figura 5. Izquierda: espectro de magnitud centrado en el origen. Derecha: espectro de magnitud centrado en el centro.

La forma general que presenta un espectro de magnitud centrado en el centro se muestra en la figura 6.

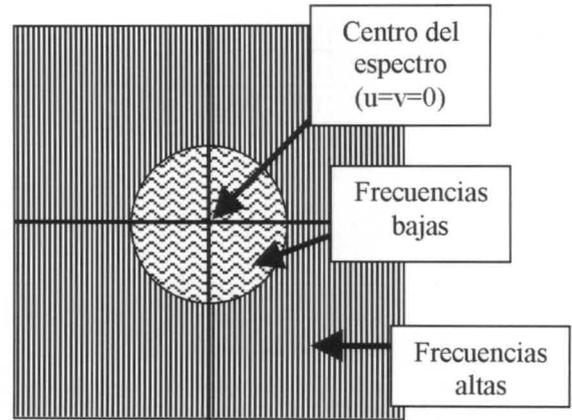


Figura 6. Esquema general del espectro de magnitud de una señal bidimensional.

En adelante, todos los espectros de magnitud que se muestran, están centrados en el centro.

Por lo anterior, para conocer el efecto de la aplicación de una máscara de convolución, es necesario visualizar su espectro de magnitud.

La figura 7 muestra los espectros de magnitud de algunos de los filtros más conocidos.

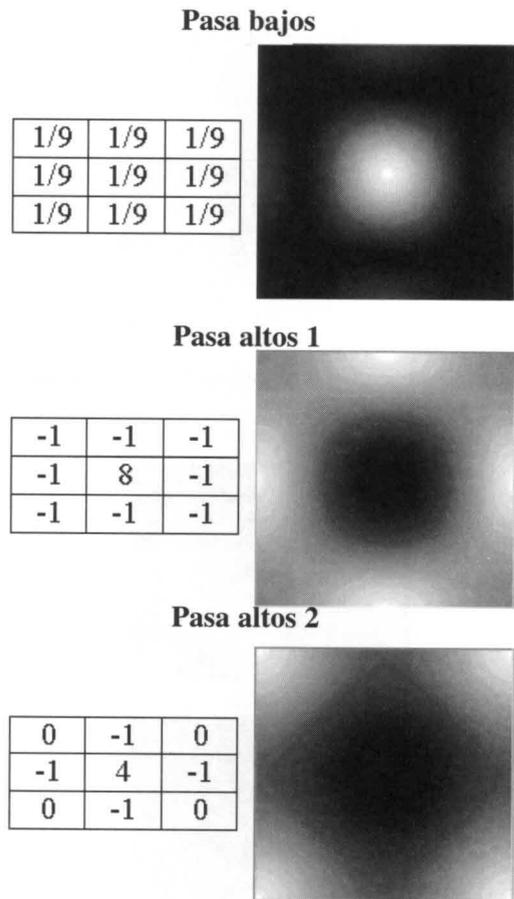


Figura 7. Espectro de magnitud de algunos filtros conocidos.

Vale la pena resaltar que el proceso de filtrado usando la transformada de Fourier resulta más rápido que utilizar máscaras de convolución cuando la máscara es de gran tamaño (alrededor de 13 x 13 o más).

En el caso de máscaras experimentales, el análisis sobre el efecto del filtro está dado por las tonalidades que muestra el espectro de magnitud. Las zonas con tonalidades claras aumentan o mantienen esas zonas de frecuencia en la imagen por tratar, mientras que las zonas oscuras disminuyen, o incluso anulan, las respectivas zonas de frecuencia de la imagen. Con base en estas consideraciones se analiza a continuación el efecto que tiene la máscara de la figura 8.

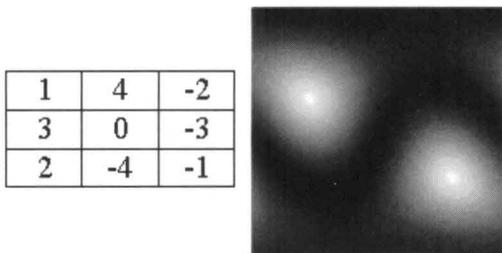


Figura 8. Máscara experimental y su correspondiente espectro de magnitud.

En la figura 8 se observa que la parte central del espectro de la máscara es oscura, por lo que se deduce que una imagen tratada con esta máscara pierde sus frecuencias espaciales bajas, lo cual se ve reflejado en una pérdida de detalles gruesos de los objetos de la imagen. Por otro lado, algunas de las zonas que corresponden a las frecuencias espaciales altas se verán resaltadas, por lo que se detectarán algunos bordes o cambios bruscos en los niveles de gris.

Adicionalmente, el efecto del filtro puede ser revertido, dado que si se multiplica en frecuencia para obtener la imagen espectral filtrada $H(u,v)$, también es posible dividirla para tratar de recuperar el espectro de la imagen original $F(u,v)$. La justificación matemática viene dada por [4]:

$$f(x, y) * g(x, y) = F(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$F(u, v) \cdot G(u, v) = H(u, v)$$

$$F(u, v) = \frac{H(u, v)}{G(u, v)}$$

donde

$F(u,v)$: Transformada de Fourier de la imagen original.

$G(u,v)$: Transformada de Fourier del filtro por aplicar.

$H(u,v)$: Transformada de Fourier de la imagen filtrada.

Es decir, para revertir el efecto del filtro basta con dividir la transformada de la imagen filtrada entre la transformada del filtro. Para cada término, se evalúa la magnitud del elemento de G . Si ésta es cero o tiene un valor cercano, se presentan dos opciones: dejar el resultado de la división en cero o tomar el valor de H . Por lo anterior, si al menos un elemento de la

transformada de Fourier del filtro aplicado es cero, el efecto de éste no se podrá revertir en su totalidad.

Se debe tener en cuenta, al graficar, el espectro de magnitud y la variación de los datos; en la mayoría de imágenes, la zona central del espectro tiene valores altos, mientras que otras zonas tienen valores bajos, lo que se traduce en un punto brillante en el centro y negro en las demás zonas del espectro de magnitud de la imagen. Para evitarlo, una vez obtenido el espectro de magnitud, se dibuja su logaritmo [4], lo cual hace que los valores pequeños se vean más claramente, tal como se muestra en la figura 9. El logaritmo sólo se emplea para una mejor visualización del espectro y no para el procesamiento de la imagen.

II. RESULTADO EXPERIMENTAL

Para validar las suposiciones hechas, se presentan tres ejemplos.

En el primer ejemplo se trata la imagen de la figura 9.

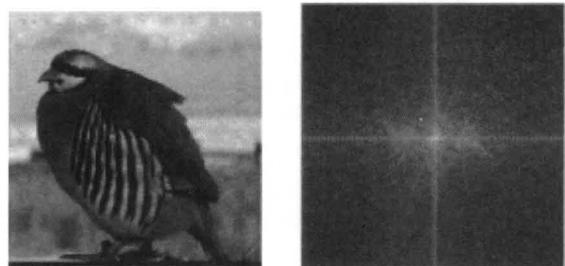


Figura 9. Imagen de prueba y su espectro de magnitud.

La figura 10 presenta el espectro de la multiplicación de la transformada de Fourier de la imagen de prueba, con la transformada de Fourier de la máscara experimental y el resultado de la transformada inversa de dicha multiplicación. El espectro resultante ha sido dibujado usando logaritmo.

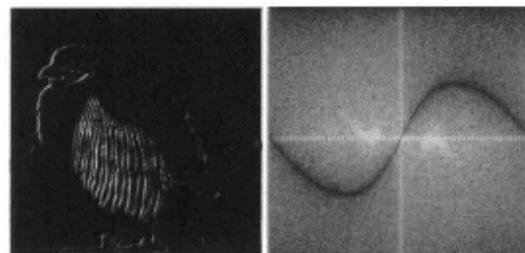


Figura 10. Izquierda: imagen resultante de la aplicación del filtro de la figura 8. Derecha: espectro correspondiente.

La imagen obtenida luego de aplicar el filtro de la figura 8 corrobora las suposiciones hechas al analizar la máscara; es decir, se observan algunos contornos de la imagen y se ha perdido información sobre los detalles gruesos.

Finalmente, se recuperó la imagen original luego de aplicar el proceso de reversión del filtro. Para su realización se optó por tomar como resultado de la división el valor de cero para valores cercanos a cero en el espectro de magnitud del filtro.

Como se puede comprobar en la figura 11, la imagen recuperada no es idéntica a la original, por lo cual, en el caso de este filtro, sus efectos no pueden ser revertidos completamente.

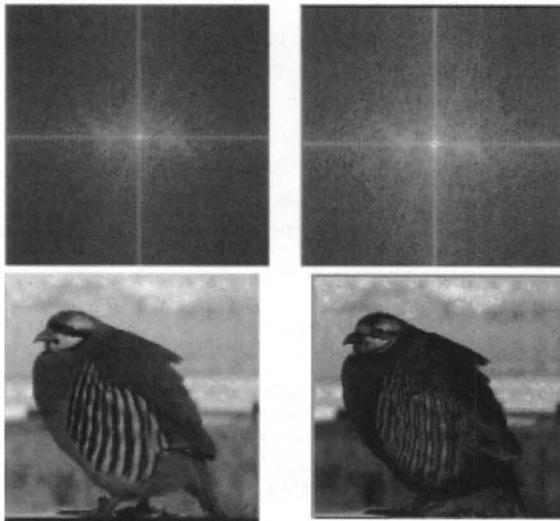


Figura 11. Arriba: espectro original (izquierda) vs. espectro restaurado (derecha); el original aparece más oscuro. Abajo: imagen original (izquierda) vs. imagen restaurada (derecha); la restaurada aparece menos contrastada y con más tendencia a tonos oscuros.

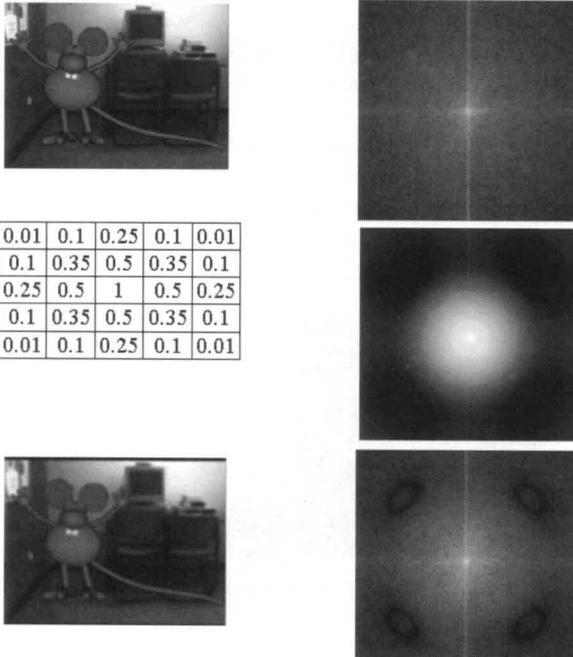


Figura 12. Proceso de filtrado. Arriba: imagen original y su respectivo espectro de magnitud. Centro: coeficientes del filtro por aplicar y su espectro de magnitud. Abajo: imagen filtrada con su espectro de magnitud.

En la figura 12 se muestra un segundo ejemplo del proceso de filtrado. Como puede observarse, el filtro aplicado es un pasabajos, por lo cual la imagen filtrada presentará pérdida o disminución de los detalles correspondientes a las frecuencias

espaciales altas (bordes y detalles finos). Así, el espectro de magnitud de la imagen filtrada presenta tonos oscuros en las zonas correspondientes a este tipo de frecuencias, y la imagen vista en el dominio del espacio se ve borrosa (o desenfocada).

El tercer ejemplo (figura 13) muestra el proceso de filtrado, esta vez usando como filtro otra imagen. Este tipo de proceso puede ser útil para la encriptación de datos en imágenes, dado que en la mayoría de los casos puede ser revertido en su totalidad.

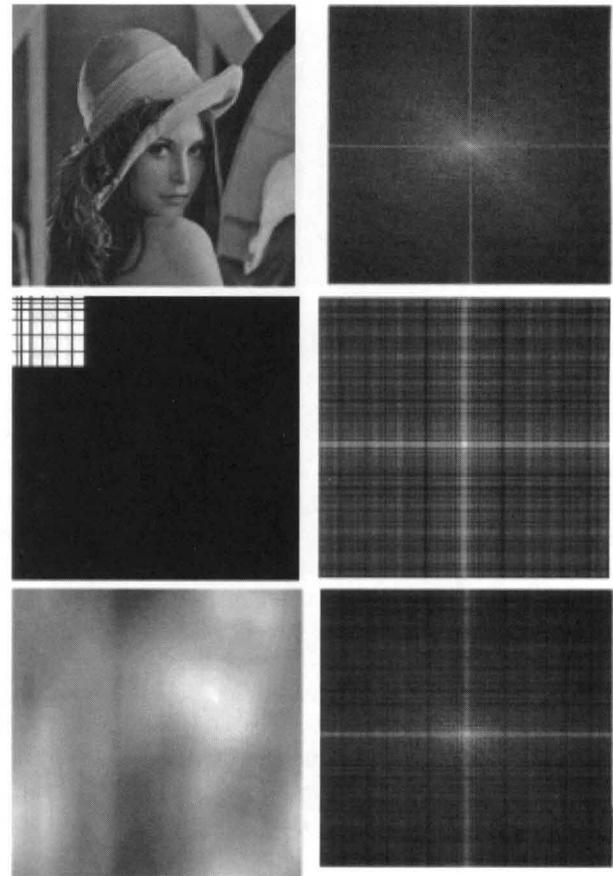


Figura 13. Proceso de filtrado. Arriba: imagen original y su respectivo espectro de magnitud. Centro: imagen del filtro por aplicar y su espectro de magnitud. Abajo: imagen filtrada.

En el caso de la figura 13, la imagen filtrada es irreconocible, dado que por el tipo de filtro empleado se han perdido o atenuado detalles correspondientes tanto a frecuencias altas como bajas. Con un poco de esfuerzo visual, se alcanza a percibir el contorno de la modelo. Para este caso específico, el efecto del filtro es revertible como puede observarse en la figura 14.

Los resultados fueron obtenidos sobre una aplicación desarrollada en lenguaje C++, usando la herramienta Borland C++ Builder 3.0, en un equipo Pentium MMX, de 166MHz. El algoritmo usado para implementar la transformada de Fourier discreta se conoce como *decimation in time* [3].

BIBLIOGRAFÍA

1. JENSEN, J., *Introductory Digital Image Processing: A remote sensing perspective*, Prentice Hall, 1996.
2. KREYSZIG, E., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Limusa Noriega Editores, 1996, Vol II.
3. OPPENHEIM, A., *Discrete Time Signal Processing*, Prentice Hall, 1993.
4. PARKER, J., *Algorithms for image processing and computer vision*, Wiley Computer Publishing, 1997.

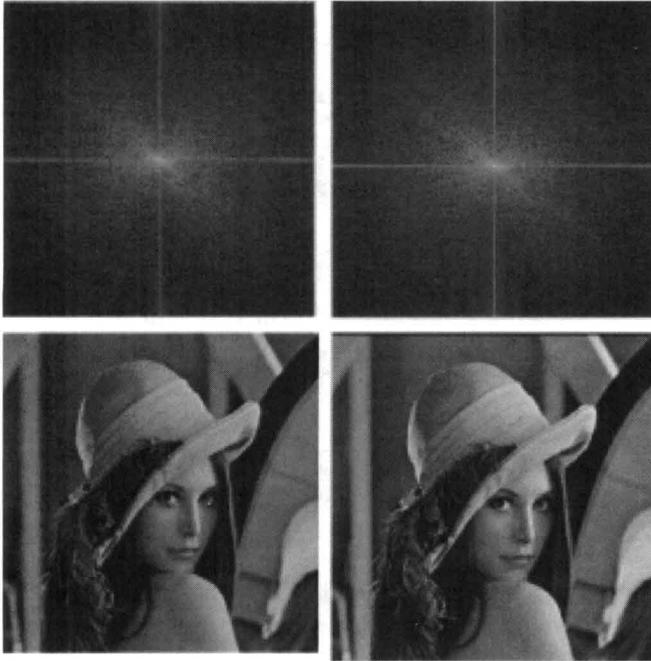


Figura 14. Arriba: espectro original (izquierda) vs. espectro restaurado (derecha). Abajo: imagen original (izquierda) vs. imagen restaurada (derecha). Las imágenes son idénticas, por lo cual el efecto del filtro definido por la imagen central de la figura 13 es reversible.

CONCLUSIONES

A partir del trabajo realizado se observa que es posible determinar de antemano el efecto que tiene una máscara de convolución sobre la imagen que se desea tratar con base en el análisis en el dominio de la frecuencia, usando la transformada de Fourier. Además, un proceso de filtrado es reversible sólo para cierta clase de filtros, y en tal caso pueden ser empleados en la encriptación de imágenes.