

# Un método no gráfico en diseño de mezclas de concreto.

Héctor Manuel Mora Escobar  
Matemático, Ingeniero Civil, U. N.

D.E.A., Docteur 3<sup>o</sup> Cycle en Matemáticas Aplicadas  
Université de Nancy I, Francia  
Profesor Asociado, Dpto. Matemáticas y Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

## INTRODUCCION

Usualmente para el diseño de mezclas de dos (algunas veces tres) materiales es necesario efectuar los siguientes pasos:

- 1) obtener las granulometrías de los materiales.
- 2) con base en estas granulometrías definir una granulometría ideal para la mezcla.
- 3) por un método gráfico obtener los porcentajes de los materiales que den la granulometría de la mezcla "más semejante" a la ideal.

En este artículo se presenta un método que busca directamente, en el tercer paso, la granulometría

más parecida a la ideal.

Aquí se presenta como granulometría ideal la proporcionada por la curva de Fuller, que es tal vez la más usada. Sin embargo, el método propuesto se puede utilizar para cualquier granulometría ideal.

## NOTACION Y DESCRIPCIONES PREVIAS

$N$  : número de tamices usados en una granulometría.

$n$  : número de tamices usados para la granulometría ideal.

$T_i$  : tamiz  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$

$d_i$  : tamaño de los orificios del tamiz  $i$   
 $d_i > d_{i+1}$   $i = 1, 2, \dots, N-1$

Los valores de  $N$  y  $n$  pueden ser diferentes. Por ejemplo, generalmente se usa en las granulometrías el tamiz denominado No. 200. En particular, es deseable que el porcentaje que pasa este tamiz sea mejor que el 3 o 5%, pero este tamiz no se tiene en cuenta para la granulometría ideal de Fuller ni para las comparaciones con ésta. Para no recargar la notación se utilizará en este artículo únicamente  $n = \text{número de tamices}$ .

La granulometría de un material consiste simplemente en los  $n$  porcentajes de material que pasan cada uno de los tamices, o sea, una granulometría se puede representar por un vector,  $g$ , de  $n$ , componentes:

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 \leq g_i \leq 100$$

$$g_i \geq g_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Si hay dos materiales, llamados agregados gruesos y agregados finos, sean sus granulometrías:

$$g = (g_1, \dots, g_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n)$$

Para los agregados gruesos se define el tamaño máximo como el tamaño del tamiz inmediatamente superior al mayor tamiz que deja pasar menos de 85%, es decir, si  $g_k < 85, g_{k-1} \geq 85$ , se define el tamaño máximo como  $D = d_{k-1}$ .

Se acostumbra a usar la granulometría dada por la curva de Fuller como granulometría ideal:

$$a_i = 100 \sqrt{\frac{d_i}{D}} \quad \text{si } d_i \leq D$$

$$a_i = 100 \quad \text{si } d_i > D$$

Si se denota por  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  la granulometría de la mezcla de agregados gruesos y de agregados finos y por  $p$  el porcentaje de agregados finos de la

mezcla (entonces  $100-p$  es el porcentaje de agregados gruesos) los valores de la granulometría de la mezcla se calculan fácilmente:

$$b_i = b_i(p) = \frac{p f_i + (100 - p) g_i}{100}$$

Se desea entonces que la granulometría  $b(p) = b = (b_1, \dots, b_n)$  sea muy parecida a la granulometría ideal  $a = (a_1, \dots, a_n)$  o en el mejor de los casos que las dos granulometrías sean iguales.

**EXPRESION ANALITICA DEL METODO GRAFICO**

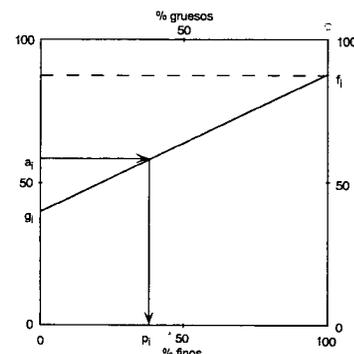
En el método gráfico, Fig. 1, al trazar el segmento de recta para cada tamiz  $T_i$  y buscar allí el valor  $a_i$  lo que se hace simplemente es obtener el porcentaje  $p_i$  para el cual

$$b_i = b_i(p_i) = a_i$$

$$(p_i f_i + (100-p_i) g_i)/100 = a_i$$

$$p_i = \frac{a_i - g_i}{f_i - g_i} \cdot 100 \quad \text{si } f_i \neq g_i$$

$p_i = \text{cualquier valor si } f_i = g_i = a_i$   
 $p_i \text{ no se puede obtener si } f_i = g_i \neq a_i$



**Figura 1.**

El caso  $f_i = g_i$  se presenta especialmente para los primeros tamices para los cuales frecuentemente  $f_i = g_i = 100$

El porcentaje óptimo del método gráfico  $\bar{p}$  (recta vertical que reparte equilibradamente los puntos a lado y lado, SANDINO pág. 55) se puede suponer que es semejante al promedio de los valores  $p_i$  para los que  $f_i \neq g_i$ , despreciando algunos valores, por ejemplo, los valores menores que cero o mayores que cien, o los "muy alejados" (por ejemplo a más de dos desviaciones estándares). Obviamente, para que la mezcla sea adecuada se requiere que no haya puntos muy alejados de  $\bar{p}$ , o dicho de otra forma, que la varianza (o la desviación estándar) sea pequeña.

### UN ENFOQUE MAS DIRECTO

Para medir el grado de disimilitud o de diferencia entre dos vectores  $x, y$  de  $\mathbb{R}^n$  se utiliza el concepto de distancia, que es simplemente la generalización y abstracción de la distancia usual entre dos puntos en el plano o en el espacio. Una distancia es una función  $\delta$  con las siguientes características:

$$\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\delta(x, y) \geq 0$$

$$\delta(x, y) = 0 \text{ si y solamente si } x = y$$

$$\delta(x, y) = \delta(y, x) \text{ simetría de la distancia}$$

$$\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) \text{ desigualdad triangular}$$

Hay muchas funciones que cumplen las propiedades de distancia, entre éstas las más usadas son:

$$\delta_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\delta_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \text{ distancia euclideana usual}$$

$$\delta_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i| \text{ distancia del máximo}$$

o cualquier múltiplo positivo de ellas, por ejemplo,

$$\frac{\delta_1(x, y)}{n}$$

También es frecuente utilizar  $\delta_2^2(x, y) = (\delta_2(x, y))^2$  por las ventajas que presenta, principalmente: derivabilidad, facilidad de manejo,....

Por ejemplo, si

$$x = (1, 2, 3, 4), y = (2, -2, 1, -1)$$

$$\delta_1(x, y) = 12; \delta_2(x, y) = \sqrt{46}; \delta_\infty(x, y) = 5;$$

$$\delta_2^2(x, y) = 46$$

En términos de distancia el problema de obtener el porcentaje óptimo de la mezcla se puede expresar como la búsqueda del porcentaje  $p^*$  tal que se minimice la distancia entre las granulometrías  $a$  y  $b$ :

$$\text{minimizar } \delta(b, a) = \delta(b(p), a)$$

$$0 \leq p \leq 100$$

Es decir, se trata de minimizar una función de la variable  $p$  en el intervalo  $[0, 100]$ . Este es un problema típico de programación no lineal en una variable para el cual existen varios métodos, algunos utilizan derivados, otros no; algunos son muy sencillos aunque no muy rápidos; otros son más complejos y generalmente más eficientes. Algunos de los métodos de programación no lineal en una variable son: búsqueda secuencial, sección dorada, Fibonacci, Newton, secante.

Casi todos estos métodos son iterativos y para su efectiva utilización se requiere el uso de una calculadora programable o un microcomputador. La escogencia de un método conlleva siempre un balance entre sencillez (menos tiempo de programación) y la rapidez durante la ejecución.

La popularidad del método gráfico está basada en la ausencia de cálculos y operaciones, razón importantísima cuando no existían ni siquiera calculadoras de bolsillo. Requiere el uso de papel milimetrado, trazar las rectas correspondientes a los

tamices, señalar los puntos correspondientes a la granulometría ideal y finalmente buscar (subjetivamente) un valor de  $\bar{p}$  adecuado. Su posible debilidad está dada por el hecho de que no está encaminado directamente a buscar la mezcla con granulometría más parecida a la ideal y además tiene una parte de subjetividad.

Si directamente se busca la mezcla con granulometría más parecida a la ideal utilizando métodos de programación no lineal, se requiere cierto tiempo inicial para "programar" el método escogido. Pero una vez hecho esto, únicamente hay que entrar los datos, esperar algunos segundos los resultados del porcentaje óptimo de  $p^*$ , la granulometría de la mezcla y algunos indicadores de la semejanza entre la granulometría de la mezcla y la granulometría ideal, que permitan aceptar o rechazar la mezcla (y al mismo tiempo los materiales finos y los gruesos).

El método más sencillo (aunque lento) para buscar el minimizador de una función (punto o valor para el cual la función toma el valor mínimo) en un intervalo es el de búsqueda casi exhaustiva, que consiste simplemente en calcular para muchos valores de la variable el valor de la función y escoger el valor de la variable que da un menor valor de la función.

Una vez escogida la función distancia  $\delta$  que se va a utilizar, el esquema del método de búsqueda casi exhaustiva es el siguiente:

datos:  $f, g, a, n, \epsilon$  (precisión deseada, por ejemplo,  $\epsilon = 1$ )

$d_{min} = n \cdot 100$

$p^* = 0$

para  $p = 0$  hasta  $100$  con incremento  $\epsilon$  hacer calcular  $b$  granulometría de la mezcla para el porcentaje  $p$

$d = \delta(a, b)$

si  $d < d_{min}$  entonces

$d_{min} = d$

$p^* = p$

fin si

fin p

calcular  $b$  granulometría de la mezcla para el porcentaje  $p^*$

El algoritmo anterior se puede utilizar para cualquier distancia  $\delta$ .

### CASO CUADRÁTICO

Si se escoge como distancia  $\delta_2$ , el minimizador  $p^*$  de  $\delta_2(a, b)$  es el mismo de  $\delta_2^2(a, b)$  y así el cálculo exacto de  $p^*$  se puede hacer más fácilmente:

$$\delta_2^2(a, b) = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ a_i - \frac{p f_i + (100 - p) g_i}{100} \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{g_i - f_i}{100} p + a_i - g_i \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i}{100} p + v_i \right)^2$$

donde  $u_i = g_i - f_i$   
 $v_i = a_i - g_i$

$$\frac{d}{dp} \delta_2^2(a, b) = \sum_{i=1}^n \frac{2}{100} \left( \frac{u_i}{100} p + v_i \right) u_i = 0$$

$$p^* = -100 \frac{\sum u_i v_i}{\sum u_i^2}$$

Como  $\delta_2^2(a, b)$  siempre es una parábola cóncava hacia arriba, este valor de  $p^*$  siempre corresponde a un minimizador. El único caso, casi imposible, en que no está definido el valor de  $p^*$  es cuando  $\sum u_i^2 = 0$ , es decir, cuando  $f_i = g_i$  para todos los valores de  $i$ , o sea, cuando los finos y los gruesos tienen exactamente la misma granulometría.

Si el valor de  $p^*$  resultara negativo habría que tomar  $p^* = 0$ ; si el valor de  $p^*$  resultara mayor que 100 habría que tomar  $p^* = 100$ . Ambos casos corresponden a granulometrías inadecuadas para mezclarlas ya que uno solo de los dos materiales tiene una granulometría más a la ideal que la mezcla misma.

**ALGUNOS RESULTADOS NUMERICOS**

Con el fin de poder hacer algunas comparaciones se construyeron aleatoriamente granulometrías de finos y gruesos que cumplían ciertas especificaciones (SANDINO pág. 30, 31, 44). Además se simuló el método gráfico en la forma presentada anteriormente en la parte correspondiente a su expresión analítica. Para las distancias  $\delta_1, \delta_\infty$  se utilizó el método de búsqueda casi exhaustiva con una precisión  $\epsilon = 1$ . Para la distancia  $\delta_2$  el cálculo de  $p^*$  se hizo de forma exacta por medio de la fórmula. En total se simularon 100 pares de granulometrías de finos y de gruesos. Para cada par de granulometrías, una vez hallados los 4 valores óptimos  $p_g^*, p_1^*, p_2^*, p_\infty^*$ , (correspondientes a los porcentajes óptimos para el método gráfico y para las distancias  $\delta_1, \delta_2, \delta_\infty$ ) se calcularon las 3 distancias entre la granulometría

óptima de la mezcla  $b$  y la granulometría ideal  $a$ , es decir:  $\delta_1(a, b(p_g^*)), \delta_2(a, b(p_g^*)), \delta_\infty(a, b(p_g^*)), \dots, \delta_\infty(a, b(p_\infty^*))$ . La Tabla 1 muestra los promedios de estas distancias.

	$\overline{\delta_1(a, b(p^*))}$	$\overline{\delta_2(a, b(p^*))}$	$\overline{\delta_\infty(a, b(p^*))}$
met. gráfico	52.9	20.1	12.1
min $\delta_1(a, b)$	<b>48.5</b>	18.7	11.3
min $\delta_2(a, b)$	49.6	<b>18.2</b>	10.1
min $\delta_\infty(a, b)$	50.5	18.5	<b>9.5</b>

Tabla No. 1.

Como es lógico, cuando se minimiza  $\delta_k(a, b(p))$  la granulometría óptima obtenida  $b$  debe estar más cerca de la granulometría ideal  $a$  según la distancia  $\delta_k$  que las granulometrías óptimas obtenidas minimizando otras distancias.

La granulometría obtenida por el método gráfico presenta menor semejanza a la granulometría ideal que las obtenidas por criterios más directos.

La fórmula exacta utilizada para el caso cuadrático lo convierte en el más rápido. Para las otras dos minimizaciones, en lugar de hacer una búsqueda casi exhaustiva, se pueden utilizar métodos más eficientes de programación no lineal.

**UN EJEMPLO UN POCO EXTREMO**

Este ejemplo, resumido en la Tabla 2, presenta dos materiales, finos y gruesos, sus granulometrías, la granulometría ideal según la curva de Fuller, los valores  $p_i$  del método gráfico, los porcentajes óptimos y las granulometrías de las mezclas óptimas

según el método gráfico y según la minimización de  $\delta_1(b, a)$ ,  $\delta_2(b, a)$ ,  $\delta_\infty(b, a)$ . También aparecen, para cada granulometría óptima los valores  $\delta_1(b^*, a)$ ,  $\delta_2(b^*, a)$ ,  $\delta_\infty(b^*, a)$ . La desviación estándar de los valores  $p_i$  del método gráfico es 18.4.

			met.gr. $\delta_1(b, a)$ $\delta_2(b, a)$ $\delta_\infty(b, a)$				
$p^*$ = porcentaje óptimo de finos			48.8	38.0	37.9	38.0	
finos	gruesos	Fuller	$p_i$	$b(p^*_g)$	$b(p^*_g)$	$b(p^*_{i'})$	$b(p^*_{\infty})$
100.0	100.0	100.0		100.0	100.0	100.0	100.0
100.0	100.0	100.0		100.0	100.0	100.0	100.0
100.0	96.3	100.0		98.1	97.7	97.7	97.7
100.0	65.6	86.6	61.1	82.4	78.7	78.6	78.7
100.0	45.7	70.7	46.1	72.2	66.3	66.3	66.3
100.0	32.9	61.2	42.2	65.6	58.4	58.3	58.4
99.5	8.5	43.2	38.2	52.9	43.1	43.0	43.1
87.9	1.1	30.6	34.0	43.3	34.1	34.0	34.1
62.8	0.0	21.7	34.5	30.6	23.9	23.8	23.9
59.5	0.0	15.2	25.6	29.0	22.6	22.5	22.6
13.7	0.0	10.8	79.0	6.7	5.5	5.2	5.2
9.8	0.0	7.7	78.4	4.8	3.7	3.7	3.7
$\delta_1(b^*, a)$ :			64.2	40.2	40.3	40.2	
$\delta_2(b^*, a)$ :			24.4	14.6	14.6	14.6	
$\delta_\infty(b^*, a)$ :			13.8	7.9	8.0	7.9	

Tabla 2.

Los resultados de los porcentajes óptimos obtenidos por la minimización de las diferentes distancias tienen valores semejantes. El porcentaje de finos obtenido por el método gráfico presenta una diferencia de un 10%. Al comparar las granulometrías óptimas de cada método con la granulometría dada por la curva de Fuller, se observa que la granulometría del método gráfico es la que presenta mayores distancias.

**MEZCLA DE TRES MATERIALES**

Si hay tres materiales, por ejemplo, arena, gravilla y piedra, y sus granulometrías son  $f, g, h$  respectivamente, se trata entonces de encontrar  $p$ : porcentaje

de finos (arena) y  $q$ : porcentaje de gravilla (el porcentaje de piedra es  $100-p-q$ ) para que  $b$  la granulometría de la mezcla de los tres materiales, sea la más parecida a la granulometría ideal  $a$ . La granulometría de la mezcla se obtiene mediante la fórmula:

$$b_i = b_i(p, q) = \frac{p f_i + q g_i + (100-p-q) h_i}{100}$$

Obviamente los valores  $p, q$  no pueden ser negativos y además su suma no puede ser superior a 100. De nuevo se tiene un problema de programación no lineal pero esta vez con dos variables:  $p, q$ .

$$\begin{aligned} \min \delta(b(p, q), a) \\ p + q \leq 100 \\ p, q \geq 0 \end{aligned}$$

Los métodos para varias variables son un poco más complejos. Entre los más sencillos (aunque no muy rápido) está la combinación de la búsqueda casi exhaustiva y el método cíclico coordinado.

datos:  $f, g, h, a, n, \epsilon$  (precisión deseada, por ejemplo,  $\epsilon = 1$ )  
 $p^* = 30, q^* = 30$  (u otros valores factibles)

hasta que no haya cambios en  $p^*$  ni en  $q^*$  hacer  
 $d_{min} = n * 100$

para  $p = 0$  hasta  $100-q^*$  con incremento  $\epsilon$  hacer  
 calcular  $b$  granulometría de la mezcla para los porcentajes  $p, q^*$

$$d = \delta(a, b)$$

si  $d < d_{min}$  entonces  $d_{min} = d, p' = p$

fin  $p$

$$p^* = p'$$

$$d_{min} = n * 100$$

para  $q = 0$  hasta  $100-p^*$  con incremento  $\epsilon$  hacer calcular  $b$  granulometría de la mezcla para los porcentajes  $p^*$ ,  $q$

$$d = \delta(a, b)$$

si  $d < d_{min}$  entonces  $d_{min} = d$ ,  $q' = q$

fin  $q$

$$q^* = q'$$

fin hasta que

calcular  $b$  granulometría de la mezcla para los porcentajes  $p^*$ ,  $q^*$

#### CASO CUADRATICO PARA TRES MATERIALES

$$\delta_2^2(a, b) = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ a_i - \frac{p f_i + q g_i + (100-p-q) h_i}{100} \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{h_i - f_i}{100} p + \frac{h_i - g_i}{100} q + \frac{100(a_i - h_i)}{100} \right]^2$$

$$= 10^{-4} \sum_{i=1}^n (u_i p + v_i q + 100 w_i)^2$$

donde  $u_i = h_i - f_i$

$$v_i = h_i - g_i$$

$$w_i = a_i - h_i$$

el anterior es un problema de mínimos cuadrados

con  $n$  ecuaciones y dos variables. Al resolverlo se tiene:

$$c = \frac{-100}{\sum u_i^2 \sum v_i^2 - (\sum u_i v_i)^2}$$

$$p^* = c ((\sum u_i w_i) (\sum v_i^2) - (\sum v_i w_i) (\sum u_i v_i))$$

$$q^* = c ((\sum v_i w_i) (\sum u_i^2) - (\sum u_i w_i) (\sum u_i v_i))$$

Las fórmulas anteriores no han utilizado las restricciones sobre  $p$ ,  $q$ . Si  $p$  o  $q$  son negativos o si su suma es mayor que 100 se podrían modificar para cumplir las restricciones. Sin embargo esto, posiblemente, indica que los materiales no son adecuados para mezclarse.

#### CONCLUSIONES

El método propuesto, por ser más directo, da como resultado una granulometría más parecida a la ideal que la obtenida en el método gráfico.

Una vez hecho el programa, la obtención de  $p^*$  es mucho más rápida que en el método gráfico en papel.

Obviamente también se puede hacer un programa que efectúe numéricamente el método gráfico o que lo realice gráficamente en la pantalla de un microcomputador para poder "ver" los resultados y escoger "a ojo" el valor óptimo  $p^*$ .

En el caso de tres materiales se obtienen, en un solo paso, los valores  $p^*$  y  $q^*$ . En el método gráfico es necesario efectuar dos veces el proceso.

Sería necesario realizar ensayos de laboratorio para obtener experiencia para poder escoger la distancia  $\delta$  que proporciona los mejores resultados prácticos y, por otra parte, determinar los criterios que permitan aceptar o rechazar una granulometría óptima (la más parecida a la ideal) aceptando o rechazando entonces los materiales.

**REFERENCIAS**

SANDINO PARDO A., "Hormigón", Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

BAZARAA, M. S., SHETTY, C. M. "Nonlinear Programming, Theory and Algorithms", Wiley, New York, 1979.

# INGENIERIA E INVESTIGACION

Revista de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Santafé de Bogotá, D.C.

Publicación especializada al servicio de la comunidad científica y técnica del país.

**SOLICITE TARIFAS  
PUBLICITARIAS**

PARA:

Contraportada exterior  
Contraportadas interiores  
Página interior  
Media página

Publicación trimestral

**; ANUNCIE EN ELLA!**