

En español

## Simulación numérica del comportamiento elástico del concreto reforzado con fibras cortas de acero en condición plana de esfuerzos

Fabián A. Lamus<sup>1</sup>, Manuel A. Caicedo<sup>2</sup>, Dorian L. Linero<sup>3</sup>

### RESUMEN

Este trabajo describe un modelo numérico implementado en el método de los elementos finitos (Hughes, 2000), el cual permite simular el comportamiento elástico del concreto reforzado con fibras cortas de dirección aleatoria. En estructuras hechas de dicho material cada punto está compuesto por fibras cortas de acero embebidas en una matriz de concreto simple. En el interior de un elemento finito el concreto reforzado se representa como un material ortótropo de dirección material aleatoria, basado en el modelo de fibras con diámetro despreciable (Dvorak y Bahei-el-Din, 1982) y la teoría de mezclas modificada para refuerzo de corta longitud (Oller, 2003). El análisis estadístico realizado consiste en: repetir la simulación numérica del problema cambiando la dirección de las fibras mediante una función aleatoria, construir la base de datos de muestreo a partir de los resultados obtenidos y medir la dispersión de estos últimos. A continuación, en este trabajo se estudia la sensibilidad del tamaño de los elementos finitos y del número de datos de muestreo en el cálculo de la energía total de deformación y se establecen algunos valores recomendables. Como ejemplo de aplicación se obtuvo la respuesta estructural promedio de una viga de concreto reforzado con diferentes cuantías de fibras cortas de acero, observando una dispersión mínima de los datos.

**Palabras claves:** mecánica computacional, teoría de mezclas, concreto reforzado con fibras.

Recibido: junio 23 de 2009

Aceptado: octubre 26 de 2010

### Introducción

En las últimas décadas la utilización del concreto reforzado con fibras cortas de acero (CRFC) en la construcción de obras civiles ha aumentado notoriamente debido a su comportamiento mecánico y a sus ventajas constructivas. A diferencia del concreto simple, la presencia de las fibras reduce la abertura de las

<sup>1</sup> B.Sc., Ingeniería Civil de la Universidad Industrial de Santander, M.Sc. en Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia. Estudiante del Doctorado en Ingeniería - Ciencia y Tecnología de materiales, Universidad Nacional de Colombia. Docente auxiliar, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. [falamusb@unal.edu.co](mailto:falamusb@unal.edu.co).

<sup>2</sup> B.Sc. Ingeniería Civil y M.Sc. en Estructuras, Universidad Nacional de Colombia. Estudiante del Doctorado en Análisis Estructural, Universidad Politécnica de Cataluña, España. [macaicedos@unal.edu.co](mailto:macaicedos@unal.edu.co).

<sup>3</sup> B.Sc., Ingeniería Civil y M.Sc. en Estructuras, Universidad Nacional de Colombia. Ph.D. en Análisis Estructural, Universidad Politécnica de Cataluña, España. Profesor Asistente, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. [dlineros@unal.edu.co](mailto:dlineros@unal.edu.co).

In English

## Numerical modelling of elastic behaviour of concrete reinforced with steel short fibres in plane stress conditions

Fabián A. Lamus<sup>4</sup>, Manuel A. Caicedo<sup>5</sup>, Dorian L. Linero<sup>6</sup>

### ABSTRACT

This work describes a numerical model of fibre reinforced concrete elastic behaviour implemented using the finite elements method (Hughes, 2000). In structures made of this material, each point is formed by steel fibres embedded into a simple concrete matrix. The reinforced concrete is represented inside a finite element as an orthotropic material having random material direction based on the vanishing diameter fibre model (Dvorak and Bahei-el-Din, 1982) and the mixing theory modified for short length reinforcement (Oller, 2003). Statistical analysis consisted of repeating the problem's numerical simulation where the direction of fibres was modified by a random function to set up a sampling database from the results and measure their variability. A sensitivity study of finite element size and the number of sampling data was then carried out in terms of total strain energy. Finite element size and sampling data are recommended. The average structural response of a reinforced concrete beam with different quantities of steel fibres where minimum data dispersion was observed is given as an example of applying the above.

**Keywords:** Computational mechanics, mixture theory, fibre reinforced concrete.

Received: June 23th 2009

Accepted: October 26th 2010

### Introduction

The use of steel fibre reinforced concrete (SFRC) for building structures has growth during the last few decades because of its mechanical behaviour and building advantages. Unlike plain concrete, the fibres reduce the opening of micro-cracks in concrete and increase composite mechanical resistance and ductile

<sup>4</sup> B.Sc., Civil Engineering, Universidad Industrial de Santander, Colombia. M.Sc., Structural Engineering, Universidad Nacional de Colombia. Ph.D., student in Science and Technology of Materials, Universidad Nacional de Colombia. Auxiliar profesor, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. [falamusb@unal.edu.co](mailto:falamusb@unal.edu.co).

<sup>5</sup> B.Sc., Civil Engineering. M.Sc., Structural Engineering, Universidad Nacional de Colombia, Bogota. Student Ph.D. in Structural analysis, Universidad Politécnica de Cataluña, Spain. [macaicedos@unal.edu.co](mailto:macaicedos@unal.edu.co).

<sup>6</sup> B.Sc. Civil Engineering. M.Sc., Structural Engineering, Universidad Nacional de Colombia. Ph.D., Structural Analysis, Universidad Politécnica de Cataluña, Spain. Assistant profesor, Faculty of Engineering, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. [delineros@unal.edu.co](mailto:delineros@unal.edu.co).

En español

microfisuras en el concreto y aumenta la resistencia mecánica y la ductilidad del compuesto. Asimismo, el acero de refuerzo contribuye a la resistencia al impacto, al fuego y a la abrasión (ACI, 1989; ACI, 1996; ACI, 1998). En la actualidad el uso del CRFC se extiende a la construcción de vigas, columnas, placas de entrepiso y pisos industriales en edificaciones, como también arcos y dovelas en el revestimiento de túneles, entre otros.

Los materiales reforzados presentan características diferentes con respecto a los materiales homogéneos debido a que las fibras modifican su comportamiento dependiendo de su participación volumétrica y del sentido en que se encuentren orientadas.

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico implementado en el método de los elementos finitos para simular el comportamiento mecánico del CRFC en el rango elástico, en un estado plano de esfuerzos.

### Descripción del modelo de concreto reforzado con fibras cortas

En un elemento estructural se puede suponer que el concreto reforzado con fibras cortas es un material compuesto que está constituido por fibras de acero de orientación aleatoria embebidas en una matriz homogénea de concreto simple. En la formulación del modelo se tienen las siguientes hipótesis fundamentales: 1) las fibras se distribuyen uniformemente en la matriz, 2) el comportamiento de ambos materiales es elástico y sus deformaciones son pequeñas, y 3) la adherencia entre la matriz y las fibras asegura la compatibilidad de deformaciones y la transferencia de acciones internas. Asimismo, el modelo está limitado a elementos estructurales representados mediante un estado plano de esfuerzos.

Con la aplicación de la teoría de mezclas para fibras cortas (Oller, 2003) y el modelo de fibras con diámetro despreciable (Dvorak y Bahei-el-Din, 1982) se establece que cada partícula de material compuesto contiene una fracción de participación volumétrica de la matriz  $k^{(m)}$  y de las fibras  $k^{(a)}$  con orientación definida. Lo anterior produce un comportamiento ortótropo del compuesto, cuyo eje material mayor es paralelo a la dirección de las fibras, como se indica en la Figura 1 (c).

En la dirección paralela a las fibras  $\bar{x}$  se considera que los materiales componentes constituyen un sistema en paralelo (Matthews y Rawlings, 1994), en el cual las deformaciones longitudinales del concreto  $\varepsilon_{\bar{x}}^{(c)}$  y del acero  $\varepsilon_{\bar{x}}^{(a)}$  son iguales a la deformación del compuesto  $\varepsilon_{\bar{x}}$ . Asimismo, el esfuerzo normal del compuesto  $\sigma_{\bar{x}}$  corresponde a la suma de los esfuerzos normales de los materiales componentes  $\sigma_{\bar{x}}^{(c)}, \sigma_{\bar{x}}^{(a)}$  ponderada por los coeficientes de participación volumétrica correspon-

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_{\bar{x}}^{(a)} = \varepsilon_{\bar{x}}^{(c)} \quad , \quad \sigma_{\bar{x}} = k^{(c)} \sigma_{\bar{x}}^{(c)} + k^{(a)} \sigma_{\bar{x}}^{(a)} \quad (1)$$

dientes, es decir:

In English

ity. Steel reinforcement contributes towards resistance to impact, fire and abrasion (ACI, 1989; ACI, 1996; ACI 1998). SFRC is currently used for building beams, columns, plates and industrial floors, likewise in arches and segments in tunnel coating.

The reinforced materials have different features compared to homogeneous materials because the fibres' behaviour is modified according to their volumetric ratio and the direction in which they are orientated.

This paper presents a numerical model based on the finite elements method for simulating SFRC mechanical behaviour in the elastic range for plane stress.

### Description of model for concrete reinforced with short fibres

It can be supposed that SFRC in a structural element is a material consisting of steel fibres with random directions embedded in a plain concrete homogenous matrix. Model formulation took the following fundamental hypotheses into account: fibres are evenly distributed in the matrix, both materials' behaviour is elastic and their strains are small and adherence between matrix and fibres guarantees strain compatibility and internal action transfer. The model was limited to structural elements represented by plane stress.

By applying the short fibres mixture theory (Oller 2003) and the vanished diameter fibre model (Dvorak and Bahei-el-Din, 1982) it was established that each particle of composed material had a volumetric ratio of matrix  $k^{(m)}$  and fibres  $k^{(a)}$  with definite orientation. The latter produced composite orthotropic behaviour where the material's major axis was parallel to the fibres' direction (as indicated in Figure 1(c)).

A parallel system formed by material components was considered in the direction parallel to fibres  $\bar{x}$  (Matthews and Rawlings, 1994), where longitudinal concrete strains  $\varepsilon_{\bar{x}}^{(c)}$  and steel  $\varepsilon_{\bar{x}}^{(a)}$  were equal to composite strain  $\varepsilon_{\bar{x}}$ . Likewise, normal stress in composite  $\sigma_{\bar{x}}$  was the sum of normal stresses from component materials weighted by respective volumetric ratios, i.e.

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_{\bar{x}}^{(a)} = \varepsilon_{\bar{x}}^{(c)} \quad , \quad \sigma_{\bar{x}} = k^{(c)} \sigma_{\bar{x}}^{(c)} + k^{(a)} \sigma_{\bar{x}}^{(a)} \quad (1)$$

En Español

In English

Donde los coeficientes de participación volumétrica del acero y del concreto,  $k^{(a)}$  y  $k^{(c)}$  respectivamente, se calculan como los cocientes entre el volumen de cada uno de los componentes y el volumen total del material compuesto:

$$k^{(c)} = \frac{V^{(c)}}{V^{(c)} + V^{(a)}} , \quad k^{(a)} = \frac{V^{(a)}}{V^{(c)} + V^{(a)}} \quad (2)$$

Si el material es lineal elástico el módulo de elasticidad para el material compuesto en la dirección paralela a las fibras  $E_{\bar{x}}$ , en términos del módulo de Young del concreto  $E^{(c)}$  y del acero  $E^{(a)}$  es igual a:

$$E_{\bar{x}} = k^{(c)} E^{(c)} + k^{(a)} E^{(a)} \quad (3)$$

where steel and concrete volumetric ratios  $k^{(a)}$  and  $k^{(c)}$  respectively, were calculated as the volume of each component divide by the composite material's total volume:

$$k^{(c)} = \frac{V^{(c)}}{V^{(c)} + V^{(a)}} , \quad k^{(a)} = \frac{V^{(a)}}{V^{(c)} + V^{(a)}} \quad (2)$$

When material was linear elastic, the elasticity modulus for the composite material in the parallel direction to fibres  $E_{\bar{x}}$ , in terms of Young modulus for concrete  $E^{(c)}$  and Young modulus for steel  $E^{(a)}$  was:

$$E_{\bar{x}} = k^{(c)} E^{(c)} + k^{(a)} E^{(a)} \quad (3)$$

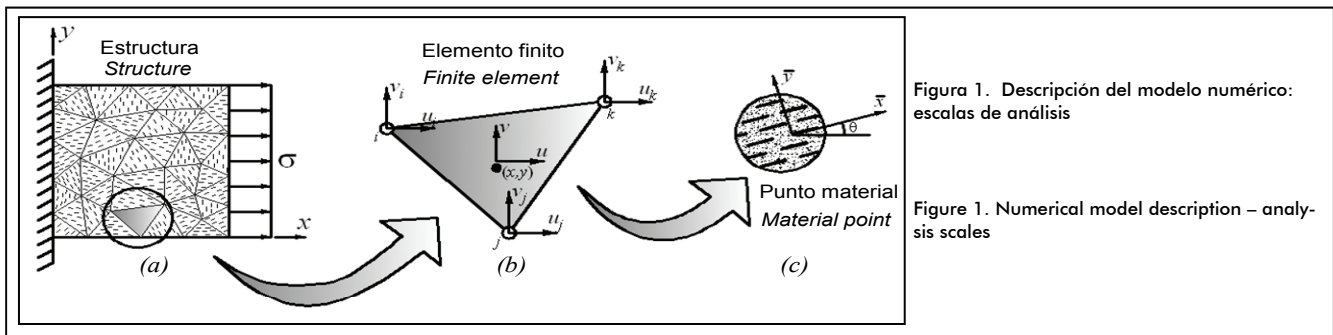


Figura 1. Descripción del modelo numérico: escalas de análisis

Figure 1. Numerical model description - analysis scales

Para materiales reforzados con fibras de diámetro mucho menor que su longitud se puede aplicar el modelo de la fibra con diámetro despreciable, el cual simplifica el aporte mecánico de la fibra a su capacidad axial (Dvorak y Bahei-el-Din, 1982). En consecuencia, el módulo de elasticidad perpendicular a la fibra y la relación de Poisson del material compuesto son aproximadamente iguales al módulo de elasticidad y a la relación de Poisson de la matriz de concreto respectivamente, como se indica a continuación:

$$E_{\bar{y}} \cong E^{(c)} , \quad \nu_{\bar{x}\bar{y}} \cong \nu^{(c)} \quad (4)$$

For reinforced material with fibres where diameters were smaller than their lengths, the vanished diameter fibres model could be applied. Mechanical fibre contribution was thus simplified to longitudinal capacity (Dvorak and Bahei-el-Din, 1982). Consequently, the elasticity modulus perpendicular to the fibre and the Poisson's ratio of the composite material were approximately equal to the elasticity modulus and to Poisson's ratio of concrete matrix respectively, as shown below:

$$E_{\bar{y}} \cong E^{(c)} , \quad \nu_{\bar{x}\bar{y}} \cong \nu^{(c)} \quad (4)$$

La ecuación (1) considera que el esfuerzo normal en las fibras es uniforme a lo largo de su eje; sin embargo, en materiales reforzados con fibras cortas esta apreciación no es completamente válida. En un material compuesto solicitado a esfuerzos normales paralelos a la fibra (figura 2 (a)), la matriz y la fibra experimentan deformaciones longitudinales diferentes alrededor de los extremos de la fibra (Matthews y Rawlings, 1994). En consecuencia, el esfuerzo normal de la fibra varía, como se muestra en la Figura 2 (b), y aparece un esfuerzo cortante en la interfaz fibra-matriz.

Equation (1) considered that normal stress in the fibres was uniform along its axis; however, in materials reinforced with short fibres such assessment was not entirely true. In a composed material subjected to normal stresses in the direction parallel to the fibres (Figure 2(a)), both the fibre and matrix were subjected to unequal longitudinal strains around the ends of the fibres (Matthews and Rawlings,1994). Consequently, the normal stress changed in the fibre, as shown in Figure 2(b), and a shear stress appeared in the fibre-matrix interface.

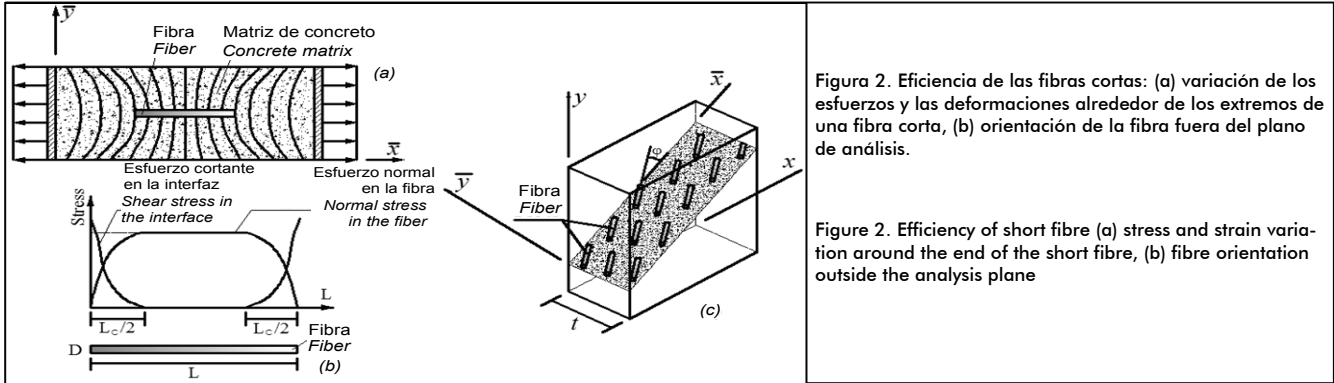


Figura 2. Eficiencia de las fibras cortas: (a) variación de los esfuerzos y las deformaciones alrededor de los extremos de una fibra corta, (b) orientación de la fibra fuera del plano de análisis.

Figure 2. Efficiency of short fibre (a) stress and strain variation around the end of the short fibre, (b) fibre orientation outside the analysis plane

El esfuerzo normal en la fibra es cero en sus extremos y aumenta hasta un valor máximo a una distancia  $l_c/2$ . A partir de esta distancia a los extremos de la fibra el esfuerzo normal se conserva constante. Por lo tanto  $l_c$  corresponde a la longitud de la fibra necesaria para que el esfuerzo normal adquiera un valor máximo constante. Ésta longitud crítica  $l_c$  se determina igualando la fuerza cortante desarrollada en la interfaz  $F_{si}$  y la fuerza de tensión en la fibra cuando ésta alcanza el esfuerzo de falla  $F_{nf}$ , de la forma:

$$F_{nf} = \hat{\sigma}_{TA} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \quad (5)$$

$$F_{si} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot \frac{l_c}{2} \quad (6)$$

$$l_c = \frac{\hat{\sigma}_{TA} \cdot D}{2 \cdot \tau} \quad (7)$$

donde  $\tau$  es el cortante actuante sobre la superficie de la fibra cuando ésta se encuentra sometida a la tensión de falla,  $\hat{\sigma}_{TA}$  es la resistencia de la fibra y  $D$  es su diámetro.

Debido a la variación del esfuerzo normal y la deformación longitudinal cerca de sus extremos, la fibra corta aporta menos a la rigidez del compuesto que la fibra continua. Este fenómeno se representa mediante un factor de eficiencia  $0 < \eta_L < 1$  que multiplica al módulo de elasticidad del acero de la forma:

donde  $L$ ,  $D$  y  $R$  corresponden a la longitud, el diámetro y la

$$\eta_L = 1 - \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{8G^{(c)}}{E^{(a)}D^2 \log(2R/D)}} \right)^{-1} \tanh \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{8G^{(c)}}{E^{(a)}D^2 \log(2R/D)}} \right) \quad (8)$$

separación de las fibras, mientras que  $G^{(c)} = E^{(c)}/2(1+\nu^{(c)})$

Normal stress in the fibre was zero at the ends and reached maximum value at distance  $l_c/2$ . Normal stress was kept constant from this distance to the ends of the fibre. Therefore  $l_c$  was the fibre length required to keep normal stress maximum and constant. This critical length  $l_c$  was estimated for equating shear force developed in interface  $F_{si}$  and tensile force in the fibre when it reached normal failure stress  $F_{nf}$ , so that:

$$F_{nf} = \hat{\sigma}_{TA} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \quad (5)$$

$$F_{si} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot \frac{l_c}{2} \quad (6)$$

$$l_c = \frac{\hat{\sigma}_{TA} \cdot D}{2 \cdot \tau} \quad (7)$$

where

$\tau$  was shear stress on fibre surface when subjected to failure stress,  $\hat{\sigma}_{TA}$  was fibre strength and  $D$  was fibre diameter.

Short fibre contribution to composite material stiffness was less than continuous fibre contribution due to variation in normal stress and longitudinal strain near to its ends. This phenomenon was represented by efficient factor  $0 < \eta_L < 1$  affecting the steel elasticity modulus, thus:

where  $L$ ,  $D$  and  $R$  were fibre length, diameter and spacing while

$G^{(c)} = E^{(c)}/2(1+\nu^{(c)})$  was the shear elasticity modulus of

$$\eta_L = 1 - \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{8G^{(c)}}{E^{(a)}D^2 \log(2R/D)}} \right)^{-1} \tanh \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{8G^{(c)}}{E^{(a)}D^2 \log(2R/D)}} \right) \quad (8)$$

es el módulo de elasticidad a cortante del concreto.

Por otra parte, la simplificación del problema tridimensional a una condición plana de esfuerzos limita el carácter aleatorio de la orientación de las fibras al plano de análisis. Sin embargo, mediante otro factor de eficiencia  $\eta_\varphi$  se puede incluir la orientación de la fibra fuera del plano.

Como se indica en la figura 2 (c), el eje longitudinal de la fibra tiene una orientación aleatoria  $\varphi$  respecto al plano material  $\bar{x}\bar{y}$ , de manera que el aporte de su módulo de elasticidad al material compuesto en el plano de análisis es igual a  $E^{(a)} \cos \varphi$ . Por lo tanto, el factor de eficiencia debido a la orientación  $0 < \eta_\varphi < 1$  puede calcularse como:

$$\eta_\varphi = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \varphi \rightarrow \eta_\varphi = \frac{2}{\alpha} \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad (9)$$

donde  $\alpha$  está en el rango de valores que puede tomar la orientación  $\varphi$ .

Si la longitud de la fibra,  $L$ , es menor que el espesor del elemento, la fibra podrá tomar una orientación entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  determinando así un rango de ángulos  $\alpha$  igual a  $\pi$ . En caso contrario, si el espesor del elemento es menor que la longitud de la fibra, la orientación de esta última podrá tomar valores sólo entre  $-\beta$  y  $\beta$  y  $\alpha$  será igual a  $2\beta$ , siendo  $\beta = \arcsin(t/L)$  y  $t$  el espesor del sólido.

El módulo de elasticidad del material reforzado con fibras cortas en la dirección  $\bar{x}$  se obtiene como una modificación de la ecuación (3) de la teoría de mezclas, así:

$$E_{\bar{x}} = k^{(c)} E^{(c)} + \eta_L \eta_\varphi k^{(a)} E^{(a)} \quad (10)$$

Un material ortótropo cuenta con propiedades mecánicas diferentes en las tres direcciones ortogonales entre sí que conforman un sistema coordinado propio del material, como se indica la figura 1 (c). En condición plana de esfuerzos los ejes coordenados  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  corresponden a la dirección paralela y perpendicular a la fibra respectivamente, las cuales forman un ángulo  $\theta$  con respecto a los ejes coordenados globales  $x$  y  $y$ .

La ecuación constitutiva de un material lineal elástico ortótropo  $\{\bar{\sigma}\} = [\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}\}$  relaciona las componentes del esfuerzo  $\{\bar{\sigma}\} = [\sigma_{\bar{x}} \ \sigma_{\bar{y}} \ \sigma_{\bar{x}\bar{y}}]^T$  y de deformación  $\{\bar{\varepsilon}\} = [\varepsilon_{\bar{x}} \ \varepsilon_{\bar{y}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}]^T$

definidas en las direcciones materiales, siendo  $[\bar{C}]$  la matriz constitutiva elástica material, que en condición plana de esfuerzos (Weaver y Johnson, 1984; Oñate y Zárate, 1995; Oñate,

concrete.

Simplifying the three-dimensional problem in plane stress condition limited fibre orientation randomness in the analysis plane.

However, by means of another efficient factor  $\eta_\varphi$ , fibre orientation outside the plane could be included.

Figure 2(c) shows that the fibre's longitudinal axis had random direction  $\varphi$  regarding material plane  $\bar{x}\bar{y}$ , so that composite material contribution to elasticity modulus in the analysis plane was  $E^{(a)} \cos \varphi$ . Therefore, the efficient factor according to direction  $0 < \eta_\varphi < 1$  could be calculated as:

$$\eta_\varphi = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \varphi \rightarrow \eta_\varphi = \frac{2}{\alpha} \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad (9)$$

where  $\alpha$  was in the value range which could be taken by direction  $\varphi$ .

If fibre length  $L$  was less than element thickness then the fibre could take a direction between  $-\pi/2$  and  $\pi/2$  establishing angle range  $\alpha$  equal to  $\pi$ . In the opposite case, if element thickness were less than fibre length, then fibre orientation could only take values between  $-\beta$  and  $\beta$  and  $\alpha$  would be equal to  $2\beta$  ( $\beta = \arcsin(t/L)$  and  $t$  solid thickness).

The elasticity modulus for reinforced material with short fibres in direction  $\bar{x}$  was calculated by a modification of the mixture theory, Equation (3), would thus become:

$$E_{\bar{x}} = k^{(c)} E^{(c)} + \eta_L \eta_\varphi k^{(a)} E^{(a)} \quad (10)$$

An orthotropic material had different mechanical properties in all three orthogonal directions of a coordinate system for material as indicated in Figure 1(c). Under plane stress, coordinate axis  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  were the parallel and perpendicular directions to the fibre respectively, forming angle  $\theta$  regarding global coordinate axis  $x$  and  $y$ .

The constitutive equation for orthotropic, linear and elastic material  $\{\bar{\sigma}\} = [\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}\}$  linked stress components  $\{\bar{\sigma}\} = [\sigma_{\bar{x}} \ \sigma_{\bar{y}} \ \sigma_{\bar{x}\bar{y}}]^T$  and strain components  $\{\bar{\varepsilon}\} = [\varepsilon_{\bar{x}} \ \varepsilon_{\bar{y}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}]^T$  defined in material directions where  $[\bar{C}]$  was the elastic constitutive matrix of material, in plane stress conditions corresponding to (Weaver and Johnson, 1984; Oñate and Zárate 1995)

En Español

In English

2009) corresponde a:

$$[C] = \frac{1}{1 - \nu_{\bar{y}\bar{y}}\nu_{\bar{x}\bar{x}}} \begin{bmatrix} E_{\bar{x}} & \nu_{\bar{y}\bar{x}}E_{\bar{x}} & 0 \\ \nu_{\bar{x}\bar{y}}E_{\bar{x}} & E_{\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{\bar{x}\bar{y}}\nu_{\bar{y}\bar{x}})G_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

En la matriz anterior la relación de Poisson  $\nu_{\bar{x}\bar{y}}$  y el módulo de elasticidad a cortante  $G_{\bar{y}\bar{y}}$  son iguales a:

$$\nu_{\bar{x}\bar{y}} = \nu_{\bar{y}\bar{x}} \frac{E_{\bar{x}}}{E_{\bar{y}}}, \quad \frac{1}{G_{\bar{x}\bar{y}}} \cong \frac{1 + \nu_{\bar{x}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}} + \frac{1 + \nu_{\bar{y}\bar{y}}}{E_{\bar{y}}} \quad (12)$$

En el sistema coordenado global la relación entre las componentes de esfuerzo  $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}]^T$  y de deformación  $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$ , se define como  $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ , donde la matriz constitutiva elástica global  $[C]$  es igual a:

$$[C] = [T]^T [\bar{C}] [T] \quad (13)$$

donde  $[T]$  es una matriz de transformación en términos del ángulo  $\theta$  formado entre los ejes  $\bar{x}$  y  $x$  (Weaver y Johnson, 1984) de la forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Este trabajo presenta un modelo numérico que describe el comportamiento elástico del concreto reforzado con fibras cortas de orientación aleatoria. Tal modelo incluye dos niveles de análisis: el análisis determinista, mediante el cual se obtiene la respuesta estructural para cada dato de muestreo, y el análisis estocástico, que establece la dispersión de los resultados del conjunto de eventos aleatorios pertenecientes al espacio de muestreo.

## Análisis determinista del CRFC por medio del método de los elementos finitos

En el primer nivel de análisis se implementó un modelo bidimensional en el método de los elementos finitos, el cual permite obtener la energía de deformación y la distribución de deformaciones y esfuerzos en un material reforzado elástico lineal con fibras cortas. En este modelo se utilizó un elemento triangular lineal asociado a un solo material reforzado con fibras cortas de dirección y cantidad definida, como lo indica la figura 1 (b).

Para un elemento finito  $e$ , el ángulo  $\theta_e^{(\xi)}$  conformado entre el eje global  $x$  y el eje material  $\bar{x}$  se establece con el valor aleatorio entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ , de ahí que la simulación numérica del sólido tendrá tantas direcciones de fibra diferentes como ele-

$$[C] = \frac{1}{1 - \nu_{\bar{y}\bar{y}}\nu_{\bar{x}\bar{x}}} \begin{bmatrix} E_{\bar{x}} & \nu_{\bar{y}\bar{x}}E_{\bar{x}} & 0 \\ \nu_{\bar{x}\bar{y}}E_{\bar{x}} & E_{\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{\bar{x}\bar{y}}\nu_{\bar{y}\bar{x}})G_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

In the last matrix, Poisson ratio  $\nu_{\bar{x}\bar{y}}$  and shear elasticity modulus  $G_{\bar{y}\bar{y}}$  were:

$$\nu_{\bar{x}\bar{y}} = \nu_{\bar{y}\bar{x}} \frac{E_{\bar{x}}}{E_{\bar{y}}}, \quad \frac{1}{G_{\bar{x}\bar{y}}} \cong \frac{1 + \nu_{\bar{x}\bar{x}}}{E_{\bar{x}}} + \frac{1 + \nu_{\bar{y}\bar{y}}}{E_{\bar{y}}} \quad (12)$$

In the global coordinate system, the relationship between stress components  $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}]^T$  and strain components  $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$  was defined as  $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$  where global elastic constitutive matrix  $[C]$  was:

$$[C] = [T]^T [\bar{C}] [T] \quad (13)$$

where  $[T]$  was a transformation matrix in terms of angle  $\theta$  between axis  $\bar{x}$  and  $x$ ; thus (Weaver and Johnston, 1984):

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

This paper presents a numerical model describing the elastic behaviour of reinforced concrete with short fibres in random direction. The model has two analysis levels: deterministic analysis through which the structural response for each data tested was obtained and stochastic analysis establishing the dispersion of results for the set of random events.

## Deterministic analysis of SFRC by finite element method

A two-dimensional model using the finite element method was implemented in the first level of analysis thereby obtaining strain energy and strain and stress distribution in a linear elastic material reinforced with short fibres. Linear triangular elements were used in this model, associated with SFRC material having defined fibre direction and quantities, as indicated in Figure 1(b).

For finite element  $e$ , angle  $\theta_e^{(\xi)}$  between global axis  $x$  and material axis  $\bar{x}$  was established by a random value between  $-\pi/2$  and  $\pi/2$ . Numerical simulation of the solid would thus have many different fibre directions as the mesh has finite elements

mentos finitos tenga la malla (figura 1(a)). La dirección real de las fibras en el medio se representará mejor con mallas de elementos finitos más pequeños, donde el carácter aleatorio de la fibra se obtenga en regiones de menor tamaño, como se demostrará más adelante en algunos resultados de validación.

### Análisis estocástico del CRFC de la orientación aleatoria de la fibra

El objetivo de la mecánica estocástica es el de analizar la dispersión de una variable aleatoria obtenida de las leyes de la mecánica determinista en cada evento o dato de muestreo (Ostoj-Starzewski, 2008).

Cada evento  $\xi$  corresponde a un análisis determinista del problema donde se ha escogido un valor aleatorio de la orientación de la fibra  $\theta_e^{(\xi)}$  por elemento finito. La colección de los resultados obtenidos en este evento se indica de la forma  $R(\xi)$ .

El análisis estocástico repite el problema determinista conformando un grupo de eventos en el espacio de muestreo de tamaño  $m$  y estudia la dispersión del campo de los resultados definido como:

$$\mathfrak{R} = \{R(\xi); \xi = 1, 2, 3, \dots, m\} \quad (15)$$

De esta forma, cada vez que se resuelve el problema determinista se llega a una solución distinta. Por ejemplo, la energía de deformación de una probeta sometida a presión uniforme es diferente en cada evento, no obstante todo valor de energía es mayor que la energía de deformación dada cuando las fibras están orientadas perpendicularmente a la carga y es menor que la energía de deformación si las fibras son paralelas a ella.

En el modelo del concreto reforzado con fibras cortas se espera que la dispersión de los resultados disminuya con el aumento del tamaño del espacio de muestreo  $m$  y con el incremento de la densidad de la malla de elementos finitos. En consecuencia, el comportamiento ortótropo de dirección material aleatoria que tiene el CRFC en cada punto material se convierte en un comportamiento isótropo en el volumen del elemento estructural. El modelo se implementó sobre el programa de elementos finitos a código abierto PEFiCA (Linero, 2010).

### Módulo de elasticidad equivalente a un material isótropo

Como ejemplo de validación del modelo se analizó un panel cuadrado de lado  $L$  y espesor  $t$  hecho de concreto reforzado con fibras cortas, sometido a una carga distribuida por unidad de área  $q$  sobre uno de los lados, como se ilustra en la figura 3 (a). Se ha utilizado un coeficiente de participación volumétrica del

acero  $k^{(a)} = 0.01$ , el cual representa un contenido habitual de fibras de acero en matrices de concretos estructurales. Dicha cuantía corresponde a una relación entre los módulos de elasticidad en las direcciones materiales  $E_x/E_y$  cercanos a un valor de

(Figure 1 (a)). The actual directions of the fibres in the middle was better represented by smaller finite element mesh where random fibre framework was obtained in smaller sized places, as shown by some validation of the results.

### Stochastic analysis of random fibre orientation in SFRC

Stochastic mechanics analyses random variable dispersion obtained from deterministic mechanical laws in each event or test data (Ostoj-Starzewski, 2008).

Each event  $\xi$  corresponded to a deterministic analysis of the problem where a random value for fibre direction  $\theta_e^{(\xi)}$  had been chosen for each finite element. The results arising from such event were indicated by  $R(\xi)$ .

Stochastic analysis repeated the deterministic problem forming a set of events in test space size  $m$  and studied results dispersion, defined as:

$$\mathfrak{R} = \{R(\xi); \xi = 1, 2, 3, \dots, m\} \quad (15)$$

Each time a deterministic problem was solved a different solution was obtained. For example, the strain energy of a specimen subjected to uniform pressure would be different in each event; however, every value for energy would be greater than the strain energy given when fibres had a perpendicular direction to load and this was less than the strain energy when fibres were parallel to it.

It would be expected that results' dispersion would decrease when testing space  $m$  and finite element mesh density increased for the SFRC model. Consequently, the orthotropic behaviour of random material direction for SFRC at each material point would become isotropic in structural element volume. The model was implemented in PEFiCA finite element open-code software (Linero, 2009).

### Elasticity modulus equal to isotropic material

As a validation example for the model, a square panel having side  $L$  and SFRC thickness  $t$  was analysed. This panel was submitted to a distributed load per unit of area  $q$  applied to one of

its sides, as shown in Figure 3(a).  $k^{(a)} = 0.01$  volumetric ratio for steel was used, representing habitual steel fibre content in structural concrete matrix. The ratio between elasticity modulus

in material directions  $E_x/E_y$  was about 1.05.

1,05.

La energía de deformación del sólido en un evento  $\xi$  es el resultado de la sumatoria de las energías de deformación de cada uno de los elementos finitos de la malla obtenida de la forma:

$$U^{(\xi)} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \{\sigma\}_e^T \{\epsilon\}_e A_e t \quad (16)$$

siendo  $n$  el número de elementos finitos, y  $A_e t$ ,  $\{\sigma\}_e$  y  $\{\epsilon\}_e$  el volumen, el vector de esfuerzo y de deformación del elemento, respectivamente.

Por otro lado, de forma analítica la energía de deformación de un panel elástico isótropo equivalente de dimensiones  $L \times L \times t$  sometido a una presión  $q$  uniforme, es igual a:

$$U_{eq} = \frac{q^2 L^2 t}{2 E_{eq}} \quad (17)$$

donde  $E_{eq}$  es el módulo de elasticidad equivalente a un material isótropo.

Igualando la energía de deformación calculada en un evento  $\xi$  a partir de la ecuación (16) con la energía equivalente de un modelo isótropo indicada en la ecuación (17), se puede expresar el módulo de elasticidad equivalente a un material isótropo en el evento  $\xi$  como:

$$E_{eq}^{(\xi)} = \frac{q^2 L^2 t}{2 U^{(\xi)}} \quad (18)$$

El valor promedio  $\bar{E}_{eq}$  y la desviación estándar  $\Delta E_{eq}$  del módulo de elasticidad equivalente del conjunto de eventos realizados corresponden a:

$$\bar{E}_{eq} = \frac{1}{m} \sum_{\xi=1}^m E_{eq}^{(\xi)}, \quad \Delta E_{eq} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{\xi=1}^m (E_{eq}^{(\xi)} - \bar{E}_{eq})^2} \quad (19)$$

Para obtener el módulo  $\bar{E}_{eq}$  y su dispersión se simuló el problema con 5 mallas de diferente densidad y con campos de muestreo  $m$  hasta de 250 eventos. El tamaño relativo del elemento finito  $TREF$  está definido como el cociente entre el área del elemento finito  $A_e$  y el área de la estructura modelada  $L^2$ , de tal forma que la malla utilizada más densa corresponde a  $TREF = 0.001$  y en la malla menos densa  $TREF = 0.125$ , co-

The energy strain of a solid in event  $\xi$  was the result of adding the strain energies for each finite element mesh, calculated as:

$$U^{(\xi)} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \{\sigma\}_e^T \{\epsilon\}_e A_e t \quad (16)$$

where  $n$  was the number of finite elements and  $A_e t$ ,  $\{\sigma\}_e$  and  $\{\epsilon\}_e$  were finite element volume, stress vector and strain vector, respectively.

The analytical form of strain energy for an isotropic and elastic panel having dimensions  $L \times L \times t$ , subjected to pressure  $q$ , was:

$$U_{eq} = \frac{q^2 L^2 t}{2 E_{eq}} \quad (17)$$

where  $E_{eq}$ , was the equivalent elasticity modulus for isotropic material.

Equalizing the strain energy calculated in event  $\xi$  from equation (16) with equivalent energy of an isotropic model indicated in equation (17), the elasticity modulus equivalent to isotropic material in event  $\xi$  could be expressed as:

$$E_{eq}^{(\xi)} = \frac{q^2 L^2 t}{2 U^{(\xi)}} \quad (18)$$

Average value  $\bar{E}_{eq}$  and standard deviation  $\Delta E_{eq}$  for the equivalent elasticity modulus in the whole events was:

$$\bar{E}_{eq} = \frac{1}{m} \sum_{\xi=1}^m E_{eq}^{(\xi)}, \quad \Delta E_{eq} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{\xi=1}^m (E_{eq}^{(\xi)} - \bar{E}_{eq})^2} \quad (19)$$

The problem was simulated using 5 meshes having different density and testing fields  $m$  until 250 events to obtain modulus  $\bar{E}_{eq}$  and its dispersion. The relative size of finite element  $TREF$  was defined as the ratio between finite element area  $A_e$  and modelled structure area  $L^2$ , so meshes had maximum density  $TREF = 0.001$  and minimum density  $TREF = 0.125$ ,



En Español

In English

mo lo muestra la figura 3(b).

as shown in Figure 3(b).

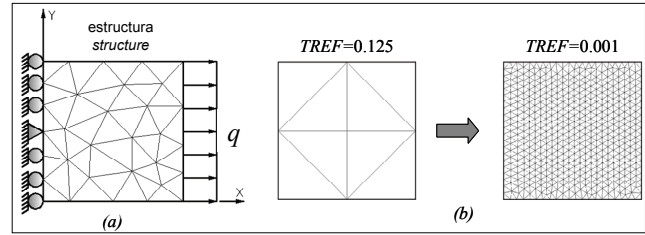
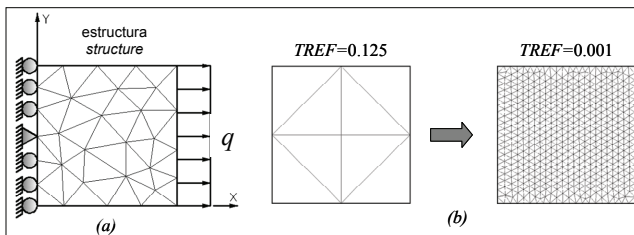


Figura 3. Panel sometido a presión uniforme: (a) esquema general, (b) mallas de elementos finitos.

Figure 3. Uniform pressure panel: (a) general scheme, (b) finite element meshes

El valor promedio y la desviación estándar del módulo de elasticidad equivalente dividido entre el módulo de Young de la matriz de concreto  $E^{(c)}$  se indican en la figura 4. Allí se demuestra que, a medida que crece el tamaño del campo de muestreo, disminuye la dispersión de  $\bar{E}_{eq}$ . Por ejemplo, para  $TREF \leq 0.019$  y tamaño de muestras  $m$  de 30 eventos la desviación estándar del módulo elástico equivalente es menor al 1%. Asimismo, la densidad de la malla reduce la dispersión de los resultados, como lo indican la desviación estándar del 3% en la malla menos densa y del 0,2% en la malla más fina.

The average and standard deviation for the equivalent elasticity modulus of the composite material divided by Young modulus for concrete  $E^{(c)}$  is indicated in Figure 4. This Figure shows that dispersion decreased when test field size was increased. For example, if  $TREF \leq 0.019$  and test size was 30 events, then the standard deviation for the equivalent elastic modulus was less than 1.0%. Likewise, mesh density reduced result dispersion, as indicated by 3.0% standard deviation for lower density mesh and 0.2% in the refined mesh.

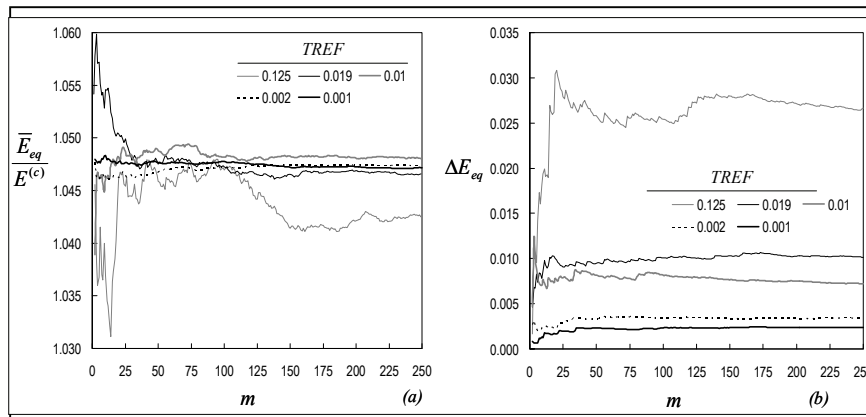


Figura 4. Módulo de elasticidad equivalente promedio y desviación estándar en función del número de eventos para diferentes densidades de mallas de elementos finitos.

Figure 4. Averaged equivalent elasticity module and its standard deviation in terms of event quantity for some finite element meshes

### Ejemplo de aplicación: viga de tres puntos

### Application example: three point beam

Se simuló el comportamiento elástico de una viga de concreto reforzado con fibras cortas con una entalla en la mitad de la luz, sometida a una carga puntual  $P = 5kN$ , como se indica en la figura 5 (a) (Ferrara y Gettu, 2000). La viga tiene una altura  $d = 90mm$ , una longitud  $2.5d = 225mm$ , un espesor de  $t = 10mm$  y el ancho de la entalla fue de 2,5 mm y el largo de ésta de 23,13 mm.

The elastic behaviour of an SFRC beam with a notch in the middle of the span was simulated; this was subjected to point load  $P = 5kN$ , as indicated in Figure 5(a) (Ferrara and Gettu, 2000). The beam was  $d = 90mm$  high,  $2.5d = 225mm$  long and  $t = 10mm$  thick. The notch was 2.5mm wide and 23.13mm deep.

Las características mecánicas de la matriz de concreto simple son las siguientes: módulo de Young  $E^{(c)} = 25GPa$ , relación de Poisson  $\nu^{(c)} = 0.3$  y resistencia a la compresión  $\sigma_u^{(c)} = 50 MPa$ . En cambio, las fibras cortas de acero tienen

The mechanical characteristics of the plain concrete matrix were as follows: Young's modulus  $E^{(c)} = 25GPa$ , Poisson ratio  $\nu^{(c)} = 0.3$  and compression resistance  $\sigma_u^{(c)} = 50MPa$ . By comparison, the short steel fibres had Young's modulus  $E^{(a)} = 200GPa$ , Poisson ratio  $\nu^{(a)} = 0.25$  and yielding stress

En Español

un módulo de Young  $E^{(a)} = 200\text{GPa}$ , una relación de Poisson  $\nu^{(a)} = 0.25$  y un esfuerzo de fluencia  $\sigma_y^{(a)} = 420\text{MPa}$ ; asimismo, su coeficiente de participación volumétrica  $k^{(a)}$  es igual a 0,01, su longitud  $l$  es de 60 mm y su diámetro  $D$  es de 2 mm.

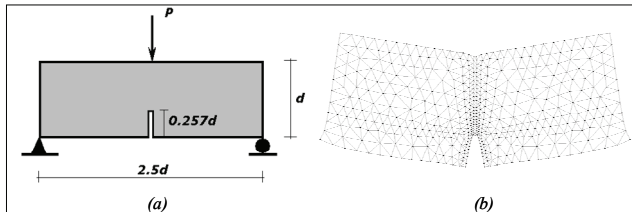


Figura 5. Viga de tres puntos: (a) esquema general, (b) malla de elementos finitos deformada

Aplicando la ecuación (9) para una relación  $L/l = 0.6$ , se obtiene un factor de eficiencia por la dirección de la fibra fuera del plano  $\eta_\phi = 0.625$ .

El área de la sección transversal de cada fibra es de  $3.14\text{mm}^2$ , por lo tanto para una cuantía  $k^{(a)} = 0.01$  el área total de la sección transversal es igual a  $314.2\text{mm}^2$  y el área transversal de la matriz de concreto es de  $311.1\text{mm}^2$ . Suponiendo una sección transversal total cuadrada, la separación mínima entre dos fibras vecinas paralelas  $R$  será igual al lado de tal cuadrado, es decir  $17.72\text{mm}$ . Obtenidas las relaciones  $D/R = 0.1123$  y  $D/L = 0.0333$ , el factor de eficiencia por variación de esfuerzos en los extremos de la fibra  $\eta_L$  es igual a 0,8176.

Se dividió el medio con 883 elementos triangulares lineales correspondientes a un factor  $TREF = 0.00113$  y se realizaron 25 eventos de orientación aleatoria de fibras. En uno de los eventos, la geometría deformada y los esfuerzos principales  $\sigma_1$  de la viga se ilustran en las figuras 5 (b) y 6.

El número de muestras elegido obedece a la baja desviación estándar observada en el ensayo uniaxial para tamaño relativo de elemento finito  $TREF$  entre 0,001 y 0,002, como lo indica la figura 4.

De un análisis estocástico de los resultados de la deflexión en la mitad de la luz  $\delta$  y del esfuerzo principal máximo en tracción  $\sigma_1^{\max}$  se obtuvo un valor promedio de la deflexión  $\bar{\delta} = -21.74 \times 10^{-3}\text{mm}$  con una desviación estándar del

In English

$\sigma_y^{(a)} = 420\text{MPa}$ , likewise its volumetric participation coefficient  $k^{(a)}$  was 0.01, its length  $l$  was 60 mm and its diameter  $D$  was 2mm.

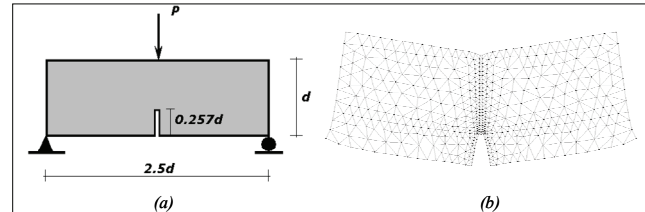


Figure 5. Three point beam: (a) overall scheme, (b) deformed shape of finite element mesh

Applying equation (9) to  $L/l = 0.6$ , an efficient factor for fibre plane direction  $\eta_\phi = 0.625$  was obtained.

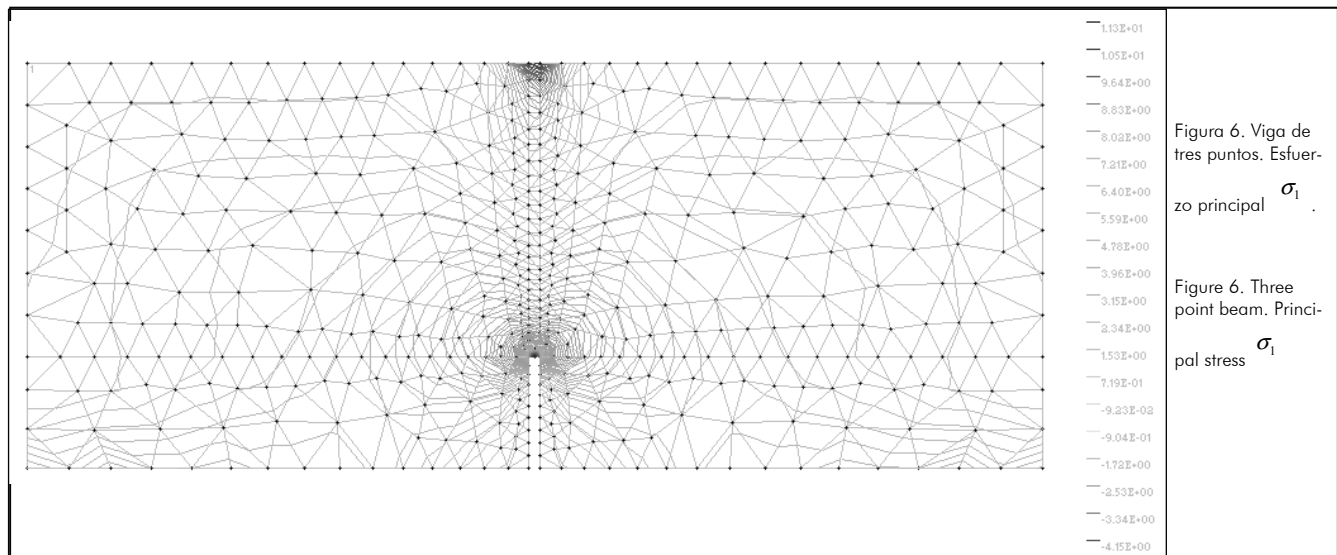
Each fibre's cross section area was  $3.14\text{mm}^2$ ; then, for volume ratio  $k^{(a)} = 0.01$ , total transversal section area was  $314.2\text{mm}^2$  and concrete matrix cross section area was  $311.1\text{mm}^2$ . If the whole cross section were assumed to be square, then minimum spacing between two neighbouring parallel fibres  $R$  would be equal to the square side, i.e.  $17.72\text{mm}$ . When  $D/R = 0.1123$  and  $D/L = 0.0333$  ratios were obtained, the efficient factor for stress variations at fibre extremes  $\eta_L$  was 0.8176.

The panel was divided into 883 linear triangular elements, corresponding to factor  $TREF = 0.00113$  and 25 events were carried out with fibre random orientation. Figure 5(b) and Figure 6 illustrate the deformed shape and main stresses  $\sigma_1$  for the beam for one of the events.

The chosen number of test data followed down standard deviation shown in the uniaxial test for relative finite element size  $TREF$  between 0.001 and 0.002, as indicated in Figure 4.

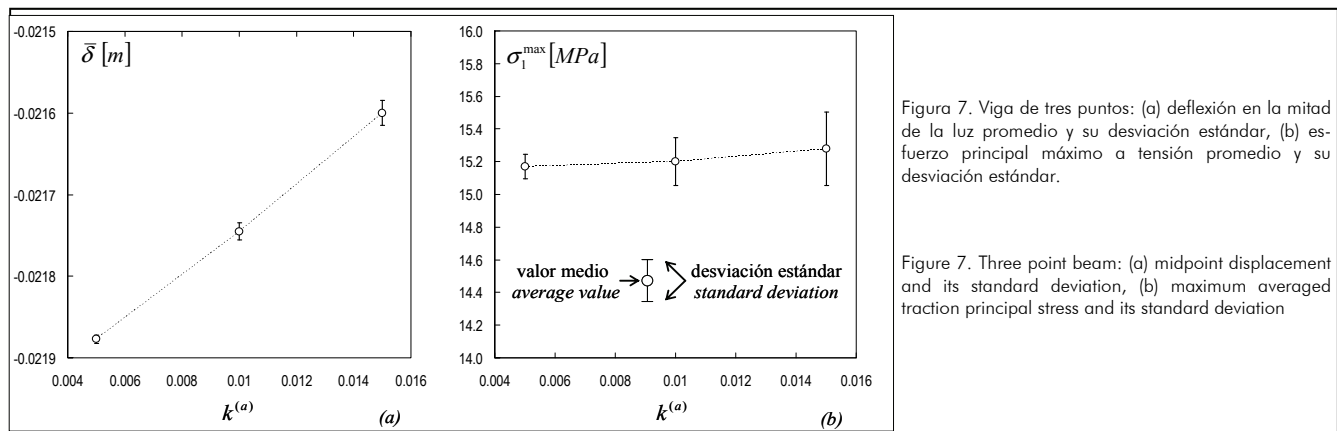
An average deflection value  $\bar{\delta} = -21.74 \times 10^{-3}\text{mm}$  having 0.05% standard deviation and  $\bar{\sigma}_1^{\max} = 15.259\text{MPa}$  average stress value, with 0.85% standard deviation were obtained from stochastic analysis of deflection results in the middle of span  $\delta$  and maximum main tensile stress  $\sigma_1^{\max}$ .

0.05% , y un valor medio del esfuerzo  $\bar{\sigma}_1^{\max} = 15.259MPa$  con una desviación estándar del 0.85% .



Adicionalmente, analizando la viga de tres puntos con coeficientes de participación volumétrica de 0,005 y de 0,015, también se obtuvieron deflexiones y esfuerzos medios con dispersiones muy pequeñas, como lo indica la figura 7.

Deflections and average stresses having very small dispersions were obtained when analysing the three point beam with 0.005 and 0.015 volumetric ratios, as indicated in Figure 7.



**Conclusiones**

El modelo presentado permite reproducir el comportamiento elástico de elementos estructurales de concreto reforzado con fibras cortas mediante dos rangos de análisis: un análisis determinista, en el cual cada elemento finito está asociado a un material compuesto de dirección material aleatoria, y un análisis estocástico, donde se coleccionan los eventos obtenidos de los resultados del análisis determinista y se estudia su dispersión con respecto a los valores promedio.

El comportamiento elástico del CRFC se obtiene de cuatro propiedades de los materiales componentes: el módulo de Young y la relación de Poisson de la matriz de concreto simple, y el módulo de Young y el coeficiente de participación volumétrica de las fibras de acero.

**Conclusions**

The model presented in this paper represented SFRC structural elements' elastic behaviour by means of two levels of analysis: deterministic, where each finite element was associated with a composite material having random material orientation and stochastic analysis where deterministic analysis event results were collected and their dispersion compared to average values was studied.

SFRC elastic behaviour was obtained from component materials' four properties: Young's modulus and Poisson ratio for plain concrete matrix and Young's modulus and volumetric ratio for steel fibres.

## En Español

Mediante el modelo descrito se demuestra que el comportamiento ortótropo de dirección material aleatoria de cada punto del cuerpo se puede representar como un comportamiento isótropo aproximado del elemento estructural.

En el análisis estocástico el tamaño del campo de muestreo determina la dispersión de la respuesta. En la obtención del módulo de elasticidad equivalente promedio, a medida que aumenta tamaño del campo de muestreo la desviación estándar se reduce, sin embargo esta disminución tiene una asíntota determinada por la densidad de la malla. A mallas más finas se requiere un campo muestral menor para obtener desviaciones estándar constantes más bajas.

Por medio de este modelo se pueden simular ensayos experimentales de elementos estructurales con el fin de determinar desplazamientos, deformaciones y esfuerzos promedios, con sus respectivas desviaciones estándar. Como aplicación se simuló el comportamiento de una viga entallada con una carga puntual en el centro de la luz, con tres cantidades diferentes de fibras de refuerzo, obteniendo desviaciones estándar menores al 0,1% en su deflexión.

## Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación recibida por la Dirección Nacional de Investigación de la Universidad Nacional de Colombia, mediante el proyecto DIB – 7006.

## Nomenclatura

$\epsilon_{\bar{x}}^{(c)}, \epsilon_{\bar{x}}^{(a)}, \epsilon_{\bar{x}}$	Deformaciones longitudinales del concreto, del acero y del material compuesto en dirección de la fibra.
$\sigma_{\bar{x}}^{(c)}, \sigma_{\bar{x}}^{(a)}, \sigma_{\bar{x}}$	Esfuerzo normal del concreto, del acero y del material compuesto en dirección de la fibra.
$E^{(c)}, E^{(a)}, G^{(c)}$	Módulo de Young del concreto y del acero y módulo de cortante del concreto.
$\nu_{\bar{x}\bar{y}}, E_{\bar{x}}, E_{\bar{y}}$	Relación de Poisson y módulos de elasticidad paralelo y perpendicular a la fibra del material compuesto.
$\bar{E}_{eq}, \Delta E_{eq}$	Valor promedio y desviación estándar del módulo de elasticidad equivalente del conjunto de eventos realizados.
$E_{eq}^{(\xi)}$	Módulo de elasticidad equivalente a un material isótropo en el evento $\xi$ .
$k^{(c)}, k^{(a)}$	Fraciones de participación volumétrica de la matriz de concreto y de las fibras de acero.
$V^{(c)}, V^{(a)}$	Volúmenes de concreto y de las fibras de acero contenidos en un volumen de referencia del material compuesto.
$A_e, t$	Área y espesor del elemento finito.
$L, D, R$	Longitud, diámetro y separación promedio de la fibra corta.
$l_c$	Longitud de interfase de la fibra corta, distancia en la cual alcanza su esfuerzo de tensión promedio.
$\eta_L, \eta_\phi$	Factores de eficiencia del comportamiento como fibra corta y de probabilidad de orientación de las fibras fuera del plano del panel de concreto.
$\theta$	Ángulo de orientación de la fibra en el plano xy formado entre los ejes $x$ y $\bar{x}$ , y fuera del plano xy, respectivamente.

## In English

The model showed that orthotropic behaviour for random material direction at each point of the body could be represented as approximated isotropic behaviour for the structural element.

Test field size determined response dispersion in stochastic analysis. Standard deviation was reduced when computing average equivalent elasticity module test date size was increased; however, such reduction had an asymptote determined by mesh density. A lower density test field would be needed for the thinner mesh to obtain lower constant standard deviations.

Experimental testing of structural elements can be simulated with this model to determine displacement, strain and average stress with their respective standard deviations. The behaviour of a notched beam having a point load in the middle was simulated to show such application with three reinforcement fibre ratios, obtaining standard deviations for deflection of less than 0.1%.

## Acknowledgements

The authors are grateful to the Universidad Nacional de Colombia's Research Division, Bogotá, for financial support provided by Project DIB-7006.

## Nomenclature

$\epsilon_{\bar{x}}^{(c)}, \epsilon_{\bar{x}}^{(a)}, \epsilon_{\bar{x}}$	Concrete, steel and composite material longitudinal strain in direction to the fiber.
$\sigma_{\bar{x}}^{(c)}, \sigma_{\bar{x}}^{(a)}, \sigma_{\bar{x}}$	Concrete, steel and composed material normal stress in direction to the fiber.
$E^{(c)}, E^{(a)}, G^{(c)}$	Young's modulus of concrete, steel and shear elasticity modulus of concrete.
$\nu_{\bar{x}\bar{y}}, E_{\bar{x}}, E_{\bar{y}}$	Poisson's ratio, parallel and perpendicular to the composite material fiber elasticity modulus
$\bar{E}_{eq}, \Delta E_{eq}$	Average value and standard deviation module of equivalent elasticity modulus for whole made events.
$E_{eq}^{(\xi)}$	Equivalent elasticity modulus for an isotropic material in the event $\xi$ .
$k^{(c)}, k^{(a)}$	Volumetric ratios of the concrete matrix and the steel fibers.
$V^{(c)}, V^{(a)}$	Concrete and Steel fibers volume contained into the referenced volume of composite material.
$A_e, t$	Area and thickness of a finite element.
$L, D, R$	Length, diameter and average spacing of the short fiber.
$l_c$	Transition length of the short fiber.
$\eta_L, \eta_\phi$	Efficient factor for the short fiber behavior and efficient factor for the fibers orientation probability out the concrete panel plane.
$\theta$	Fiber orientation angle in the plane xy between axis $x$ and $\bar{x}$ .

En español		In English	
$\theta_e^{(\xi)}$	Ángulo de orientación de la fibra dentro del plano para el elemento finito (e) en el evento $\xi$ .	$\theta_e^{(\xi)}$	Angle of fiber orientation into the plane for the finite element (e) in the event $\xi$ .
$\varphi, \beta$	Ángulo de orientación de la fibra fuera del plano xy del sólido y ángulo máximo de orientación de la fibra fuera del plano xy, si el espesor del mismo es inferior a la longitud total de la fibra.	$\varphi, \beta$	Angle of fiber orientation out the plane xy in the solid and maximum angle of fiber orientation out the plane xy if its thickness is less than the fiber total length.
$\mathfrak{R}$	Campo de resultados obtenido del análisis.	$\mathfrak{R}$	Testing results field obtained in the analysis.
$m$	Cantidad de eventos $\xi$ en el campo de resultados.	$m$	Number of events $\xi$ for the results field.
$[\bar{C}], [C]$	Matriz constitutiva elástica en coordenadas materiales y en coordenadas globales, respectivamente.	$[\bar{C}], [C]$	Constitutive elastic matrix in material coordinates and in global coordinates respectively.
$[T]$	Matriz de transformación en términos del ángulo $\theta$ .	$[T]$	Transformation matrix in terms of angle $\theta$ .
$q$	Carga aplicada por unidad de área sobre uno de los lados del sólido.	$q$	Applied load per unit of area over one of the solid sides.
$TREF$	Tamaño relativo del elemento finito.	$TREF$	Relative size of the finite element.
$U^{(\xi)}, U_{eq}$	Energía de deformación del sólido en un evento $\xi$ y energía equivalente calculada analíticamente para un sólido elástico isótropo.	$U^{(\xi)}, U_{eq}$	Solid strain energy for an event $\xi$ and equivalent energy analytically calculated for an isotropic elastic solid
$\delta, \bar{\delta}$	Deflexión y deflexión promedio en la mitad de la luz de la viga.	$\delta, \bar{\delta}$	Deflection and average deflection in the middle of the span.
$\sigma_1^{\max}, \bar{\sigma}_1^{\max}$	Esfuerzo principal máximo a tracción del compuesto y su valor promedio, respectivamente.	$\sigma_1^{\max}, \bar{\sigma}_1^{\max}$	Maximum principal tensile stress for composite and its average value respectively
$\sigma_u^{(c)}$	Resistencia a la compresión del concreto empleado en el ensayo de la viga.	$\sigma_u^{(c)}$	Compression resistance of the concrete used in the beam test.
$\tau$	Esfuerzo cortante actuante sobre la superficie de la fibra cuando ésta se encuentra sometida a la tensión de falla.	$\tau$	Shear stress acting over the fiber surface when it is subjected to the failure stress.
$\hat{\sigma}_{TA}$	Resistencia de la fibra a tracción.	$\hat{\sigma}_{TA}$	Tensile strength of the fiber.

## Referencias / References

- ACI, Technical Report ACI 544.2R., Measurement of Properties of Fiber Reinforced Concrete., United States of America, 1989.
- ACI, Technical Report ACI 544.1R., State of the Art Report on Fiber Reinforced Concrete., United States of America, 1996.
- ACI, Technical Report ACI 506.1R., Committee Report on Fiber Reinforced Shotcrete., United States of America, 1998.
- Dvorak, G., Bahei-el-Din, Y., Plasticity analysis of fibrous composites., Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, 1982, pp. 327-335.
- Ferrara, L., Gettu, R., Non-local damage analysis of three-point bending tests on SFRC notched beams., Fifth RILEM symposium on fibre-reinforced concrete (FRC), 2000, pp. 357-367.
- Hughes, T. J. R., The finite element method., New York, Dover, 2000.
- Linero, D., PEFiCA - Programa de elementos finitos a código abierto. versión 1.0., Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2010.
- Matthews, F. L., Rawlings, R. D., Composite materials: engineering and Science., Cambridge, Woodhead Publishing Limited, 1994.
- Oller, S., Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos., Barcelona, CIMNE, 2003.
- Oñate, E., Structural Analysis with the Finite Element Method., CIMNE - Springer, 2009.
- Oñate, E., Zárate, F., Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos., Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995.
- Ostoja-Starzewski, M., Microstructural randomness and scaling in mechanics of materials., Boca Raton, USA, Chapman & Hall/CRC, 2008.
- Weaver, J., Johnson, C., Finite elements for structural analysis., New Jersey, Prentice Hall, 1984.