

# Análisis de esfuerzos en túneles excavados en materiales con $K_0$ diferente a 1.0

**RICARDO E. BARBOSA CARRILLO**  
Ingeniero Civil  
Instituto de Ensayos e Investigación  
Universidad Nacional

**JORGE A. RODRIGUEZ ORDOÑEZ**

Construir un túnel a través de un macizo consiste en eliminar un núcleo de material y sustituirlo por un sistema de estabilización en general más deformable. Este sistema le permite a la roca soportar los esfuerzos generados alrededor de la excavación por la remoción del material que antes estaba soportando el estado de esfuerzos original del macizo.

La relación entre la deformación de la roca y la presión ejercida por el soporte  $P_i$ , para el caso de un estado inicial de esfuerzos isotrópico puede ser representada por la curva característica del macizo (Fig. 2), la cual depende de sus características de resistencia y esfuerzo-deformación. De igual manera, la relación entre la deformación del refuerzo y la presión ejercida, está definida por la curva de reacción del soporte  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = P_0$ .

La compatibilidad entre las deformaciones del soporte y el macizo es alcanzada mediante la igualdad de presiones que se producen en el contacto. El punto de equilibrio para una curva característica del macizo dada depende de la rigidez  $K$  del sistema de soporte del método constructivo y del tiempo transcurrido para la ejecución del sistema de estabilización.

Los esfuerzos que se producen en la vecindad de la excavación están influidos por la presión del sistema de soporte. El efecto de la excavación se hace cada vez menor a medida que la distancia radial aumenta, de tal manera que en puntos suficientemente alejados se tendrá la condición de esfuerzos inicial. En la Fig. 3 se presenta la solución elástica para esfuerzos radiales y circunferenciales de una placa infinita con una perforación circular, sometida a una presión radial interna  $P_i$  con la condición de que en puntos muy alejados, el estado de esfuerzos es  $\sigma_x = \sigma_y = P_0$ . En este caso el esfuerzo principal mayor, corresponde al esfuerzo circunferencial  $\sigma_\theta$  y el esfuerzo principal menor al esfuerzo radial  $\sigma_r$ . El esfuerzo desviador  $\sigma_n$  es máximo en el borde de la excavación y disminuye con la distancia radial. La máxima diferencia de esfuerzos principales se produce para  $P_i = 0$  y es  $2P_0$ .

Se observa que la acción del sistema de soporte es la de reducir ese esfuerzo desviador. Si para una presión de soporte dada, el esfuerzo desviador es mayor que la resistencia del macizo, se producirá

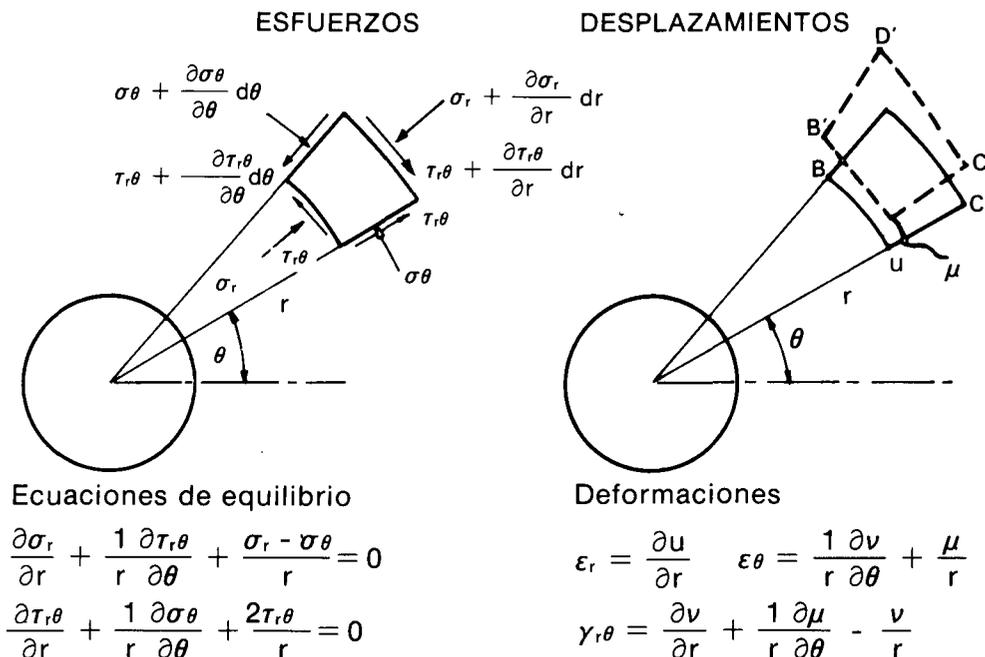


FIGURA 1.

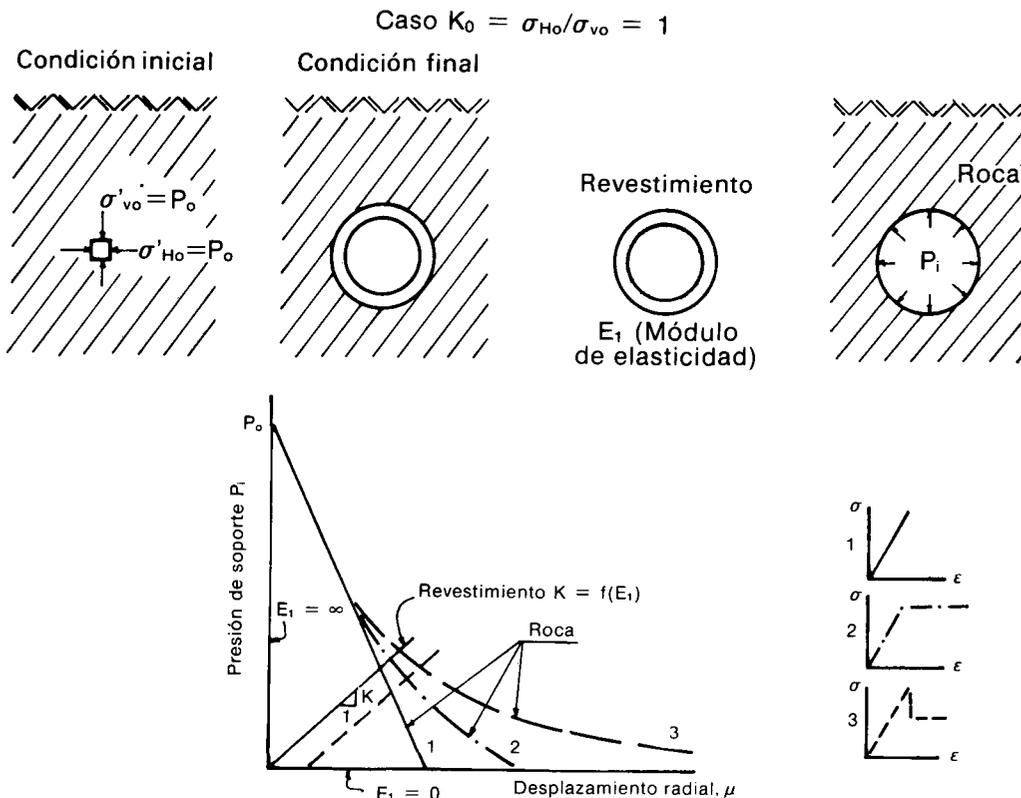


FIGURA 2.

alrededor del túnel una zona en estado de falla por efecto de la cual se produce una redistribución de esfuerzos (Fig. 4). El radio de esta zona plástica dependerá de la presión de soporte y de las características esfuerzo-deformación y de resistencia al corte del macizo. Por fuera de la zona plástica el material se comporta elásticamente.

Se han desarrollado soluciones analíticas como las propuestas por Fenner, Jaeger, Rabcewics, Ladanyi, Hendron y Hoek, que permiten obtener la curva característica del terreno, la distribución de esfuer-

zos alrededor del túnel y el radio de la zona plástica. Estas soluciones son aplicables solamente para el caso de túneles circulares excavados en materiales con una condición hidrostática de esfuerzos in situ y han sido elaboradas para diversos comportamientos esfuerzo-deformación y resistencia al corte del macizo con diferentes hipótesis para las deformaciones en la zona plástica.

En el presente trabajo se desarrollaron las soluciones elásticas para túneles circulares revestidos, excavados en materiales con un estado inicial de esfuer-

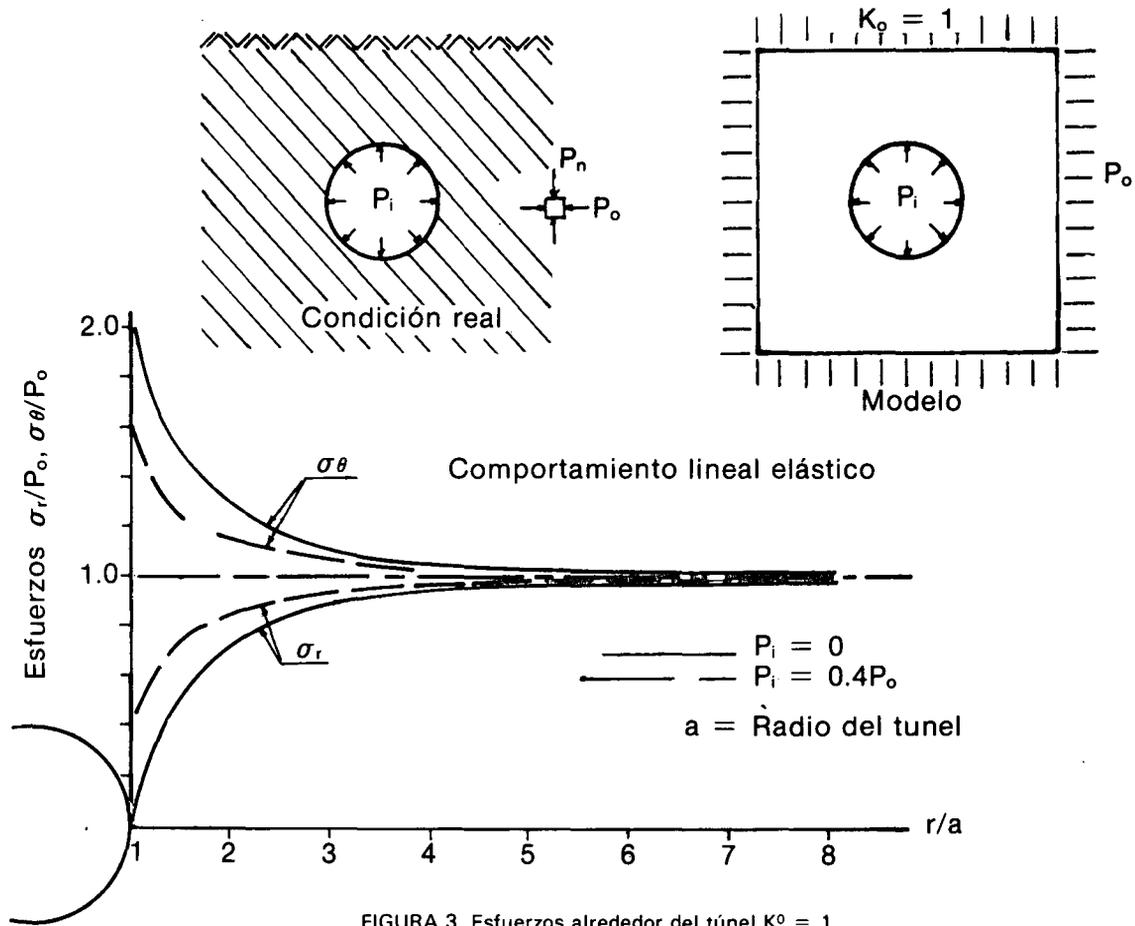


FIGURA 3. Esfuerzos alrededor del túnel  $K_0 = 1$ .

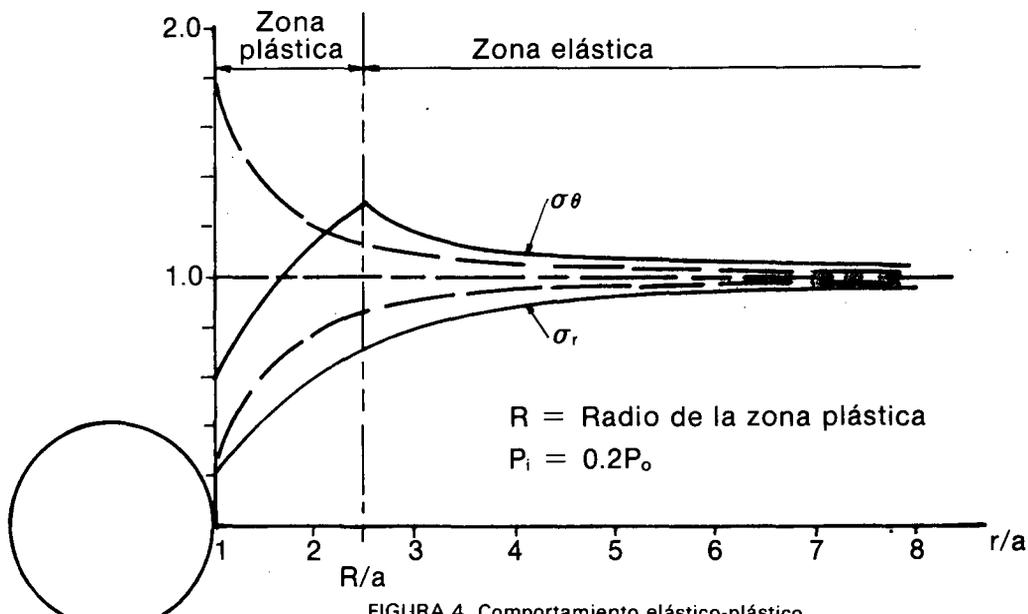


FIGURA 4. Comportamiento elástico-plástico.

zos  $\sigma_{x_0} = K_0 \sigma_{y_0}$ , y se formularon los modelos para resolver el problema utilizando la técnica de los elementos finitos.

Para el análisis elástico mediante elementos finitos, se utilizó el programa ELF.UN, desarrollado en la Universidad Nacional, el cual utiliza elementos triangulares de deformaciones unitarias constantes. Este programa fue escrito en lenguaje BASIC para su utilización en un microcomputador.

Para los análisis no lineales se utilizó el programa

FEADAM, desarrollado en la Universidad de California, el cual aproxima el comportamiento no lineal del material utilizando las relaciones hiperbólicas esfuerzo-deformación, propuestas por Konner y modificadas por Duncan, considerando además el criterio de falla de Mohr-Coulomb. Emplea un proceso incremental iterativo para el seguimiento de las relaciones esfuerzo-deformación. El programa está escrito en FORTRAN IV y utiliza elementos isoparamétricos de cuatro nodos. En las Figuras 5 y 6 se muestran las mallas utilizadas en cada caso Para

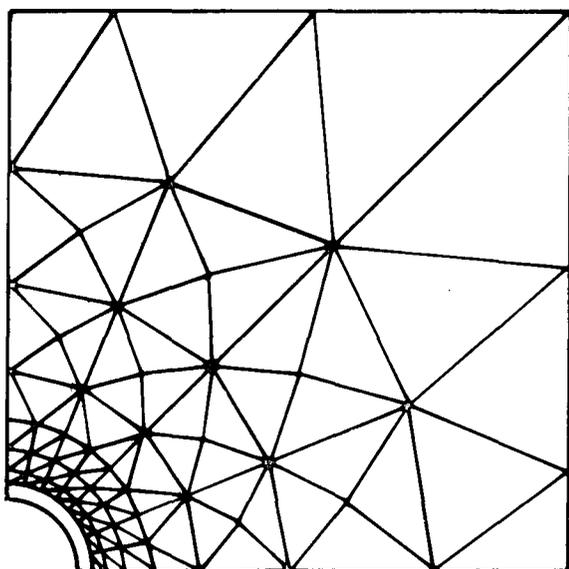


FIGURA 5. Malla usada en el caso elástico. Programa ELF.UN.

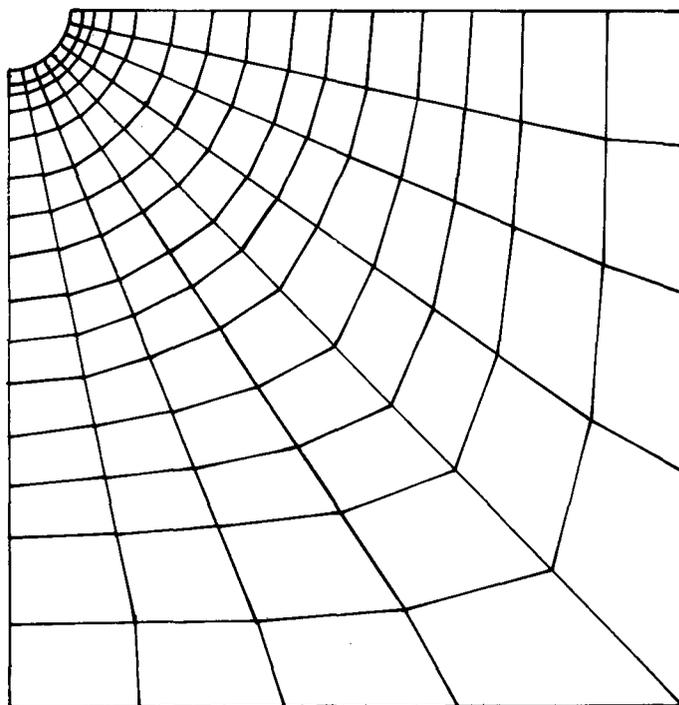
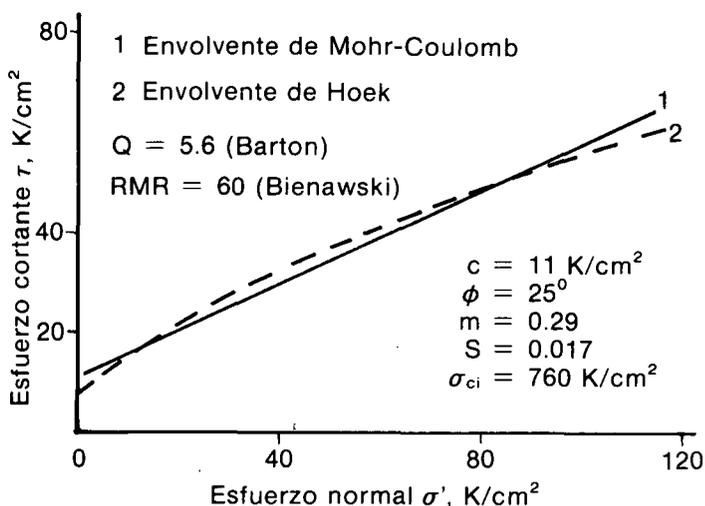
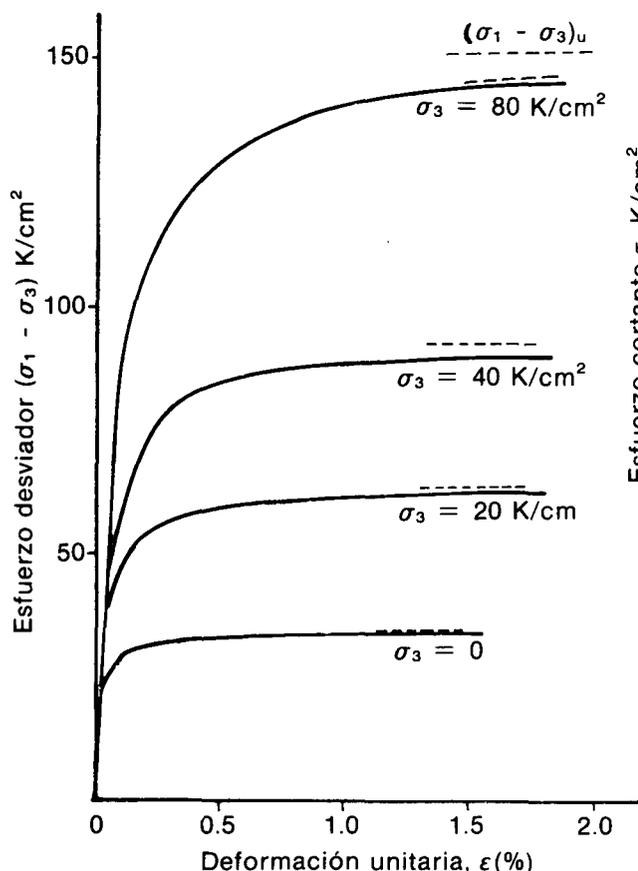


FIGURA 6. Malla usada en el caso no lineal. Programa FEADAM.

el programa ELF.UN la malla se extendió hasta 7 veces el radio de la excavación, dado que en condiciones elásticas la influencia de esta es significativa hasta unos 4 radios; la red empleada consta de un total de 84 nodos y 134 elementos. Para el programa FEADAM, teniendo en cuenta la posible presencia de zonas plásticas que extenderían la zona de influencia, se decidió adoptar una malla más grande que abarcara hasta 10 veces el radio del túnel; ésta consta de 153 nodos y 128 elementos.

En la Fig. 7 se indican los parámetros del macizo adoptados en los análisis. Para el refuerzo se consideró un comportamiento lineal elástico con una relación de Poisson de 0,25 y valores variables del módulo de Young. El análisis se realizó para un túnel circular con un radio de excavación de 2.15 mts. y un espesor de revestimiento de 0.3 mts, bajo



Análisis no lineal

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u}}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_u = (\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

Análisis lineal

$$E = E_i = 2 \times 10^5 \text{ K/cm}^2, \gamma = 0.21$$

FIGURA 7. Parámetros del macizo.

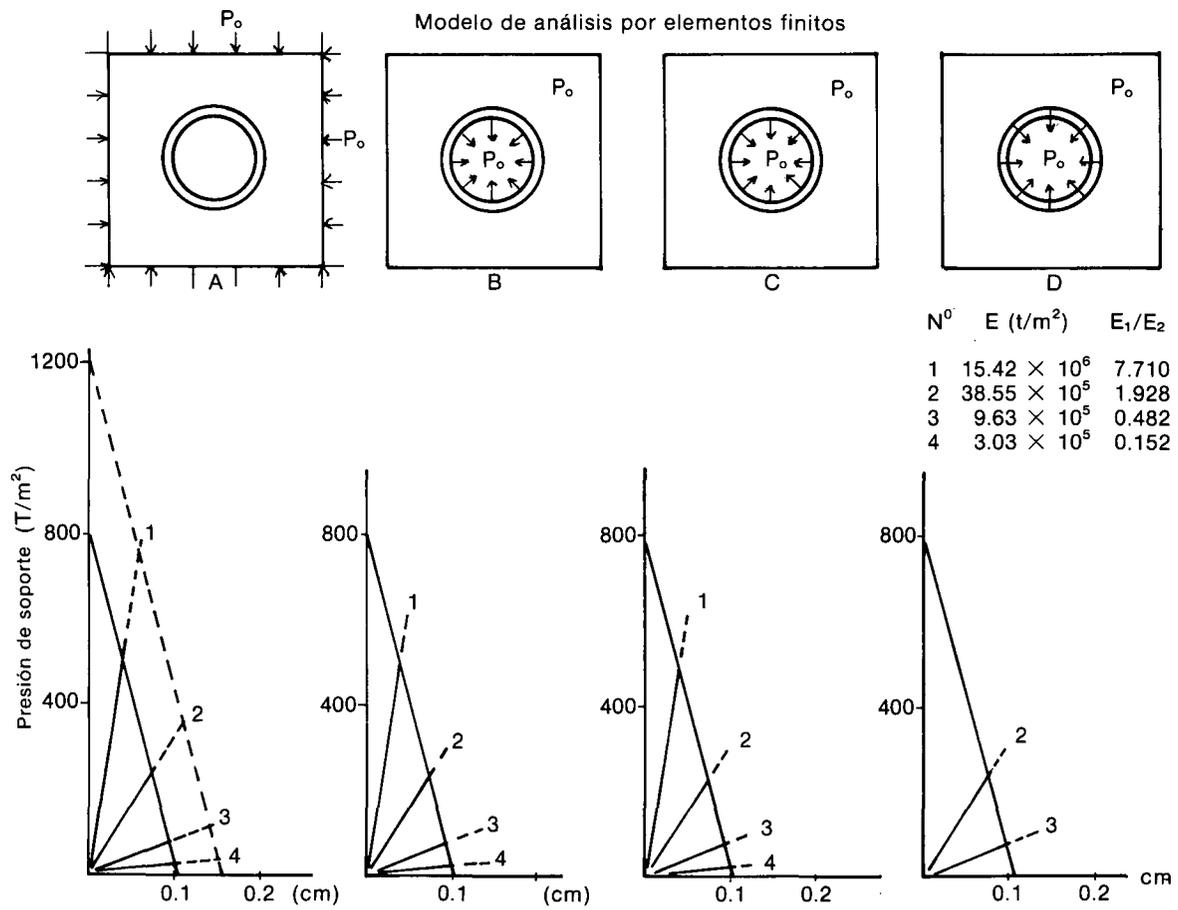


FIGURA 8. Modelo de análisis por elementos finitos.

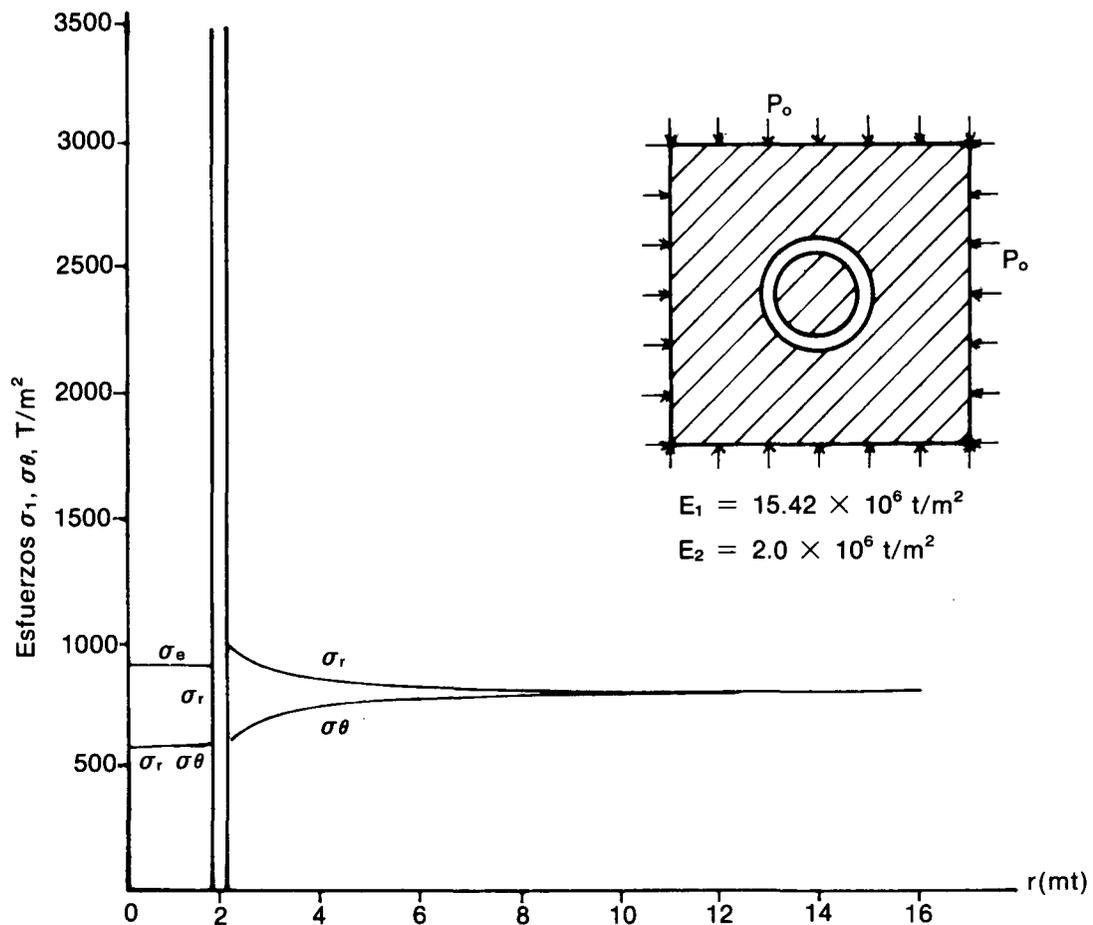


FIGURA 9. Efecto de un anillo en la distribución de esfuerzos en una placa sometida a cargas.  $\sigma_M = \sigma_v = P_0$

una sobrecarga de 300 mts. de roca con un peso unitario total de  $2.7 \text{ ton/m}^3$ . Se adoptó como esfuerzo vertical in situ  $\gamma h$  y como esfuerzo horizontal  $K_0 \gamma h$  con  $K_0 = 1$  y  $2$ .

### ANALISIS PARA EL CASO $K_0 = 1$

Para el estudio de este caso se decidió analizar el sistema roca-revestimiento, variando la rigidez del soporte con el propósito de obtener puntos que definan la curva de interacción.

Para verificar los modelos de elementos finitos, se procedió a establecer la curva característica del macizo en el caso lineal elástico y se obtuvieron las curvas de reacción del soporte siguiendo el lineamiento propuesto por Hoek, que se basa en la aplicación de la teoría de cilindros de pared gruesa.

#### Modelos de análisis

En la Fig. 8 se indican los modelos inicialmente adoptados para representar la excavación y el refuerzo del túnel. Los casos A y B son los que usualmente han sido utilizados en investigaciones del mismo tipo.

El caso A simula el problema considerando una placa de grandes dimensiones sometida en sus bordes exteriores a un estado de esfuerzos  $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = P_0$ , con un hueco circular y un refuerzo concéntrico. Se observa que los puntos obtenidos quedan ubicados sobre una curva paralela a la curva característica del terreno y sobre las curvas de reacción. En este caso hay una concentración de esfuerzos radiales en el contacto de  $1.5 P_0$ , para una rigidez infinita del soporte. Esto se debe a que la distribución de esfuerzos para el sistema de la placa con un hueco pre-existente cargada en la periferia no es correspondiente al caso real de la placa con un estado inicial de esfuerzos, los cuales son liberados en parte por la remoción del material. Con respecto a la distribución de desplazamientos es fácil ver cómo en este modelo son máximos en la frontera exterior, condición totalmente opuesta a la del caso que se desea representar. Si a las deformaciones obtenidas en este caso se les descuentan las obtenidas para una placa sin hueco, cargada en su exterior, se invierte la distribución de deformaciones (resultan nulas en las fronteras exteriores y máximas en el centro). Al ubicar los esfuerzos radiales y las deformaciones obtenidas, de esta manera los puntos quedarían localizados sobre la curva característica del terreno pero lejos de las posiciones de equilibrio con las curvas de reacción.

El caso B, consiste en aplicar en la frontera interior unas cargas hacia adentro, de magnitud igual a  $P_0$ , partiendo de una condición inicial de esfuerzos  $P_0$  en todos los elementos de la malla. En este caso los puntos quedan localizados sobre la curva característica de la roca y por encima de las intersecciones con las curvas de reacción. En vista de los anteriores resultados se consideraron los casos C y D, buscando encontrar las cargas equivalentes que se deberían aplicar para represen-

tar adecuadamente el efecto de la excavación. El caso C, considera las cargas equivalentes calculadas con un esfuerzo de  $P_0$  en el contacto roca-refuerzo, aplicadas en el borde interior del revestimiento. El caso D, considera estas mismas cargas, pero aplicadas en el contacto roca-refuerzo.

En ambos casos la distribución de desplazamientos es proporcional a la real y los puntos obtenidos se localizan sobre la curva característica de la roca, pero en ninguno de los dos coinciden con los puntos de equilibrio de la curva característica con las curvas de reacción; mientras en el caso C los puntos obtenidos quedaron por debajo de los de equilibrio; en el caso D, se localizaron por encima. Es importante indicar que en los casos B, C y D, tanto para la condición extrema de rigidez infinita del revestimiento, como para el caso en el que éste no exista, las soluciones obtenidas coinciden con la condición que se quiere representar.

Con el fin de obtener un método adecuado para el análisis con elementos finitos, se procedió a desarrollar la solución elástica, para el sistema formado por la roca y el revestimiento a fin de lograr directamente puntos de la curva de interacción, en lugar de considerar separadamente el refuerzo y la roca que es lo que se hace al superponer la curva característica de la roca con la de reacción del soporte.

En el anexo a este informe, se hace el desarrollo completo de la solución para el sistema roca-refuerzo, en un túnel circular en el que existía un estado de esfuerzos hidrostático inicial  $P_0$  que fue alterado por la excavación. Del análisis de la solución obtenida se concluye la completa validez de la superposición tal como es planteada por Hoek y otros. Posteriormente se hizo un análisis teórico para determinar cuáles serían las cargas aplicadas en el borde interior del refuerzo, que deben ser utilizadas en un análisis con elementos finitos, en el que se considere que todos los elementos parten de unos esfuerzos iniciales  $P_0$ , para que las respuestas de esfuerzos y deformaciones en la roca coincidan con los de la solución teórica.

En el anexo se presenta la solución para estas cargas equivalentes. Se observa que ellas dependen del radio de excavación, del espesor del revestimiento y de las propiedades elásticas de la roca y del refuerzo.

Se hicieron varios intentos para hallar las cargas equivalentes por utilizar con los elementos finitos a partir de análisis con esta misma técnica. En la Fig. 9 se muestran los resultados de uno de los casos considerados; se pensó que las cargas equivalentes corresponderían a esfuerzos que se presentan por efecto de la aplicación de unos esfuerzos  $\sigma_x = \sigma_y = P_0$  en el contorno de una placa de grandes dimensiones, que contiene un anillo de propiedades diferentes. Se observa en dicha figura que los esfuerzos obtenidos en la zona rodeada por el anillo, difieren de los de las cargas equivalentes. No fue posible encontrar una manera de obtener estas cargas a partir de algún análisis con elementos finitos.

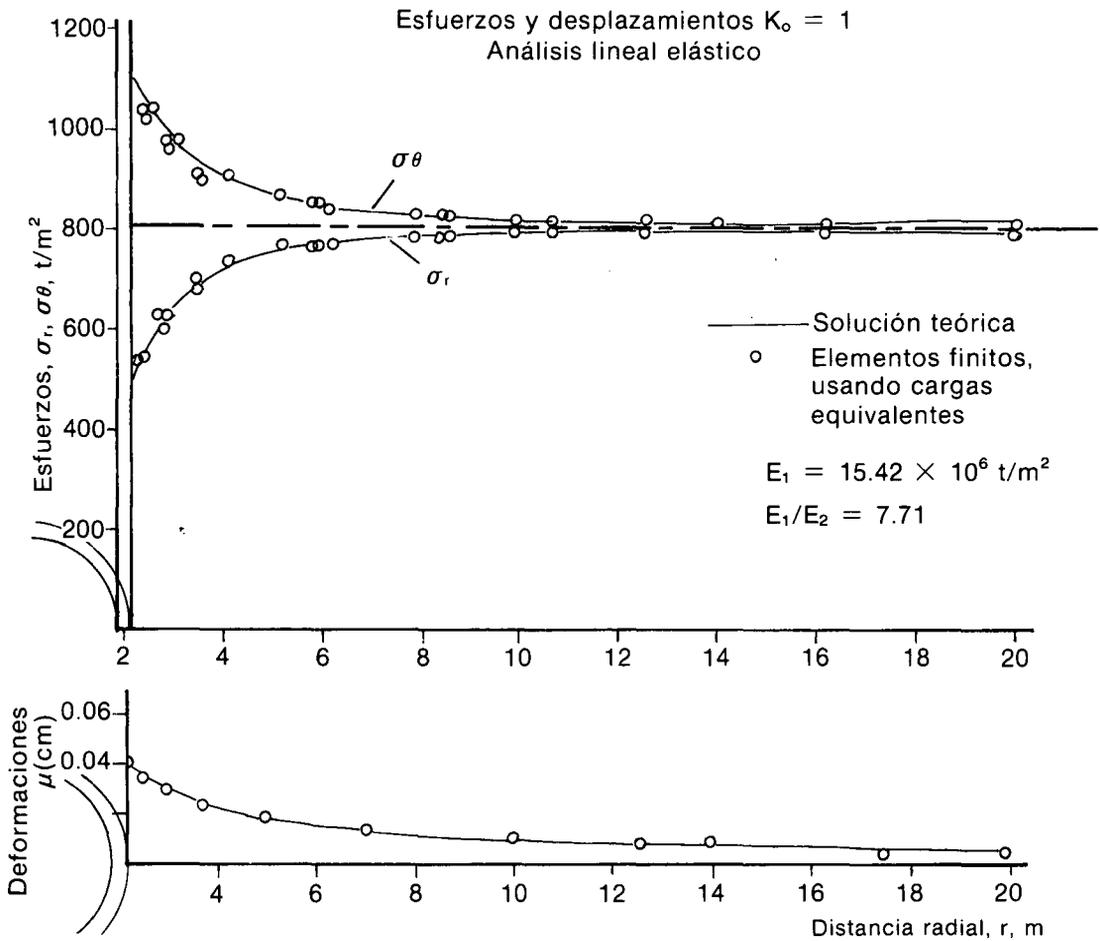


FIGURA 10.

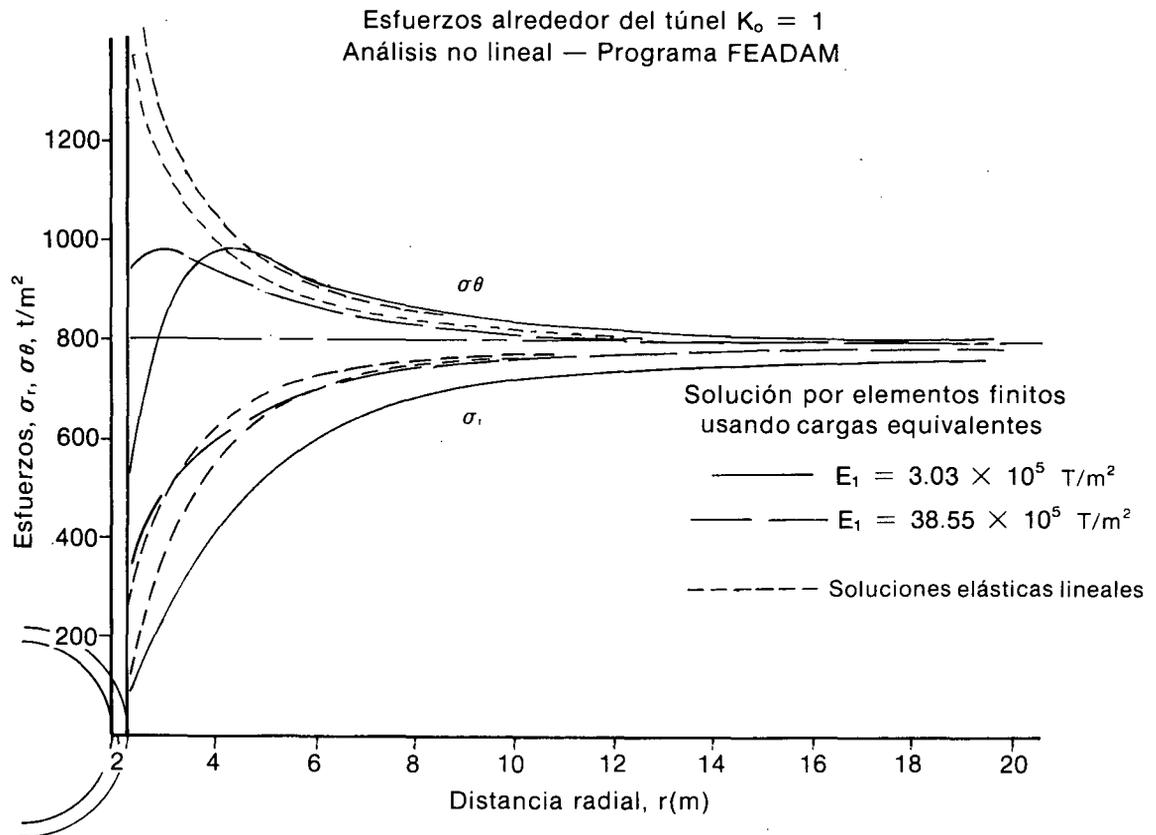
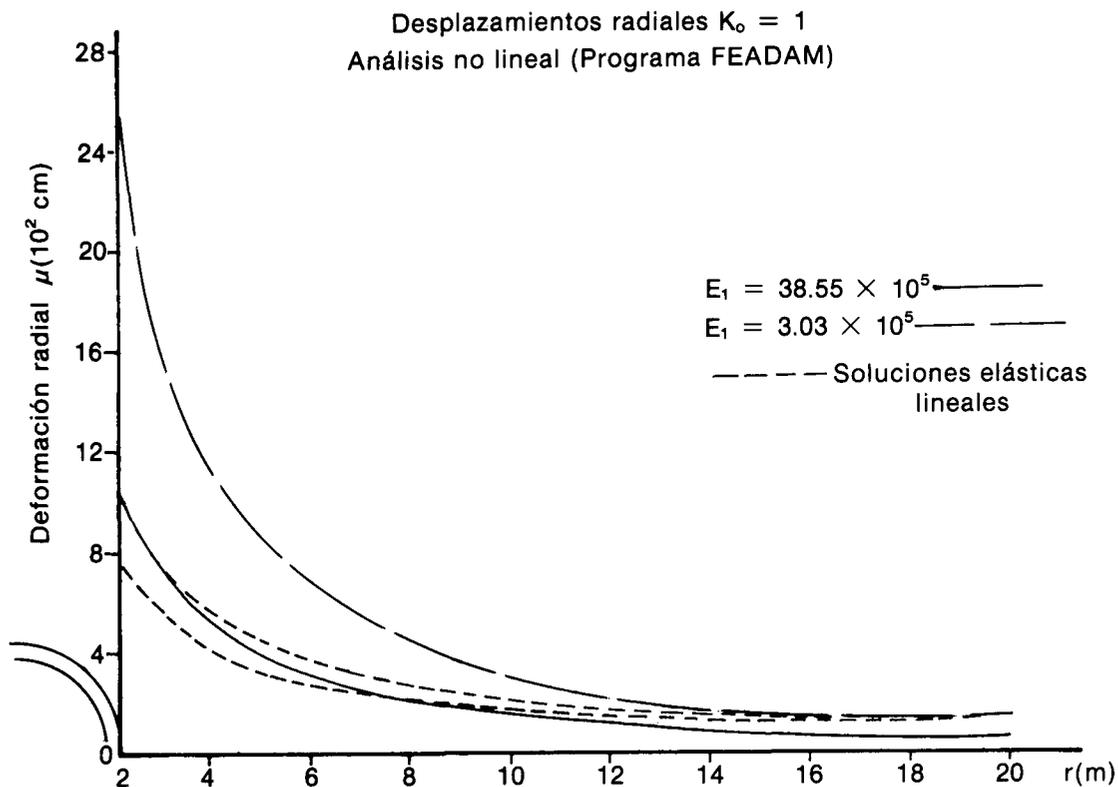


FIGURA 11.



### Análisis de resultados

Usando el programa ELF.UN con las cargas equivalentes, se corrieron casos para diferentes valores de rigidez  $E_1$  del refuerzo. En la Fig. 10 se presentan los resultados de esfuerzos y deformaciones para el caso  $E = 15.42E06$  ton/m<sup>2</sup>. Se observa la gran concordancia de los valores obtenidos del análisis con elementos finitos y la solución teórica desarrollada. En la vecindad del refuerzo se presentan ligeras desviaciones en los resultados, lo cual se atribuye a las limitaciones inherentes del modelo con elementos triangulares.

Usando el programa FEADAM con las cargas equivalentes, se realizaron corridas para valores de módulo de Young del refuerzo  $E_1 = 38.55E05$  y  $3.03E05$  T/m<sup>2</sup>.

En la Fig. 11 se presentan los resultados del esfuerzo radial y circunferencial, en términos de la distancia radial. De la comparación de los resultados con los del caso anterior, se observa cómo, dado que en la vecindad del refuerzo, las diferencias de esfuerzos principales  $\sigma_\theta - \sigma_r$  obtenidos en condiciones elásticas, no pueden ser soportadas por el macizo, se produce una redistribución de esfuerzos, reduciéndose apreciablemente el esfuerzo circunferencial. Sin embargo, para el caso de  $E_1 = 38.55E05$  T/m<sup>2</sup>, con los esfuerzos resultantes, ningún punto del macizo se encuentra en estado de falla, mientras que en el caso de  $E_1 = 3.03E05$  T/m<sup>2</sup> hasta una distancia radial de unos 3,20 mts, sí se presenta esta condición. Este valor coincide bastante bien con los radios de la zona plástica, obtenidos a partir de las teorías de Hendron y Ladanyi-Hoek (3.60 y 3.30 mt. respectivamente). Mientras que en estas soluciones la disminución del esfuerzo circun-

ferencial se presenta a partir del radio de la zona plástica, en nuestro caso en el que se considera una curva esfuerzo-deformación hiperbólica, el punto de máximo esfuerzo circunferencial, está a una distancia del centro mayor que el radio de la zona plástica.

En la Fig. 12 se presentan los resultados de los desplazamientos radiales para los dos casos analizados; los desplazamientos obtenidos en el caso no lineal son mayores que los correspondientes a la condición lineal. Para valores altos de  $E_1$ , la diferencia entre la solución lineal y la no lineal, no es tan significativa, mientras que para valores bajos de  $E_1$ , casos en los que se presentan zonas en estado de falla, esta diferencia aumenta considerablemente. En este caso, la mayor parte de los desplazamientos son los producidos en la zona fallada.

Para el caso no lineal, dado que las cargas equivalentes se aplicaron por incrementos con el fin de hacer un mejor seguimiento del comportamiento esfuerzo-deformación del macizo, se obtuvo información a diferentes niveles de esfuerzos para el desarrollo de las trayectorias. En la Fig. 13 se presentan las trayectorias de esfuerzos en el contacto roca-revestimiento para dos rigideces del refuerzo; dado que en condiciones elásticas el aumento del esfuerzo circunferencial es igual a la reducción del esfuerzo radial, la trayectoria de esfuerzos es una línea recta vertical, que como se observa en la figura, puede superar a la línea  $Kf$  y por tanto no puede ser seguida si se considera un criterio de falla. En condiciones no lineales, la trayectoria de esfuerzos se inicia en forma vertical y se desplaza hacia la izquierda hasta alcanzar la línea  $Kf$ , continuando sobre ella para mayores esfuerzos

desviadores. Se observa además que aun para el caso en el que no se presenta una condición de falla ( $E_1 = 38.55E05 \text{ T/m}^2$ ), la trayectoria se aleja de la vertical por efecto de la curvatura de la relación esfuerzo-deformación del material. También vale la pena anotar que el hecho de que los esfuerzos obtenidos en condiciones elásticas superen el criterio de resistencia, no implica que en condiciones elasto-plásticas se presente una condición de falla, debido a la redistribución de esfuerzos que se produce.

Con el fin de hacer una comparación de resultados, se presentan en la Fig. 14 las curvas características del macizo propuestas por Hendron, por Ladanyi-Hoek y la elástica lineal, así como las curvas de reacción para los módulos de Young del refuerzo adoptados y los resultados de los análisis con elementos finitos. Del estudio de esta figura se concluye, en primer lugar, que los puntos obtenidos del análisis lineal, utilizando las cargas equivalentes, coinciden perfectamente con la intersección de la curva característica y las curvas de reacción, lo que indica que en estas condiciones la curva característica del terreno es una verdadera curva de interacción. Los puntos obtenidos del análisis no lineal, se separan desde el comienzo de la curva

característica lineal, debido a que en este caso en ningún momento el comportamiento del material es lineal. Esto marca una diferencia con las soluciones de Hendron y Hoek, las cuales se separan de la curva lineal a partir de una presión de soporte crítica que marca el comienzo de las deformaciones plásticas en la roca. De la información de la figura se concluye la gran influencia que tienen en el análisis las características esfuerzo-deformación asumidas para el comportamiento de la roca, en los desplazamientos obtenidos. Es pertinente anotar que ni en la solución teórica, ni en los análisis con elementos finitos, se ha tenido en cuenta el peso del material en estado de falla.

**ANALISIS PARA EL CASO  $K_0 \neq 1$**

En las Fig. 15 y 16 se presentan los resultados de mediciones de esfuerzos in-situ realizadas en diferentes regiones del mundo (Hoek y brown, 1980). En la primera se presenta la variación del esfuerzo vertical con la profundidad. Se observa que a pesar de la alta dispersión, son muchos los casos en los que el esfuerzo vertical resulta ser  $\gamma h$ . En la segunda se presenta la variación del coeficiente de esfuerzo lateral  $K_0$  contra la profundidad, se aprecia cómo hasta profundidades de unos 1.000

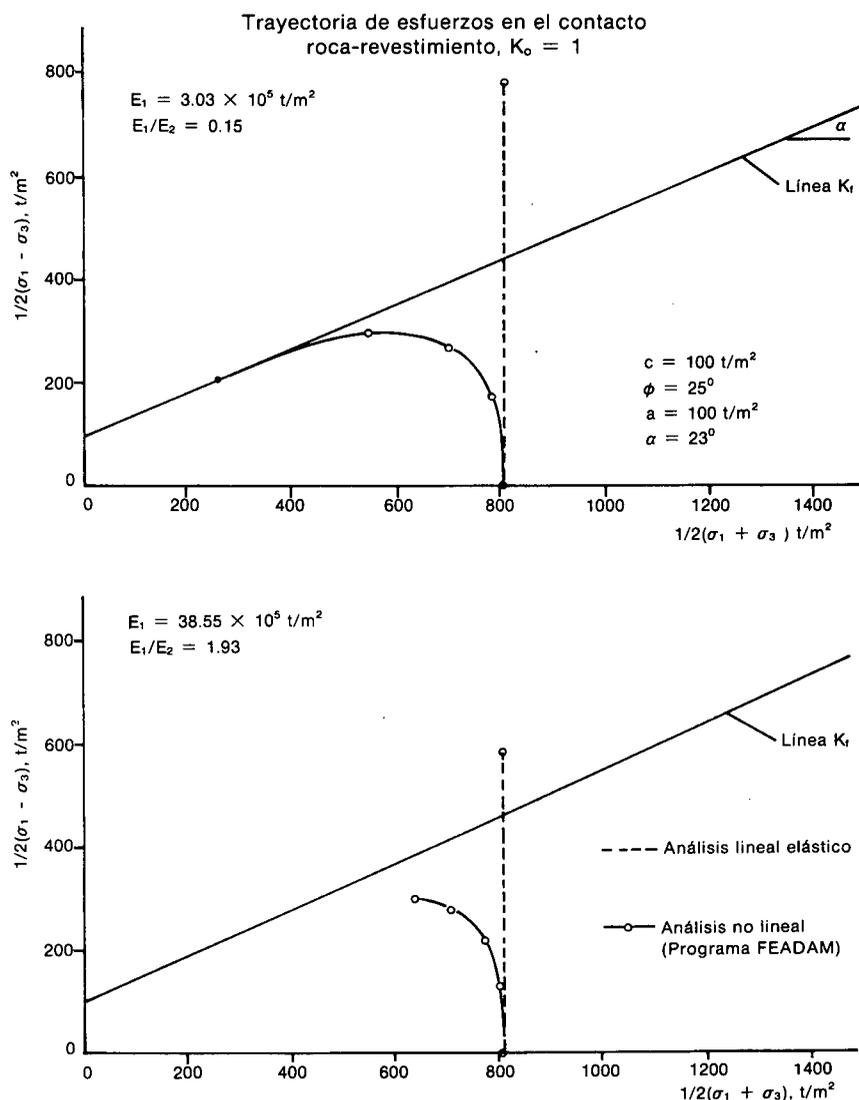


FIGURA 13.

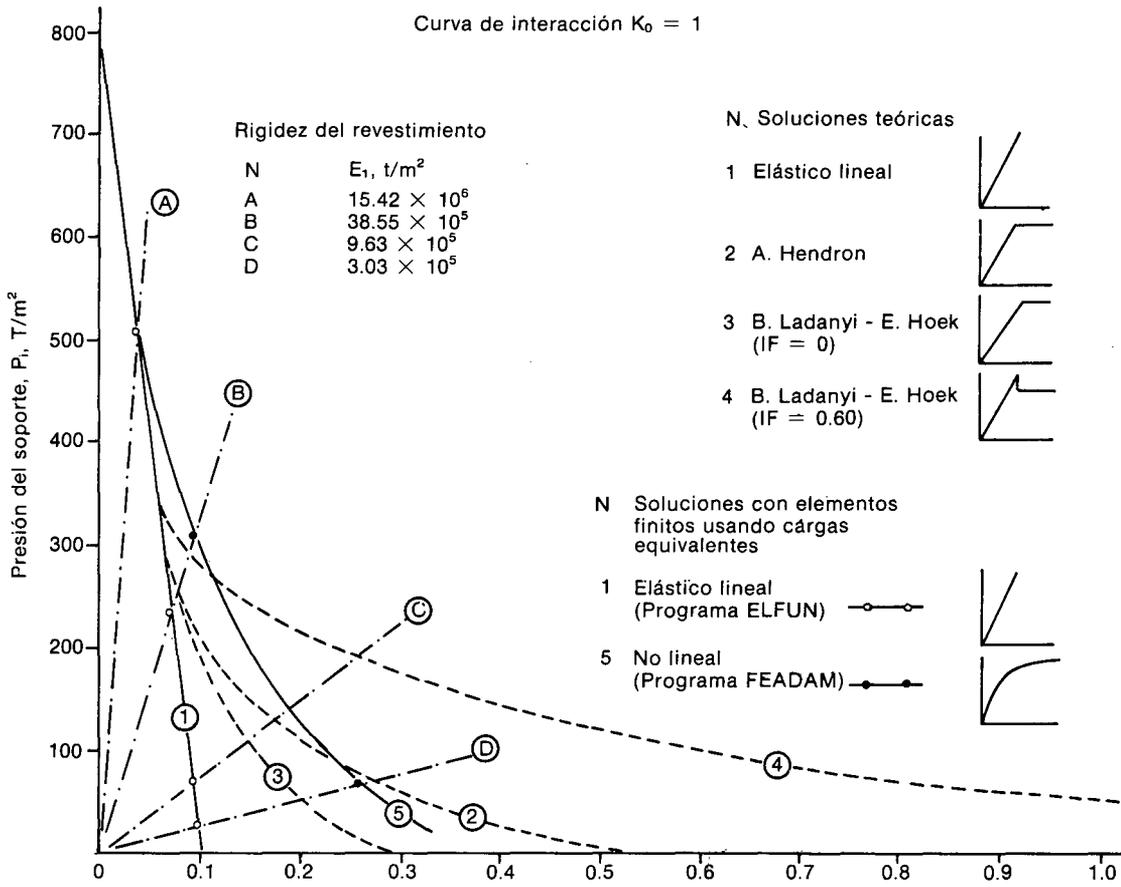


FIGURA 14. Deformación radial en el contacto roca revestimiento,  $\mu$ , (cm).

metros este coeficiente es en general mayor que uno y se registran valores hasta de 3.4; un valor característico para estas profundidades podría ser el de  $K_0 = 2$ . Para mayores profundidades este coeficiente disminuye a valores próximos a uno. En este trabajo, se realizaron los análisis para el caso de  $K_0 = 2$ . Estos comprendieron el desarrollo de la

solución elástica lineal para el sistema roca-esfuerzo en un túnel circular, así como la determinación de las cargas equivalentes que deben aplicarse en el borde interno del revestimiento en un análisis con elementos finitos; en el cual se parte de un estado de esfuerzos inicial  $\sigma_{y0}, \sigma_{x0} = K_0\sigma_{y0}$  y además se realizaron los correspondientes análisis

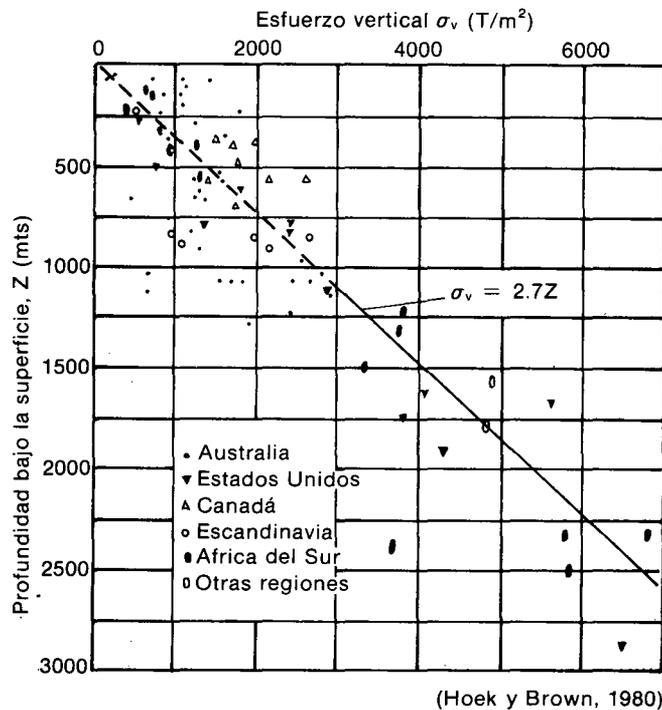


FIGURA 15. Variación del esfuerzo vertical con la profundidad.

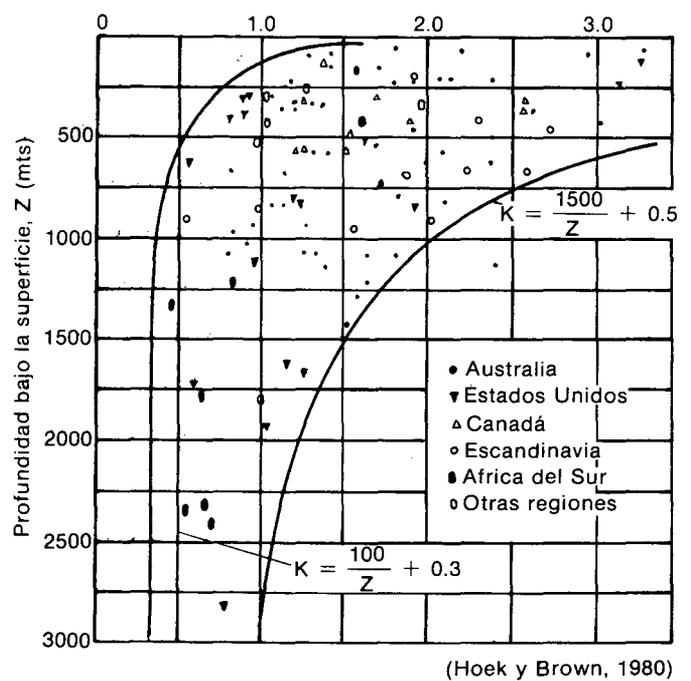


FIGURA 16. Variación del coeficiente del esfuerzo lateral con la profundidad.

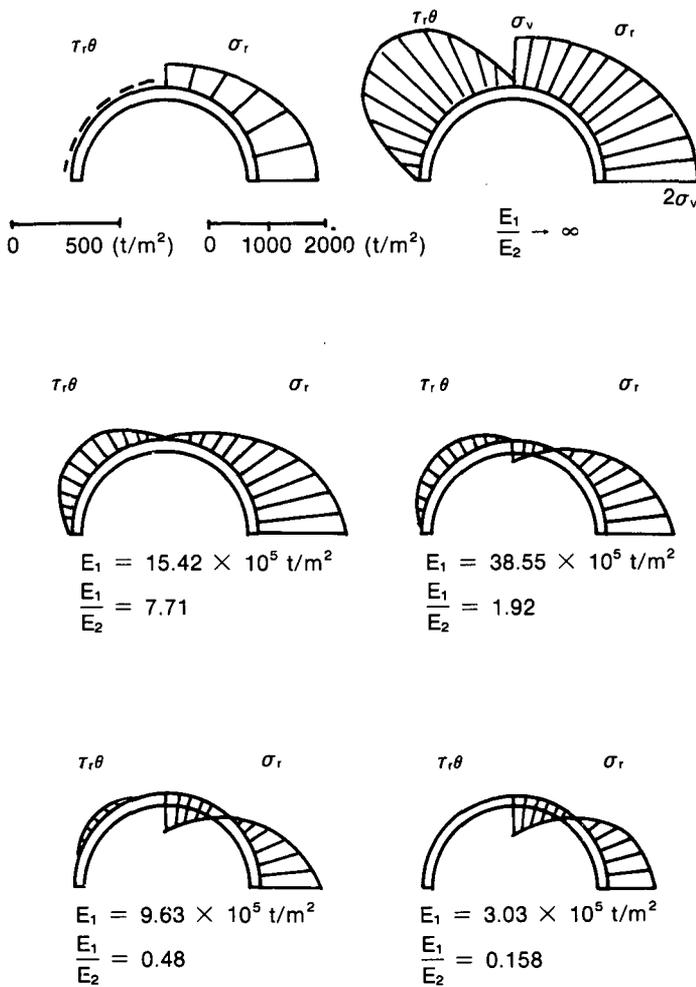


FIGURA 17. Esfuerzos sobre el revestimiento Análisis lineal elástico  $K_0 = 2$ , ( $\sigma_r = 810 \text{ T/cm}$ )

con elementos finitos.

En este caso, que resulta ser una generalización del anterior, se tienen esfuerzos cortantes, desplazamientos circunferenciales y distorsiones angulares tanto en la roca como en el refuerzo, lo que hace más complejo el análisis, ya que los esfuerzos y desplazamientos varían con la posición radial y angular. En este caso no se puede hablar de una curva característica del terreno puesto que conforme se varía la rigidez del revestimiento, las presiones sobre el soporte varían no solo en magnitud sino también en la forma de su distribución. Por lo anterior tampoco se puede hablar de curvas de reacción del soporte y el problema solo se puede atacar considerando el sistema roca-refuerzo, sin la posibilidad de aplicar algún tipo de superposición.

Un modelo de análisis con elementos finitos, consistente en aplicar unos esfuerzos en la frontera exterior de una placa de grandes dimensiones con un hueco y un anillo concéntricos, conduce a resultados totalmente diferentes a los reales. (También para este caso se obtuvo la solución teórica). Alternativas consistentes en la aplicación de cargas correspondientes a los esfuerzos iniciales en el borde interior del refuerzo, a diferencia del caso de  $K_0 = 1.0$ , en el cual las respuestas, si bien no son las reales resultan cercanas a éstas, en este las

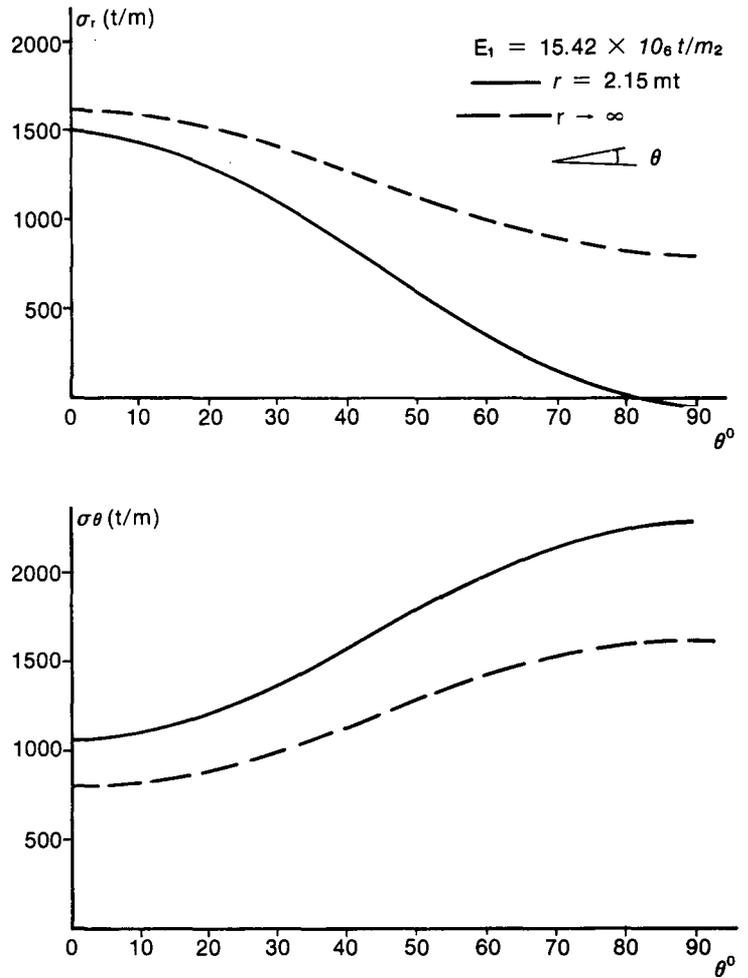


FIGURA 18. Esfuerzos en la roca  $K_0 = 2$  Análisis lineal elástico

respuestas obtenidas difieren completamente de las verdaderas. (También para este caso se obtuvo la solución analítica y se realizaron corridas con el ELF.UN). La única forma de atacar el problema con elementos finitos es la de aplicar las cargas equivalentes obtenidas de una manera análoga al caso  $K_0 = 1$ . En el anexo se presentan las ecuaciones a partir de las cuales se pueden obtener estas cargas, que consisten en esfuerzos radiales y cortantes que varían con la posición angular.

### Análisis de resultados

Usando el programa ELF.UN con las cargas equivalentes se hicieron corridas para diferentes valores del módulo de formación del refuerzo. En la Fig. 17 se presenta la variación de la magnitud y distribución de los esfuerzos actuantes sobre el refuerzo. Al reducirse la rigidez del revestimiento se presenta una disminución del esfuerzo radial especialmente en el techo, en donde llega a convertirse en esfuerzo de tracción. Por tanto la forma de la distribución se modifica completamente. Los esfuerzos cortantes actúan en dirección de la pared hacia el techo con una distribución sinusoidal, nula para  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$  con amplitud máxima a  $45^\circ$ ; que se reduce a medida que se rebaja la rigidez del refuerzo, llegando a ser casi cero para valores bajos de  $E_1$ . En la Fig. 18 se indica la variación de los esfuerzos

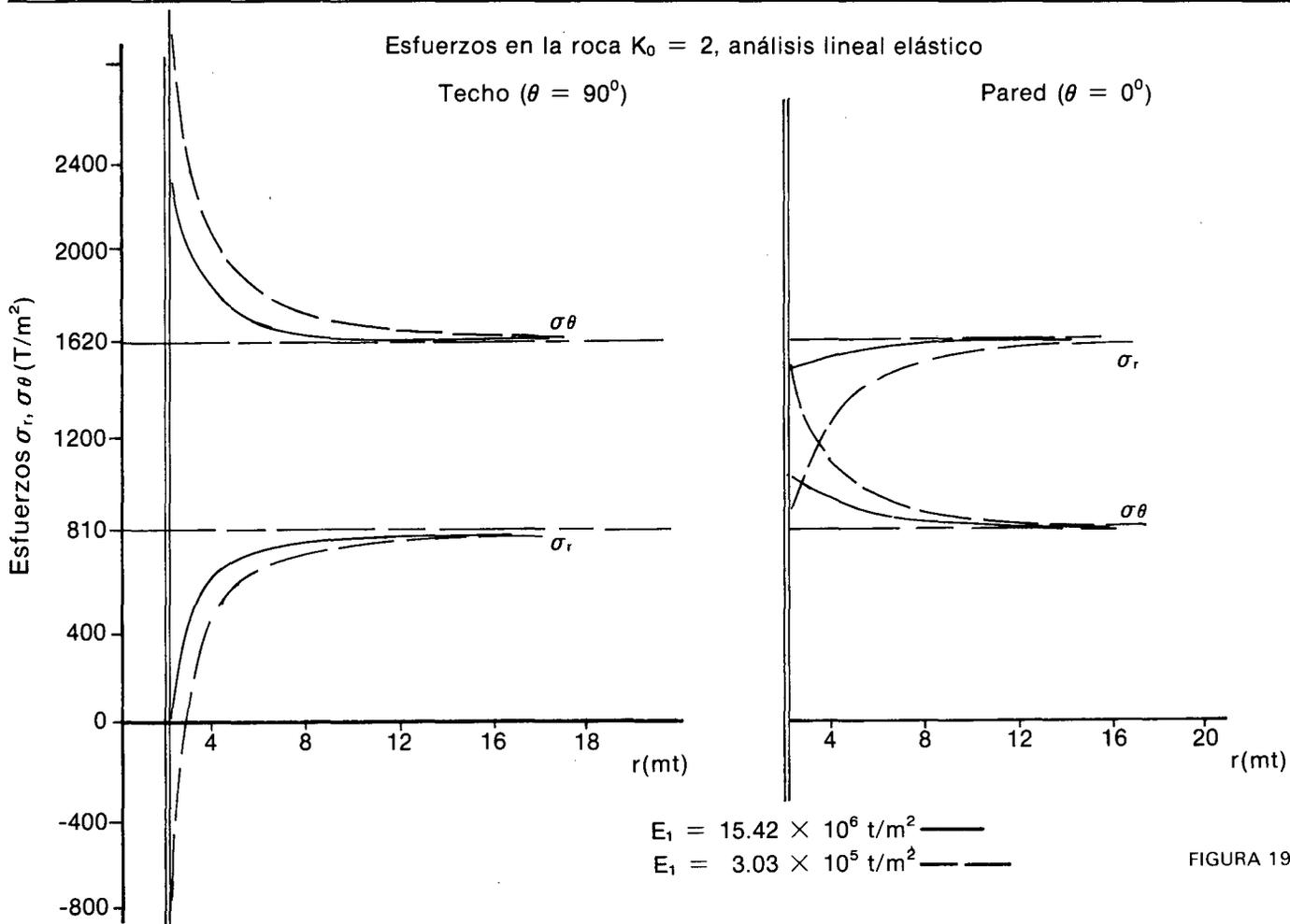


FIGURA 19.

Desplazamientos radiales  
 $K_0 = 2$ ,  
 análisis lineal elástico

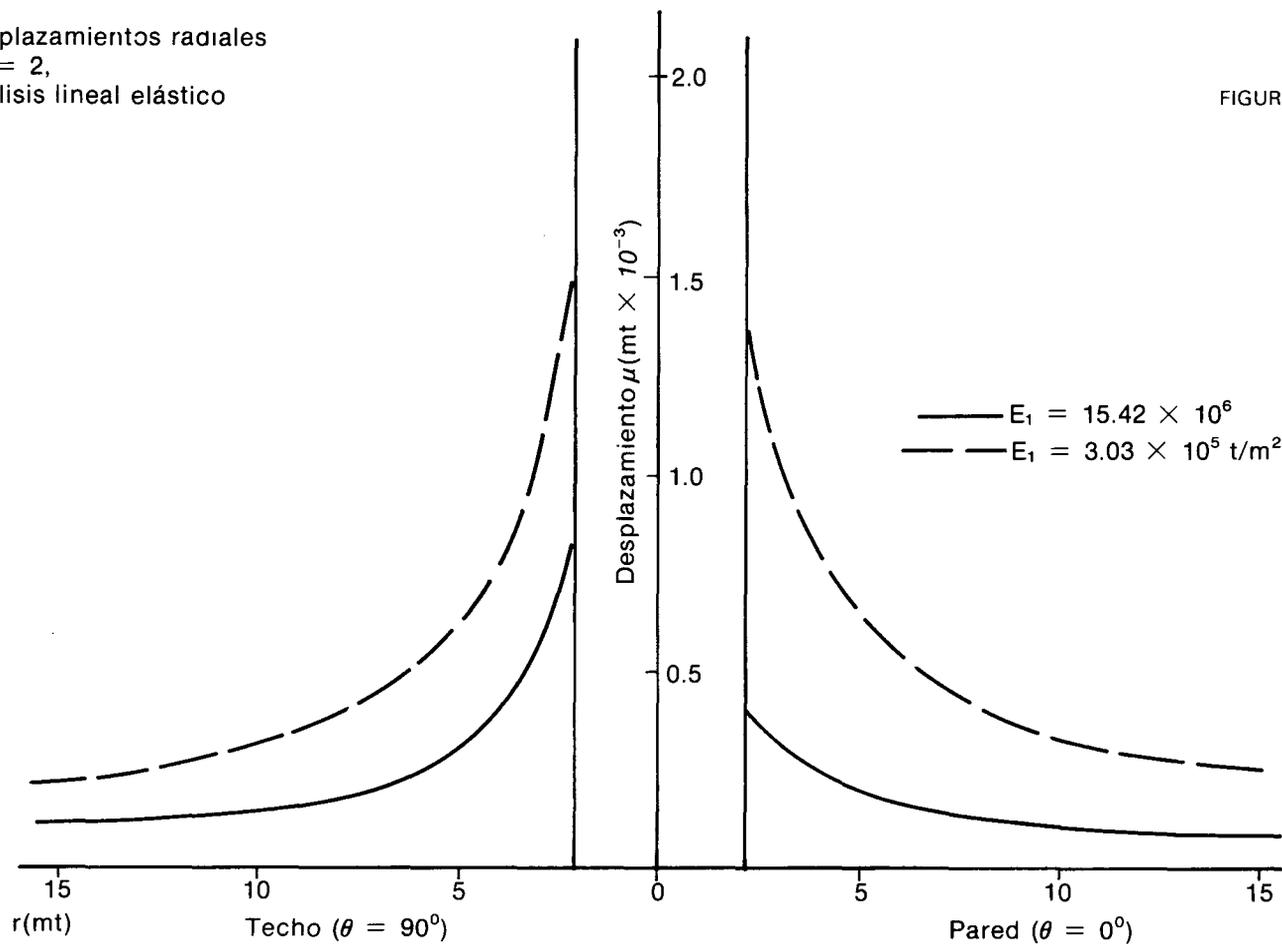


FIGURA 20.

radiales y circunferenciales sobre el refuerzo con la posición angular, comparados con los de la condición inicial que son los que se presentan a una gran distancia de la excavación; para una rigidez  $E_1 = 15.42E06 \text{ T/m}^2$  se observa cómo los esfuerzos radiales disminuyen con relación a su valor inicial, mientras que los esfuerzos circunferenciales aumentan.

En la Fig. 19 se presenta la variación de los esfuerzos en la roca  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  con la distancia radial, para el techo ( $\theta = 90$ ) y la pared ( $\theta = 0$ ). Para estas posiciones, dado que el esfuerzo cortante es cero, estos son esfuerzos principales. Se observa cómo en el techo la combinación de esfuerzos es bastante desfavorable, ya que el esfuerzo principal menor  $\sigma_r$  se reduce con respecto a su valor inicial  $\sigma_{y0}$ , mientras que el esfuerzo principal mayor  $\sigma_\theta$  aumenta con respecto a su valor inicial  $2\sigma_{y0}$ . La diferencia de esfuerzos principales  $\sigma_\theta - \sigma_r$  es mayor en proximidades del refuerzo y aumenta al reducirse  $E_1$ . En la pared, la combinación de esfuerzos es favorable, ya que el esfuerzo radial, que a grandes distancias es el principal mayor, disminuye, mientras que el circunferencial que a grandes distancias es el principal menor, aumenta.

En la Fig. 20 se presenta el desplazamiento radial en función de la distancia para el techo y la pared del túnel. Se observa que en ambos casos se trata de desplazamientos convergentes, siendo ligeramente mayores en el techo. Estos resultados son opuestos a los que se obtienen en el análisis del caso de la placa de grandes dimensiones a la que se aplican unos esfuerzos  $\sigma_{y0}, \sigma_{x0} = K_0\sigma_{y0}$  en su frontera exterior. En esta figura se observa que en el techo la solución con elementos finitos presenta desviación con respecto a la solución teórica, que es mayor a medida que la rigidez  $E_1$  del refuerzo es menor. Estas

desviaciones se atribuyen a la incapacidad de los elementos triangulares para representar adecuadamente la gran concentración de esfuerzos que se presenta en esta zona, efecto que se ve incrementado para valores pequeños de  $E_1$  debido a las grandes diferencias entre los términos de la matriz de rigidez, lo que conduce a problemas de estabilidad numérica. Este problema está relacionado también con la numeración de los elementos de la malla.

En las Fig. 21 y 22 se presentan las distribuciones de desplazamientos obtenidas con el programa ELF.UN para dos rigideces extremas del revestimiento; se observa que en los dos casos la distribución es similar pero varía la amplitud de los desplazamientos. Mientras que en el caso de  $K_0 = 1$  la convergencia es radial, en este caso no lo es exactamente debido a la presencia de esfuerzos cortantes, que producen desplazamientos circunferenciales.

Utilizando el programa FEADAM se hicieron corridas para los casos de rigidez del soporte  $E_1 = 38.55E05$  y  $E = 3.03E05 \text{ T/m}^2$ , aplicando las cargas equivalentes. Considerando los resultados de esfuerzos en el techo obtenidos con el análisis lineal, se resolvió modificar los parámetros de resistencia del macizo, previendo que desde los primeros incrementos de carga se tuvieran puntos en estado de falla, con lo que el seguimiento de la relación no lineal esfuerzo-deformación no sería el más adecuado. Por tanto el intercepto de cohesión del macizo se aumento hasta  $368 \text{ T/m}^2$ , manteniendo el mismo ángulo de resistencia al corte adoptado para el caso  $K_0 = 1$ .

En la Fig. 23 se indica la variación de esfuerzos en la roca  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  con la distancia radial, en el techo y la pared del túnel, para los módulos de deformación considerados. Comparando estos resultados

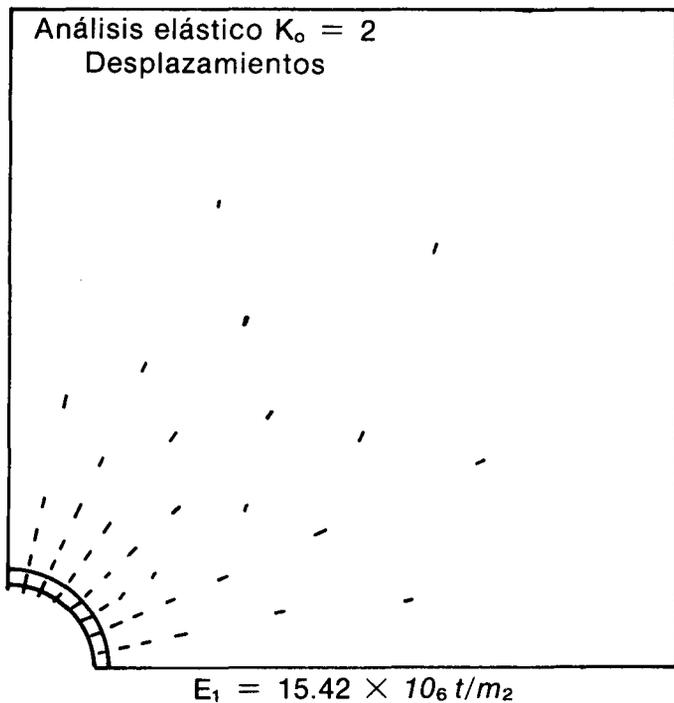


FIGURA 21.

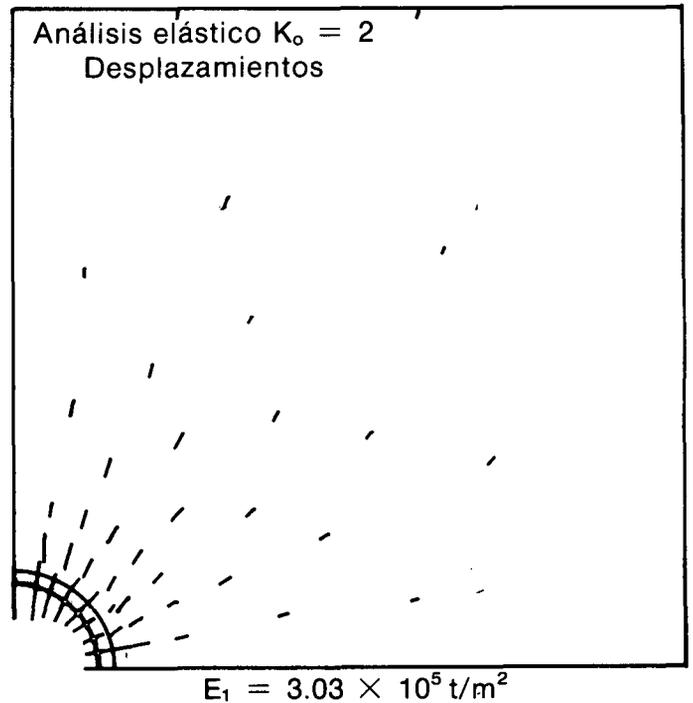


FIGURA 22.

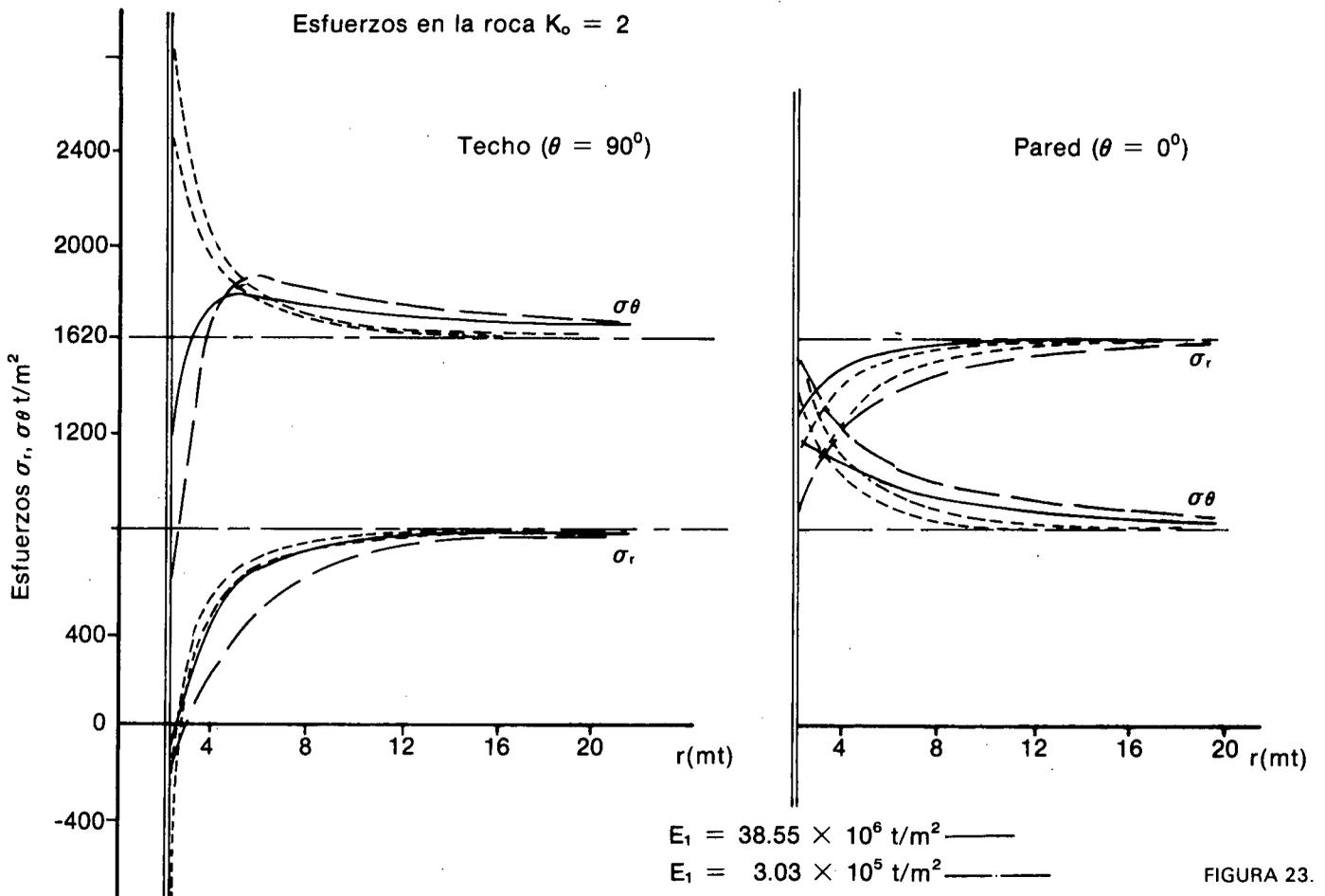


FIGURA 23.

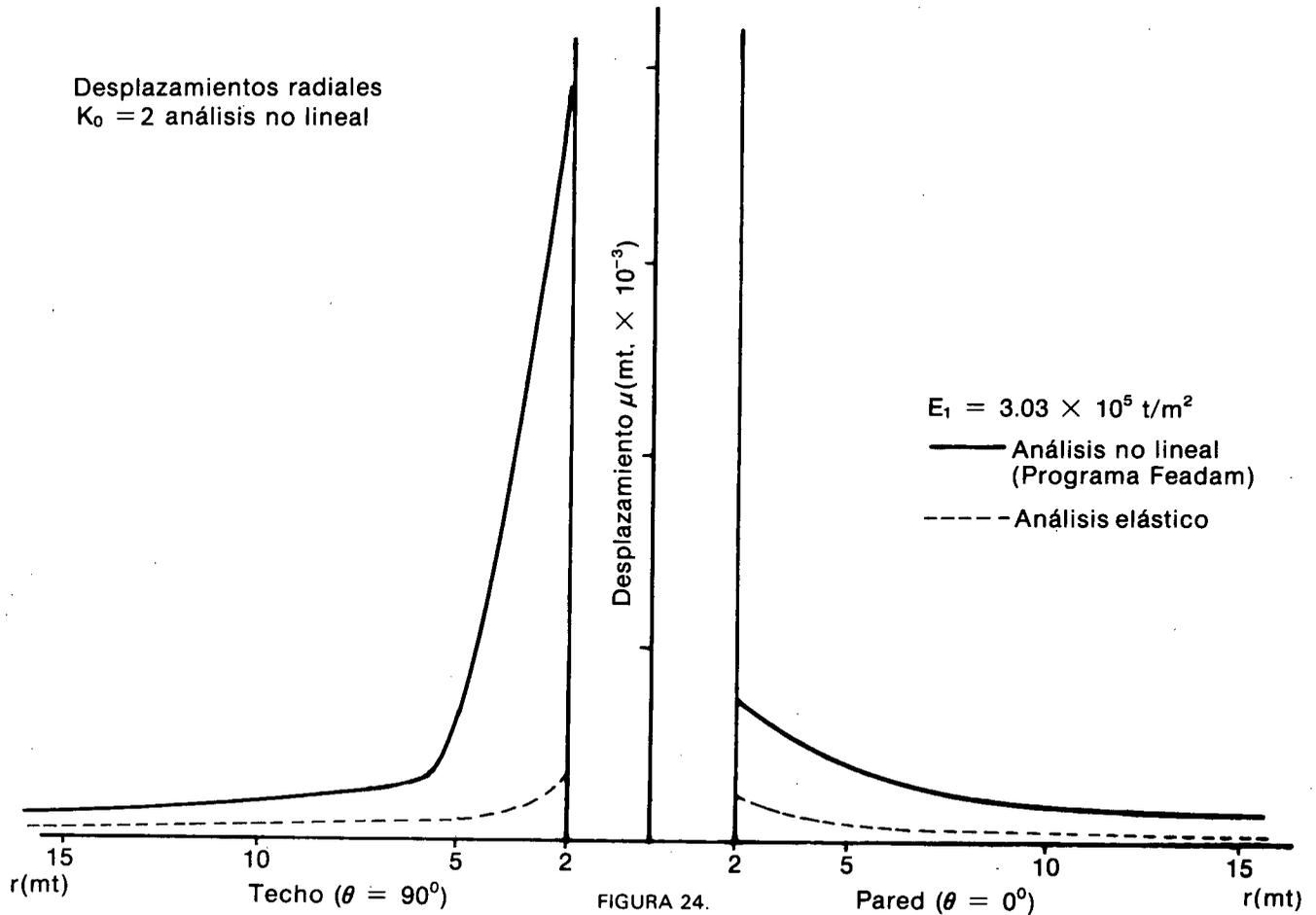


FIGURA 24.

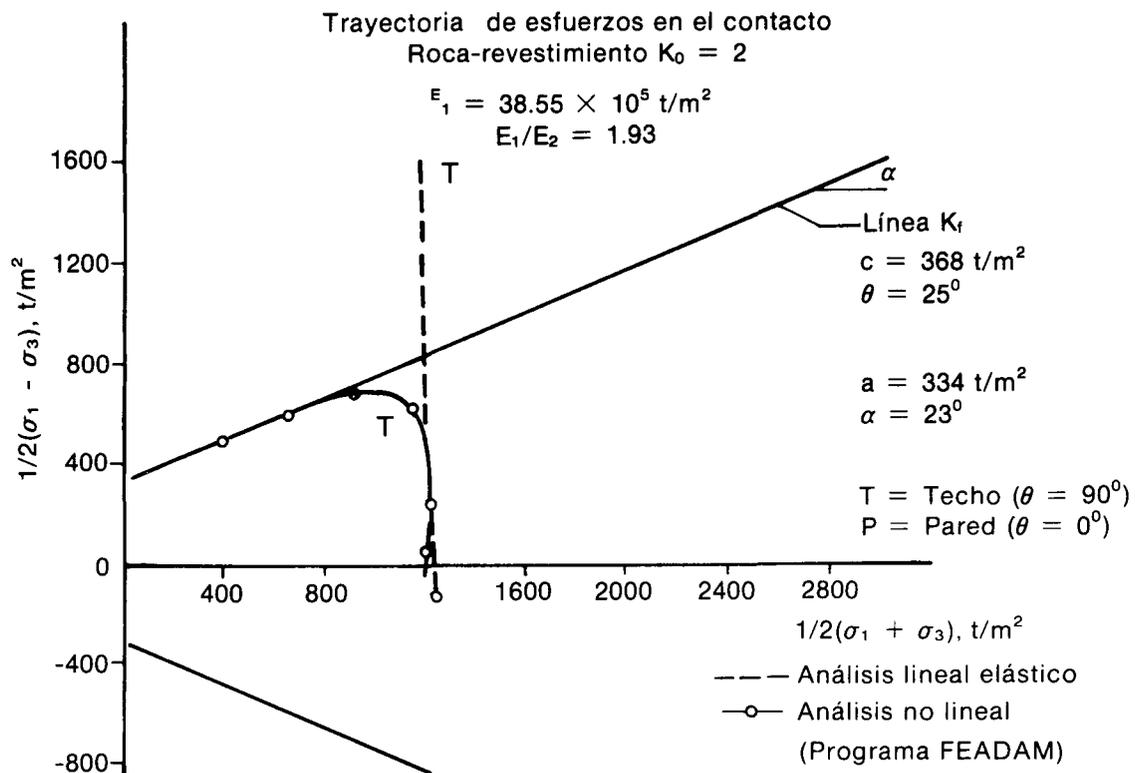


FIGURA 25.

con los obtenidos en condiciones lineales se observa la gran redistribución de esfuerzos que se produce en el techo de la excavación. En el contacto, el esfuerzo radial aumenta con relación al del caso elástico mientras que dentro de la roca resulta menor. El esfuerzo circunferencial disminuye considerablemente en cercanía del refuerzo limitándose la diferencia de esfuerzos principales por el criterio de falla considerado. Como en el caso de  $K_0 = 1$  la distancia hasta la cual se presenta una condición de falla es menor que la correspondiente al punto de máximo esfuerzo circunferencial. En la pared los esfuerzos obtenidos difieren menos de los del caso lineal, es decir, la redistribución de esfuerzos es menor debido a la combinación favorable de éstos en dicha zona.

En la Fig. 24 se comparan los desplazamientos radiales en el contacto roca revestimiento para  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$ , obtenidos en los análisis no lineal y lineal elástico, para el caso en el que el módulo de Young del refuerzo es de  $3.03E05 \text{ T/m}^2$ . En general, los desplazamientos son mayores en condiciones no lineales, especialmente en el techo en donde la mayor parte de éstos son producidos por las deformaciones de la zona en estado de falla. También se observa que en condiciones no lineales la zona de influencia de la excavación se extiende hasta distancias mayores.

Para lograr una mejor diferenciación entre los comportamientos no lineal y lineal elástico se presentan en las Fig. 25 y 26 las trayectorias de esfuerzos obtenidas en el contacto roca revestimiento para valores de  $E = 30.55E05$  y  $3.03E05 \text{ T/m}^2$  en el techo y la pared respectivamente. En este caso de  $K_0 = 2$  las trayectorias de esfuerzos se inician a partir del punto correspondiente a los esfuerzos iniciales. Para el caso lineal en el techo la

trayectoria es vertical y hacia arriba, superando ampliamente a la línea  $K_f$  en ambos casos, mientras que para el caso no lineal la trayectoria se inicia tangente a la elástica y se curva hacia la izquierda, alcanzando muy rápidamente a la línea  $K_f$  continuando sobre ella hasta mayores distancias conforme se reduce la rigidez del refuerzo. En la pared, la trayectoria es hacia abajo llegando a presentarse la inversión de los esfuerzos principales. En este caso el punto final en condiciones elásticas queda por debajo del correspondiente al caso no lineal que está ligeramente desplazado hacia la izquierda y ambos alejados de la envolvente de falla.

### CONCLUSIONES

En este trabajo se ha podido comprobar cómo la técnica de los elementos finitos constituye una herramienta poderosa para el estudio de infinidad de problemas. Sin embargo, la formulación de los modelos puede ser complicada. Por otra parte, el carácter aproximado de las soluciones obtenidas hace que la exactitud de éstas dependa de factores tales como el tipo de elementos y funciones de interpolación que se utilicen, la discretización de las mallas, la numeración de los elementos y la precisión de los equipos utilizados. Los elementos isoparamétricos han demostrado ser más eficientes que los triangulares encontrándose menores desviaciones especialmente en aquellas zonas en donde se presentan grandes concentraciones o cambios bruscos en los esfuerzos, donde para obtener respuestas acertadas con elementos triangulares, se requeriría una discretización muy fina en las mallas.

En la literatura consultada se encuentra que se ha simulado de manera incorrecta el proceso de la excavación y refuerzo de túneles; ya que como se analizó en este trabajo, modelos consistentes en la

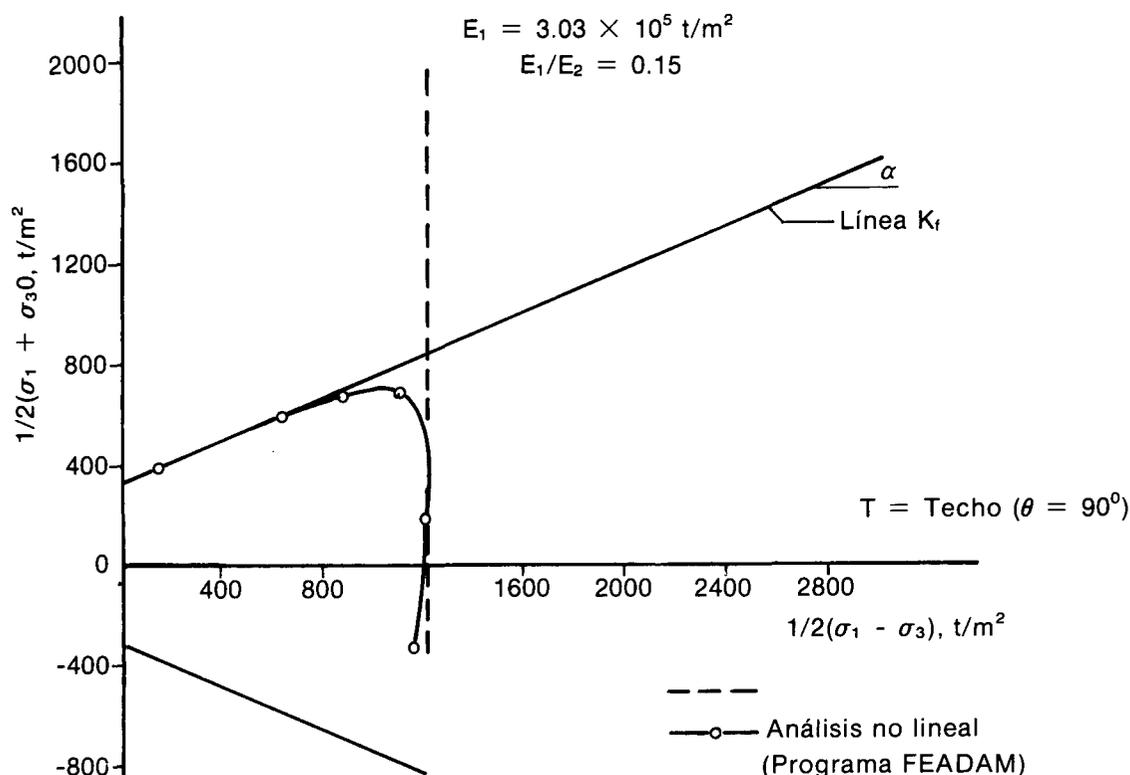


FIGURA 26.

aplicación de cargas externas a una placa de grandes dimensiones, o los que aplican las cargas correspondientes al estado inicial de esfuerzos en la frontera interior del revestimiento, considerando la condición de esfuerzos inicial en los elementos de la malla, conducen a respuestas incorrectas en todos los casos, especialmente si el coeficiente de esfuerzos laterales es diferente de 1.0.

Para análisis con elementos finitos, se recomienda utilizar las cargas equivalentes, las cuales tienen la limitación de haber sido obtenidas para condiciones elásticas y solamente para secciones circulares. Además con estas cargas se obtienen las respuestas correctas de esfuerzos y desplazamientos en el macizo pero no dentro del refuerzo, sin embargo puede hacerse el análisis de éste discretizando y aplicando las cargas resultantes en la interfase, obtenidas del análisis de la roca.

En este trabajo los análisis se realizaron para la condición en la que el refuerzo se coloca inmediatamente después de construida la excavación, sin permitir ninguna deformación. Además se consideró que las deformaciones fueran independientes del tiempo.

Son necesarios análisis tridimensionales para establecer la influencia en los esfuerzos y desplazamientos, ejercida por el frente de la excavación. También es conveniente el planteamiento de modelos viscoelásticos con el fin de observar la influencia del tiempo en las deformaciones.

Para el caso de  $K_0 \neq 1$ , pierde sentido el concepto de la curva de interacción debido a que las presiones de soporte y esfuerzos cortantes varían con la rigidez del revestimiento, no sólo en magnitud sino también en la forma de la distribución.

Para el caso de  $K_0 > 1$  los problemas, por altas

concentraciones de esfuerzos en la roca, se presentan en el techo de la excavación y la condición siempre es más crítica que en el caso de  $K_0 = 1$ , mientras que en el caso de  $K_0 < 1$  los problemas se presentan en las paredes.

El estudio de la interacción roca-revestimiento puede hacerse utilizando modelos reducidos; en la literatura consultada, se ha encontrado que el proceso ha consistido en tomar un gran bloque, realizar la excavación y el revestimiento y luego aplicar en las fronteras exteriores el estado de esfuerzos equivalente al inicial en el prototipo; como se demuestra en este trabajo esto conduce a resultados incorrectos y por tanto se recomienda para este tipo de estudios aplicar el estado de esfuerzos y posteriormente realizar las operaciones de excavación y revestimiento tal como sucede en la realidad.

## RECONOCIMIENTOS

Los autores del presente trabajo desean expresar su agradecimiento a los profesores miembros de la sección de Geotecnia de la Universidad Nacional, en especial a los ingenieros Fernando Parra V. y Lisandro Beltrán M., por sus valiosas sugerencias y comentarios. También al ingeniero Manuel García L. y a la firma Ingeniería y Geotecnia Ltda. por su apoyo y aporte en el suministro de información técnica. Así como a Interconexión Eléctrica S.A., entidad que está financiando una investigación sobre predicción de deformaciones en presas de tierra y enrocado, dentro de la cual se implementaron los programas de elementos finitos utilizados en este trabajo.

Los autores también desean extender su agradecimiento a los señores Luis Ernesto Balaguera y Edgar Bautista R., estudiantes de la Facultad de

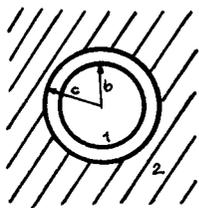
Ingeniería de la Universidad Nacional, por su colaboración en las labores de dibujo y perforación de datos para los programas.

Las labores de mecanografía fueron realizadas por

el Sr. Jorge Rodríguez H. y su señora Elvia Ordóñez de Rodríguez, a quienes se agradece muy especialmente su contribución.

## ANEXO

SOLUCION ELASTICA  $K_o = 1, \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = P_o$



Estado plano de deformaciones

Ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

Deformaciones unitarias

$$\epsilon_r = \frac{a\mu}{ar} \quad \epsilon_\theta = \frac{\mu}{r} \quad (2)$$

Relaciones esfuerzo-deformación

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\Delta\sigma_\theta - \nu\Delta\sigma_r) \quad (3) \quad \bar{E} = \frac{E_o}{1 - \nu_o^2}$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\Delta\sigma_r - \nu\Delta\sigma_\theta) \quad (4) \quad \nu = \frac{\nu_o}{1 - \nu_o^2}$$

$E_o$  = Módulo de Young  
 $\nu_o$  = Relación de Poisson

Reemplazando (2) en (3) y (4) y reorganizando:

$$\Delta\sigma_\theta = \frac{\nu\bar{E}}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \quad (5)$$

$$\Delta\sigma_r = \frac{\nu\bar{E}}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} \right) \quad (6)$$

### ECUACION GENERAL DE DESPLAZAMIENTOS

La ecuación de equilibrio se cumple para esfuerzos iniciales, esfuerzos finales y para incrementos de esfuerzos. Reemplazando (5) y (6) en (1):

$$r^2 \frac{\partial \mu^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial \mu}{\partial r} - \mu = 0 \quad (7)$$

Esta es la ecuación de Cauchy-Euler cuya solución general es:

$$\mu = Br + \frac{C}{r} \quad (8)$$

### ECUACIONES GENERALES DE ESFUERZOS

Reemplazando (8) en (5) y (6)

$$\Delta\sigma_r = \frac{\bar{E}}{1 - \nu} B - \frac{\bar{E}}{1 + \nu} \frac{C}{r^2} \quad (9)$$

$$\Delta\sigma_\theta = \frac{\bar{E}}{1 - \nu} B + \frac{\bar{E}}{1 + \nu} \frac{C}{r^2} \quad (10)$$

REVESTIMIENTO:

$$\sigma_{r1} = \Delta\sigma_{r1} = \frac{\bar{E}}{1 - \nu_1} B_1 - \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} \frac{C_1}{r^2} \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta 1} = \Delta\sigma_{\theta 1} = \frac{\bar{E}_1}{1 - \nu_1} B_1 + \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} \frac{C_1}{r^2} \quad (12)$$

$$\mu_1 = B_1 r + \frac{C_1}{r} \quad (13)$$

ROCA

$$\sigma_{r2} = \Delta\sigma_{r2} + P_o = P_o + \frac{\bar{E}_2}{1 - \nu_2} B_2 - \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} \frac{C_2}{r^2} \quad (14)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \Delta\sigma_{\theta 2} + P_o = P_o + \frac{\bar{E}_2}{1 - \nu_2} B_2 + \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} \frac{C_2}{r^2} \quad (15)$$

$$\sigma_2 = B_2 r + \frac{C_2}{r} \quad (16)$$

### CONDICIONES DE FRONTERA

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty & \quad \sigma_{r2} = \sigma_{\theta 2} = P_o \\ r = b & \quad \sigma_{r1} = 0 \\ r = c & \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r2} = \lambda_1 P_o \\ & \quad \mu_1 = \mu_2 \end{aligned}$$

Reemplazando (11) a (15) en otras condiciones de frontera se obtienen cuatro ecuaciones con las que se puede encontrar los coeficientes  $B_1, C_1$  y  $B_2, C_2$ . Además puede calcularse el valor de  $\lambda_1$ .

### RESULTADOS

$$\lambda_1 = \frac{1 + \nu_2}{\frac{E_2}{E_1} \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} - \frac{\nu_1 \bar{E}_2}{E_1} \frac{2}{2 + \nu_2 + 1}} \quad (17)$$

REVESTIMIENTO  $b < r \leq c$

$$\sigma_r = \frac{\lambda_1 P_o c^2}{c^2 - b^2} - \frac{\lambda_1 P_o b^2 c^2}{(c^2 - b^2) r^2} \quad (18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\lambda_1 P_o c^2}{c^2 - b^2} + \frac{\lambda_1 P_o b^2 c^2}{(c^2 - b^2) r^2} \quad (19)$$

$$\mu = \frac{\lambda_1 P_o (1 - \nu_1) c^2}{E (c^2 - b^2)} r + \frac{\lambda_1 P_o (1 + \nu_1) b^2 c^2}{E_1 (c^2 - b^2)} \frac{1}{r} \quad (20)$$

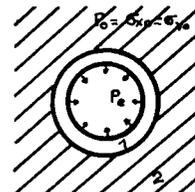
ROCA  $r \geq c$

$$\sigma_r = P_o - P_o (1 - \lambda_1) \frac{c^2}{r^2} \quad (21)$$

$$\sigma_\theta = P_o + P_o (1 - \lambda_1) \frac{c^2}{r^2} \quad (22)$$

$$\mu = \frac{P_o (1 - \lambda_1) (1 + \nu_2) c^2}{E_2} \frac{1}{r} \quad (23)$$

### CARGAS EQUIVALENTES $P_o$ PARA ANALISIS CON ELEMENTOS FINITOS



Las cargas equivalentes son aquellas que aplicadas en el borde interior del revestimiento producen en la roca un estado de esfuerzos, tal que al sumarle el estado de esfuerzos inicial  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = P_o$  se obtienen los dados por las ecuaciones (21) y (22). Los desplazamientos producidos por las cargas equivalentes son los dados por la expresión (23). Las cargas equivalentes se calculan a partir de la presión equivalente  $P_o$ .

Las ecuaciones generales de esfuerzos y desplazamientos son las mismas del caso anterior (9, 10 y 8).

### REVESTIMIENTO:

$$\sigma_{r1e} = \frac{\bar{E}_1}{1 - \nu_1} B_1 - \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} \frac{C_1}{r^2} \quad (24)$$

$$\sigma_{\theta_1e} = \frac{\bar{E}_1}{1 - \nu_1} B_1 + \frac{\bar{E}_1}{1 + \nu_1} \frac{C_1}{r^2} \quad (25)$$

$$\mu_{1e} = B_1 r + \frac{C_1}{r} \quad (26)$$

ROCA:

$$\sigma_{r_2e} = \frac{\bar{E}_2}{1 - \nu_2} B_2 - \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} \frac{C_2}{r^2} \quad (27)$$

$$\sigma_{\theta_2e} = \frac{\bar{E}_2}{1 - \nu_2} B_2 + \frac{\bar{E}_2}{1 + \nu_2} \frac{C_2}{r^2} \quad (28)$$

$$\mu_{2e} = B_2 r + \frac{C_2}{r} \quad (29)$$

CONDICIONES DE FRONTERA

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty & \quad \sigma_{r_2e} = \sigma_{\theta_2e} = 0 \\ r = b & \quad \sigma_{r_1e} = -P_e \\ r = c & \quad \sigma_{r_1e} = \sigma_{r_2e} = -\lambda_2 P_e \\ & \quad \mu_{1e} = \mu_{2e} \end{aligned}$$

Reemplazando (24) y (29) en estas condiciones de frontera se obtienen cuatro ecuaciones a partir de las cuales se pueden encontrar los coeficientes B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> y B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>.

Además puede calcularse λ<sub>2</sub>.

RESULTADOS

$$\lambda_2 = \frac{2b^2}{\frac{E_2}{E_1}(c^2 - b^2)(1 + \nu_2) + \frac{(c^2 + b^2) - \nu_1(c^2 - b^2)}{c^2 - b^2}} \quad (30)$$

Revestimiento  $b < r \leq c$

$$\sigma_{re} = P_e \left[ \frac{(1 - \lambda_2)c^2}{c^2 - b^2} - 1 \right] - \frac{P_e(1 - \lambda_2)b^2c^2}{c^2 - b^2} \frac{1}{r^2} \quad (31)$$

$$\sigma_{\theta e} = P_e \left[ \frac{(1 - \lambda_2)c^2}{c^2 - b^2} - 1 \right] + \frac{P_e(1 - \lambda_2)b^2c^2}{c^2 - b^2} \frac{1}{r^2} \quad (32)$$

$$\mu_e = \frac{P_e(1 - \nu_1)}{E_1} \left[ \frac{(1 - \lambda_2)c^2}{c^2 - b^2} - 1 \right] r + \frac{P_e(1 - \lambda_2)(1 + \nu_1)b^2c^2}{E_1(c^2 - b^2)} \frac{1}{r} \quad (33)$$

ROCA  $r \geq c$

$$\sigma_{re} = -\frac{\lambda_2 P_e c^2}{r^2} \quad (34)$$

$$\sigma_{\theta e} = \frac{\lambda_2 P_e c^2}{r^2} \quad (35)$$

$$\mu_e = \frac{P_e \lambda_2 (1 + \nu_2)}{E_2} \frac{c^2}{r} \quad (36)$$

Comparando las ecuaciones de desplazamiento (23) y (36) se deduce que  $\mu = \mu_e$  si  $P_o(1 - \lambda_1) = P_e \lambda_2$ .

Además se obtiene que

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P_o + \sigma_{re} & \text{(Ecuaciones (21) y (34))} \\ \sigma_\theta &= P_o + \sigma_{\theta e} & \text{(Ecuaciones (22) y (35))} \end{aligned}$$

Luego la presión equivalente es:

$$P_e = \frac{P_o(1 - \lambda_1)}{\lambda_2} \quad (37)$$

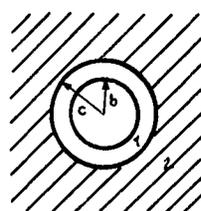
con λ<sub>1</sub> y λ<sub>2</sub> dados por las expresiones (17) y (30) respectivamente.

La presión en el contacto roca-revestimiento (presión de soporte) es:

$$P_i = \sigma_{r1} = \sigma_{r2} = P_o \lambda_1 = P_o - P_e \lambda_2 \quad (38)$$

SOLUCION ELASTICA  $K_0 \neq 1, \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = K_2$

ESTADO PLANO DE DEFORMACIONES



Ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (40)$$

DEFORMACIONES UNITARIAS

$$\epsilon_r = \frac{\partial \mu}{\partial r} \quad (41)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\mu}{r} \quad (42)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (43)$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

A partir de (41), (42) y (43)

$$\frac{\partial^2 r \gamma_{r\theta}}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial^3 \mu}{\partial r \partial \theta^2} + r \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial r^2}$$

o

$$\frac{\partial^2 r \gamma_{r\theta}}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial r^2} - r \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} \quad (44)$$

RELACIONES ESFUERZO — DEFORMACION

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_r - \nu \Delta \sigma_\theta) \quad (45)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_\theta - \nu \Delta \sigma_r) \quad (46)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \Delta \tau_{r\theta} \quad (47)$$

$$E = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2}$$

E<sub>0</sub> = Módulo de Young  
ν<sub>0</sub> = Relación de Poisson

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \nu_0}$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN TERMINOS DE ESFUERZOS

Combinando (39) y (40) con (45) y (47) y reemplazando en (44) se obtiene

$$\frac{\partial^2 (\Delta \sigma_r + \Delta \sigma_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (\Delta \sigma_r + \Delta \sigma_\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\Delta \sigma_r + \Delta \sigma_\theta)}{\partial r} = 0$$

o

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\Delta \sigma_r + \Delta \sigma_\theta) = 0 \quad (48)$$

La ecuación de compatibilidad (48) mas las ecuaciones de equilibrio (39) y (40) y las condiciones de frontera proveen las ecuaciones necesarias para obtener las soluciones de problemas bidimensionales en coordenadas polares cuando son nulas las fuerzas de cuerpo.

FUNCION DE ESFUERZOS ϕ

El método usual de resolver estas ecuaciones es usando la función de esfuerzos de Airy que en coordenadas polares está definida como:

$$\Delta \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (49)$$

$$\Delta\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \tag{50}$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} \tag{51}$$

Por sustitución puede verificarse que esta función de esfuerzos satisface las condiciones de equilibrio. Substituyendo las ecuaciones 49, 50 y 51 en 48 se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{52}$$

Los problemas de la teoría de la elasticidad en coordenadas polares son resueltos buscando una función de esfuerzo  $\phi$  que satisfice la ecuación 52 y cuyas correspondientes componentes de esfuerzos dadas por las ecuaciones (49), (50) y (51) satisfacen las condiciones de frontera.

Para nuestro problema se asume una función de esfuerzos de la forma:

$$\phi = A \text{Log } r + Br^2 + (Cr^2 + Dr^2 + Er^{-2} + F) \text{Cos}2\theta \tag{53}$$

Esta es una parte de la solución general propuesta por Leonard Obert y Wilbur Duval (Rock Mechanics and the design of structures in rock. John Wiley and Sons, New York, 1967, p. 80 y 99).

ECUACIONES GENERALES DE ESFUERZOS

Reemplazando (53) en (49), (50) y (51)

$$\Delta\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2B + (-2C - \frac{6E}{r^4} - \frac{4F}{r^2}) \text{Cos}2\theta \tag{54}$$

$$\Delta\sigma_{\theta} = \frac{-A}{r^2} + 2B + (2C + 12Dr^2 + \frac{6E}{r^4}) \text{Cos}2\theta \tag{55}$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = (2C + 6Dr^2 - \frac{6E}{r^4} - \frac{2F}{r^2}) \text{Sin}2\theta \tag{56}$$

REVESTIMIENTO

$$\sigma_{r1} = \Delta\sigma_{r1} = \frac{A_1}{r^2} + 2B_1 + (-2C_1 - \frac{6E_1}{r^4} - \frac{4F_1}{r^2}) \text{Cos}2\theta \tag{57}$$

$$\sigma_{\theta1} = \Delta\sigma_{\theta1} = \frac{-A_1}{r^2} + 2B_1 + (2C_1 + 12D_1r^2 + \frac{6E_1}{r^4}) \text{Cos}2\theta \tag{58}$$

$$\tau_{r\theta1} = \Delta\tau_{r\theta1} = (2C_1 + 6D_1r^2 - \frac{6E_1}{r^4} - \frac{2F_1}{r^2}) \text{Sin}2\theta \tag{59}$$

ROCA

$$\sigma_{r2} = \sigma_{r0} + \Delta\sigma_{r2} = \sigma_{r0} + \frac{A_2}{r^2} + 2B_2 + (-2C_2 - \frac{6E_2}{r^4} - \frac{4E_2}{r^2}) \text{Cos}2\theta \tag{60}$$

$$\sigma_{r0} = 1/2(\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) + 1/2(\sigma_{x0} - \sigma_{y0}) \text{Cos}2\theta$$

$$\sigma_{\theta2} = \sigma_{\theta0} + \Delta\sigma_{\theta2} = \sigma_{\theta0} - \frac{A_2}{r^2} + 2B_2 + (2C_2 + 12D_2r^2 + \frac{6E_2}{r^4}) \text{Cos}2\theta \tag{61}$$

$$\sigma_{\theta0} = 1/2(\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) - 1/2(\sigma_{x0} - \sigma_{y0}) \text{Cos}2\theta$$

$$\tau_{r\theta2} = \tau_{r\theta0} + \Delta\tau_{r\theta2} = \tau_{r\theta0} + (2C_2 + 6D_2r^2 - \frac{6E_2}{r^4} - \frac{2F_2}{r^2}) \text{Sin}2\theta \tag{62}$$

$$\tau_{r\theta0} = -1/2(\sigma_{x0} - \sigma_{y0}) \text{Sin}2\theta$$

ECUACIONES GENERALES DE DESPLAZAMIENTOS

Reemplazando 54, 55 y 56 en 45, 46 y 47 y luego 41, 42 y 43 se

obtienen las expresiones generales de desplazamientos:

$$\mu = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{A}{r} (1 + \nu) + 2Br(1 - \nu) + \text{Cos}2\theta [-2Cr(1 + \nu) + \frac{2E}{r^3} (1 - \nu) + \frac{4F}{r} - 4\nu Dr^3] \right\}$$

$$\nu = \frac{2\text{Sin}2\theta}{E} \{ Cr(1 + \nu) + Dr^3(3 + \nu) + \frac{E}{r^3} (1 + 2\nu) - \frac{F}{r} (1 - \nu) \}$$

REVESTIMIENTO

$$\mu_1 = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{A_1}{r} (1 + \nu_1) + 2B_1r(1 - \nu_1) + \text{Cos}2\theta [-2C_1r(1 + \nu_1) + \frac{2E_1}{r^3} (1 - \nu_1) + \frac{4F_1}{r} - 4\nu_1 D_1r^3] \right\} \tag{63}$$

$$\nu_1 = \frac{2\text{Sin}2\theta}{E_1} \{ C_1r(1 + \nu_1) + D_1r^3(3 + \nu_1) + \frac{E_1}{r^3} (1 + 2\nu_1) - \frac{F_1}{r} (1 - \nu_1) \} \tag{64}$$

ROCA

$$\mu_2 = \frac{1}{E_2} \left\{ -\frac{A_2}{r} (1 + \nu_2) + 2B_2r(1 - \nu_2) + \text{Cos}2\theta [-2C_2r(1 + \nu_2) + \frac{2E_2}{r^3} (1 - \nu_2) + \frac{4F_2}{r} - 4\nu_2 D_2r^3] \right\} \tag{65}$$

$$\nu_2 = \frac{2\text{Sin}2\theta}{E_2} \{ C_2r(1 + \nu_2) + D_2r^3(3 + \nu_2) + \frac{E_2}{r^3} (1 + 2\nu_2) - \frac{F_2}{r} (1 - \nu_2) \} \tag{66}$$

CONDICIONES DE FRONTERA

$$r = \infty \quad \begin{matrix} \sigma_{r2} = \sigma_{r0} \\ \sigma_{\theta2} = \sigma_{\theta0} \\ \tau_{r\theta0} = \tau_{r\theta0} \end{matrix}$$

Reemplazando (57) a (66) se obtienen doce ecuaciones para calcular  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  y  $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ .

$$r = b \quad \begin{matrix} \sigma_{r1} = 0 \\ \tau_{r\theta1} = 0 \end{matrix}$$

$$r = c \quad \begin{matrix} \sigma_{r1} = \sigma_{r2} \\ \tau_{r\theta1} = \tau_{r\theta2} \\ \mu_1 = \mu_2 \\ \nu_1 = \nu_2 \end{matrix}$$

RESULTADOS

$$\frac{2E_2}{C^3} (1 - \nu_2) + \frac{4F_2}{C} = 2E_1a_1 + 4F_1a_3$$

$$\frac{E_1}{E_2} \left\{ \frac{E_2}{C^3} (1 + 2\nu_2) - \frac{F_2}{C} (1 - \nu_2) \right\} = E_1a_4 + F_1a_5$$

$$q + \frac{6E_2}{c^4} + \frac{4F_2}{c^2} = 6E_1 \left( \frac{1}{c^4} - \frac{1}{b^4} \right) + 4F_1 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

$$q + \frac{6E_2}{c^4} + \frac{2F_2}{c^2} = 6E_1 \left( \frac{1}{b^4} - \frac{2c^2}{b^6} + \frac{1}{c^4} \right) + 2F_1 \left( \frac{2}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{3c^2}{b^4} \right)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene  $E_1, F_1, E_2, F_2$ , luego:

$$D_1 = \frac{2E_1}{b^6} + \frac{F_1}{b^4}$$

$$C_1 = -\frac{3E_1}{b^4} - \frac{2F_1}{b^2}$$

$$B_2 = C_2 = D_2 = 0$$

$$A_2 = - \frac{c^3 b^2 P}{b^2 - \frac{E_1}{E_2} \frac{(1 + \nu_2)}{ca_1} (b^2 - c^2)}$$

$$A_1 = \frac{(c^2 b + A_2) b^2}{b^2 - c^2}$$

$$B_1 = \frac{-A_1}{2b^2}$$

En las anteriores ecuaciones:

$$q = \frac{\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}}{2}$$

$$p = \frac{\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{c} + \frac{c}{b^2} + \nu_1 \left( \frac{1}{c} - \frac{c}{b^2} \right)$$

$$a_2 = \frac{3c}{b^4} + \frac{1}{c^3} + \nu_1 \left( \frac{3c}{b^4} - \frac{1}{c^3} - \frac{4c^3}{b^6} \right)$$

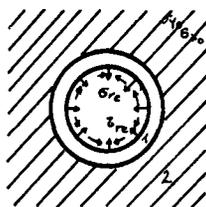
$$a_3 = \frac{c}{b^2} + \frac{1}{c} + \nu_1 \left( \frac{c}{b^2} - \frac{c^3}{b^4} \right)$$

$$a_4 = \frac{3c}{b^4} + \frac{6c^3}{b^6} + \frac{1}{c^3} + \nu_1 \left( \frac{3c}{b^4} + \frac{2c^3}{b^6} + \frac{2}{c^3} \right)$$

$$a_5 = \frac{2c}{b^2} + \frac{3c^3}{b^4} - \frac{1}{c} + \nu_1 \left( \frac{2c}{b^2} + \frac{c^3}{b^4} + \frac{1}{c} \right)$$

Determinados los coeficientes  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$  reemplazando en las ecuaciones (57) a (66) se obtienen las expresiones para esfuerzos y desplazamientos en la roca y en el revestimiento.

#### CARGAS EQUIVALENTES PARA ANALISIS CON ELEMENTOS FINITOS



#### BIBLIOGRAFIA

- ABSI E. *Souterrains et revetements circulaires*. Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, 1968.
- BIENIAWSKI Z. *Geomechanics Classification of rock masses and its application in tunnelling*. Third International Congress on Rock Mechanics, Denver, 1974.
- CHUGH Y. and HARD R. *Analytical study of pressurized elliptical cavities*. Fourteenth Symposium on Rock Mechanics, Pennsylvania, 1973.
- COOK R. *Concepts and applications of Finite Element Analysis*. Jhon Wiley and Sons, London, 1974.
- DUNCAN J., BYRNE P., WONG K. and MABRY P. *Strength stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analysis of stresses and movements in soil masses*. Report UCB/GT/80-0. University of California, Berkeley, 1980.
- DUNCAN J. and CHANG CH. *Non linear analysis of stress and strain in soils*. Journal of the soil mechanics and foundations division ASCE, Sept. 1970.
- HENDRON A. and AIYER A. *Stresses and Strains Around a Cilindrical Tunnel in an elasto-plastic material with dilatancy*. Corps of Engineers Omaha, Nebraska, 1972.
- HOEK E. and BROWN E. *Underground excavations in rock*. Institution of Mining and Metallurgy, London, 1980.
- JAEGER, J. C. *Fundamentals of Rock Mechanics*, Methuen and Co. Ltd, London, 1969.
- MAYER A. *Recent work in Rock Mechanics*. Third Rankine Lecture,

Son aquellas que aplicadas en el borde interior del revestimiento producen en la roca unos esfuerzos tales que al sumarles el estado inicial de esfuerzos  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}$  se obtienen los dados por las ecuaciones 60, 61, 62. Los desplazamientos producidos por las cargas equivalentes son los dados por las expresiones 65 y 66. Las cargas equivalentes se calculan a partir de los esfuerzos equivalentes  $\sigma_{re}, \tau_{re}$ .

Siguiendo un procedimiento similar al del caso  $K_0 = 1$  pero usando las ecuaciones generales de esfuerzos y desplazamientos de este caso se obtiene:

$$\sigma_{re} = \frac{A_3}{b^2} + 2B_3 + (-2C_3 - \frac{6E_3}{b^4} - \frac{4F_3}{b^2}) \cos 2\theta$$

$$\tau_{re} = (2C_3 + 6D_3 b^2 - \frac{6E_3}{b^4} - \frac{3F_3}{b^2}) \sin 2\theta$$

Los coeficientes  $A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$  se determinan resolviendo el sistema:

$$\frac{A_2}{c^2} = \frac{A_3}{c^2} + 2B_3$$

$$\frac{-6E_2}{c^4} - \frac{4F_2}{c^2} = -2C_3 - \frac{6E_3}{c^4} - \frac{4F_3}{c^2}$$

$$\frac{-6E_2}{c^4} - \frac{2F_2}{c^2} = 2C_3 + 6D_3 c^2 - \frac{6E_3}{c^4} - \frac{2F_3}{c^2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} \left\{ -\frac{A_2}{c} (1 + \nu_2) \right\} = -\frac{A_3}{c} (1 + \nu_1) + 2B_3 c (1 - \nu_1)$$

$$\frac{E_1}{E_2} \left\{ \frac{2E_2}{c^3} (1 - \nu_2) + \frac{4F_2}{c} \right\} = -2C_3 c (1 + \nu_1) +$$

$$+ \frac{2E_3}{c^3} (1 + \nu_1) + \frac{4F_3}{c} - 4\nu D_3 c^3$$

$$\frac{E_1}{E_2} \left\{ \frac{E_2}{c^3} (1 + 2\nu_2) - \frac{F_2}{c} (1 - \nu_2) \right\} = C_3 c (1 + \nu_1) +$$

$$+ D_3 c^3 (3 + \nu_1) + \frac{E_3}{c^3} (1 + 2\nu_1) - \frac{F_3}{c} (1 - \nu_1)$$

Los coeficientes  $A_2, E_2, F_2$  son determinados en el análisis anterior.

London, 1963.

NIEBLEC M. *Proyecto y ejecución de túneles poco profundos en suelo, materiales de transición y roca*. Primer Congreso Suramericano de Mecánica de Rocas, Bogotá, 1982.

OBERT L. and DUVAL W. *Rock Mechanics and the Design of Structures in Rock*. John Willey and Sons, New York, 1967.

PECK R. *Deep excavations and tunnelling in soft ground*. Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México, 1969.

RABCEWICZ L. V. *The New Austrian Tunnelling Method*. Water Power 1955.

RABCEWICZ L. V. and GOLSER J. *Principles of Dimensioning the Supporting System for the New Austrian Tunnelling Method*. Water Power, 1973.

SOKOLNIKOFF I. S. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1956.

STAGG K and ZIENKIEWICZ D. *Rock Mechanics in Engineering Practice*. John Willey and Sons, London, 1968.

TERZAGHI K. *Rock Defects and Loads on Tunnel Supports*. Tomado del libro Rock Tunnelling with Steel Supports. The commercial shearing and stamping Co. Youngstown, Ohio, 1946.

TIMOSHENKO S. and GOODIER J. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, Tokio, 1978.

ZIENKIEWICZ O. C. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London, 1977.