Una búsqueda de 'Direcciones factibles' para la solución de problemas de programación lineal

Jaime U. Malpica Angarita*

A 'feasible direction' search for Lineal Programming problem solving

Resumen

El estudio presenta un enfoque para resolver problemas de programación lineal sin el uso de variables artificiales. Se emplea la pareja dual: un problema lineal de minimización (principal) en la forma estándar y un problema lineal de maximización asociado (dual). Inicialmente, el programa dual (o un programa dual parcial) se resuelve por medio de una búsqueda de "direcciones factibles", donde las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker ayudan, primero, a verificar su optimalidad y, después, su factibilidad. La búsqueda de "direcciones factibles" explota las características del poliedro (o politopo) convexo formado por las restricciones del programa dual para hallar un punto inicial y luego sigue segmentos de rectas cuyas direcciones se encuentran en subespacios afines definidos por los hiperplanos de frontera de las caras poliédricas, para hallar los puntos siguientes hasta el (o un) punto óptimo.

Luego, las restricciones duales restantes no satisfechas en aquel punto dual óptimo, si hay alguna, se manejan como variables no básicas del programa principal, que se resuelve por la misma búsqueda de "direcciones factibles".

PALABRAS CLAVE

Programación lineal, método simplex, características poliédricas, relaciones de los programas lineales principal y dual y criterios de optimalidad de Karush–Kuhn–Tucker

Abstract

The study presents an approach to solve linear programming problems with no artificial variables. A primal linear minimization problem in standard form and its associated dual linear maximization problem are used. Initially, the dual (or a partial dual) program is solved by a "feasible direction" search, where the Karush–Kuhn–Tucker conditions help to verify its optimality and then its feasibility. The "feasible direction" search exploits the characteristics of the convex polyhedron (or polytope) formed by the dual program constraints to find a starting point and then follows line segments, whose directions are found in affine subspaces defined by boundary hyperplanes of polyhedral faces, to find next points up to the (an) optimal one.

Then, the remaining dual constraints not satisfied at that optimal dual point, if there are any, are handled as nonbasic variables of the primal program, which is to be solved by such "feasible direction" search.

KEY WORDS

Linear programming, Simplex method, Polyhedral characteristics, Primal and dual linear programs relations, and Karush–Kuhn–Tucker optimality criteria

* Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. mmalpica@andinet.com

1. Introducción

La búsqueda se diseña para conseguir los siguientes objetivos:

a. No se usan variables artificiales como en el método simplex en la Fase I, pero se emplea el programa dual para hallar un conjunto inicial de vectores independientes (filas de restricciones activas del programa dual) en el punto de iniciación, que ya es una base para el programa dual o un conjunto que puede aumentarse para llegar a ser una base al adicionarle más vectores (filas de restricciones activas del programa dual) que se encuentran en las siguientes iteraciones de la búsqueda.
b. Tener en cuenta las relaciones que se dan en optimalidad de una pareja de programas lineales duales puesto que se aplican para establecer la factibilidad del programa principal al hallar primero la optimalidad del programa dual.
c. Usar los criterios de Karush–Kuhn–Tucker para verificar la optimalidad del programa dual.
d. Sacar ventaja del hecho de que las proyecciones ortogonales, tanto el gradiente de la función objetivo lineal del dual y el gradiente del negativo de la función objetivo lineal del principal, sobre subespacios afines definidos por hiperplanos de frontera de las caras poliédricas de los programas respectivos, apuntan hacia aquellas caras poliédricas en donde estos programas lineales alcanzan sus soluciones óptimas, cuando ambos son factibles.

En este artículo se presentan, primero, la forma estándar de dualidad, alguna geometría de los programas duales y los criterios de optimalidad de los problemas de programación lineal para la pareja de programas duales indicada en la forma estándar de dualidad. En seguida, se presenta una descripción general de la búsqueda en el espacio R^m, donde sus características principales se usan para establecer la corrección de sus pasos lógicos. Estas características incluyen el rango (menor que o igual a *m* la dimensión del espacio) de una matriz de un conjunto de restricciones activas del programa dual en un punto dual, la proyección (nula o no) del gradiente de la función objetivo lineal sobre un subespacio afín para establecer un vector dirección (¿factible?), la longitud de paso (finita o no) siguiendo una recta (o semirrecta), la aplicación de los criterios de Karush-Kuhn-Tucker para la optimalidad y la factibilidad del programa dual y su no factibilidad por medio de la solución del programa principal en el espacio R^n, si ello es necesario.

Se asume que el lector está familiarizado con los conceptos de características poliédricas, subespacios afines y su representación, proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio lineal y el procedimiento de Gram-Schmidt, los criterios de optimalidad de Karush–Kuhn–Tucker y la teoría de dualidad de la programación lineal.

En seguida, se indica la pareja de programas lineales duales que la búsqueda intenta resolver y, brevemente, alguna geometría de los programas duales, así como los conceptos de un método de direcciones factibles y los criterios de optimalidad de Karush–Kuhn–Tucker para los programas de programación lineal.

2. Programas duales, alguna geometría y los criterios de optimalidad de los problemas de programación lineal

2.1 La forma estándar de dualidad (Bazaraa *et al.*, 1990)

El programa **principal** en la forma estándar. Hallar $x \in R^n$ tal que $A \cdot x = b$, $x \geq 0$, y minimice $z = c^T x$.

El **dual** asociado. Hallar u Î R^m tal que A^T u £ c y maximice $v = b^T u$, donde A es una matriz real $m \times n$ fija dada y b y c son vectores fijos dados en R^m y R^n, respectivamente.

Por convención, los valores de las dimensiones n y m se tomarán tal que $n \geq m$, donde n es el número de variables no negativas del programa principal (o el número de restricciones de desigualdad menor que o igual del programa dual) y m es el número de las ecuaciones lineales del programa principal (o el número de variables no restringidas del programa dual).

Sean los conjuntos de índices $M = \{1,2,\ldots,m\}$ y $N = \{1,2,\ldots, n\}$. Sean $a_i \in R^n$ la $i^{ésima}$ fila de la matriz A, para $i \in M$, y $a^j \in R^m$ la $j^{ésima}$ columna de la matriz A, para $j \in N$. Para $I \subset M$, la submatriz $A_I = \{a_i : i \in I\}$ y para $J \subset N$, la submatriz $A^J = \{a^j : j \in J\}$. A^{JT} es la matriz transpuesta de la matriz A^j. La matriz de un subespacio afín S_J en R^n se escribirá como A_J y el sistema de ecuaciones lineales que lo define, en forma condensada, para $J \subset M$, por $A_J \cdot x = b_J$. r es el rango de la matriz A_J, i.e., suponga que rango (A_J) = rango $(A_J, b_J) = r$.

2.2 Alguna geometría de los programas lineales

a. El conjunto de todas las soluciones factibles del programa dual se denotará por S y se representará por $\{u \in R^m : A^T \cdot u \leq c\}$. S es un poliedro o poliytopo convexo, o simplemente un poliedro, en el espacio vectorial R^m.

b. Sea alguna recta L_K en R^m definida por el conjunto $\{u(t) \in R^m: u(t) = u^\circ + dt, t \in R\}$ para algún u°, $d \in R^m$, $d \neq 0$, donde $t \in R$ es un parámetro y d es el vector dirección de la recta.

c. Un poliedro S en R^m puede contener rectas. Sea $u(t) \in L_K$, $u(t) \in S$ para todo $t \in R$ si y sólo si $u^\circ \in S$ y $A^T d = 0$. Si S contiene una recta, se dice que S es romo (o no puntiagudo). Un poliedro S no contiene rectas si y sólo si el rango$(A^T) = m$.

d. Sea S un conjunto convexo. $u^\circ \in S$ se llama un punto extremo de S, si $u^\circ = \alpha u^1 + (1-\alpha)u^2$, con $u^1, u^2 \in S$, $0<\alpha<1$, entonces $u^\circ = u^1 = u^2$. Equivalentemente, $u^\circ \in R^m$ es un punto extremo del poliedro $S = \{u \in R^m: A^T \cdot u \leq c\}$ si y sólo si $A^T u^\circ \leq c$ y $A^{JT} \cdot u^\circ = c_J$ para algún conjunto índice $J \subseteq N$ con rango$(A^{JT}) = m$. Los poliedros romos (no puntiagudos) no tienen puntos extremos. Un poliedro S es puntiagudo, si S tiene por lo menos un punto extremo.

e. Dado el poliedro $S = \{u \in R^m: A^T \cdot u \leq c\}$, el subconjunto F_J de S definido por $a^{jT}u = c_j$, $j \in J \subseteq N$ y $a^{jT}u < c_j$, $j \in N \sim J$ se llama la cara F_J asociada con J. El conjunto $S_J = \{u: a^{jT}u = c_j, j \in J\}$ es un subespacio afín en R^m. La cara F_J es la intersección del subespacio afín S_J con el conjunto abierto $\{u: a^{jT}u < c_j, j \in N \sim J\}$. El sistema de ecuaciones lineales que define el subespacio afín S_J es, en forma condensada, $A^{JT} \cdot u = c_J$. Si r es el rango de la matriz A^{JT}, i. e., rango(A^{JT}) = rango$(A^{JT}, c_J) = r$, la dimension del subespacio afín S_J es m - r. El orden d_J de la cara F_J es el valor m - r. Una cara de orden 0 es un vértice de S. Una cara de orden 1 es una arista (o borde) de S. Dos vértices de S son adyacentes si ellos están contenidos en una arista de S.

Una condición necesaria para la existencia de vértices es que el número de semiespacios definidores del poliedro S en R^m sea a lo menos igual a m, es decir, $n \geq m$. Inversamente, si la condición anterior se satisface, todo subespacio afín S_J, para el cual el sistema $A^{JT} \cdot u = c_J$ tenga rango(A^{JT}) = rango $(A^{JT}, c_J) = m$, tiene una solución única; y si esta solución satisface $\{u: a^{jT}u < c_j, j \in N \sim J\}$, ella representa un vértice del poliedro S. Ver el punto d. Hay una identidad entre los vértices acabados de definir y los puntos extremos definidos en d.

f. El conjunto de todas las soluciones factibles del programa principal es el poliedro convexo (o politopo) $P = \{x \in R^n: A\,x = b, x \geq 0\}$.

g. Se definen los conjuntos de índices $\mathbf{L} = \{i : b^T a^i \geq 0, i \in N\}$, $\mathbf{E} = \{i : b^T a^i = 0, i \in N\}$, y $\mathbf{G} = \{i : b^T a^i < 0, i \in N\}$, y los poliedros convexos $\mathbf{S_u} = \{u \in R^m : a^{iT} u \leq c_i, i \in L\}$, y $\mathbf{S_d} = \{u \in R^m : a^{iT} u \leq c_i, i \in G\}$. Los poliedros convexos S_u y S_d, cuya intersección $S_u \cap S_d$ es el poliedro (o politopo) S de todas las soluciones factibles del programa dual, pueden ser útiles en ayudar a entender la búsqueda.

2.3 Criterios de optimalidad de los problemas de programación lineal

Las condiciones de optimalidad de Karush–Kuhn–Tucker (Mangasarian, 1969; Bazaraa *et al.*, 1990) se indican en el enunciado siguiente:

"Una condición necesaria y suficiente para que u° R^m sea un punto óptimo del programa dual: Maximice $v = b^T u$ sujeto a u R^m, $A^T \cdot u$ c es que exista un vector x° R^n tal que

1. $A^T \cdot u^\circ \leq c$ (factibilidad del dual)
2. $A \cdot x^\circ = b$, $x^\circ \geq 0$ (factibilidad del principal)
3. $x^{\circ T} (c - A^T \cdot u^\circ) = 0$ (holgura complementaria)".

Además las relaciones de la pareja de programas duales, cuando ambos tienen soluciones óptimas (Simonnard, 1966; Bazaraa *et al.*, 1990):

"Para una solución óptima con una base B, haciendo $u^* = c_B B^{-1}$, se tiene otra vez las condiciones de optimalidad del principal $z_j - c_j = u^* a^j - c_j \leq 0$ para $j = 1,2,\ldots,n$, es decir, u^* es una solución factible del dual.

Además, el valor óptimo de la función objetivo de principal z^* es igual a $c_B B^{-1} b = u^* b = v^*$, y así la solución $u^* = c_B B^{-1}$ es óptima para el problema dual". En general, la "optimalidad (factibilidad) del programa dual es equivalente a la factibilidad (optimalidad) del programa principal".

El gradiente b de la función objetivo lineal del programa dual es el vector de ascenso más empinado, pero él puede conducir a puntos no factibles. La proyección ortogonal del gradiente de la función objetivo lineal sobre un subespacio afín es el vector único más cercano al vector b de la función objetivo lineal.

El procedimiento de Gram-Schmidt (Banchoff *et al.*,1990) se usa para construir sistemas ortonormales de vectores para proyectar el gradiente de la función objetivo lineal sobre un subespacio afín.

2.4 Método de direcciones factibles (Zoutendijk, 1976)

Dado un punto factible $u^k \in S$, un vector d^k es una dirección factible en u^k, si hay un $\bar{\delta} > 0$ tal que $u^k + td^k \in S$, para todos los t tales que $0 \leq t \leq \bar{\delta}$. El método de direcciones factibles realiza pasos dentro de la región factible S del programa dual de la forma $u^{k+1} = u^k + d^k t_k$, donde d^k es un vector dirección y t_k es un número real no negativo. El número t_k se escoge para que maximice la función objetivo lineal $v = b^T u$ con las restricciones que el punto u^{k+1} y el segmento de recta que une u^k y u^{k+1} sean factibles. Cada iteración es la composición de la selección de una dirección factible d^k y una longitud de paso t_k sobre el segmento de recta $\{u : u = u^k + td^k, 0 \leq t \leq \bar{\delta}\}$.

3. Descripción general de la búsqueda

La búsqueda es un algoritmo que tiene un **Paso de Inicialización** y un **Paso Principal** que combina, en una primera parte, un **Subpaso de Optimalidad del Dual** y, en una segunda parte, un **Subpaso de Factibilidad del Dual** para tratar de solucionar el programa **dual**, y después tiene, en una tercera parte, el **Paso de Optimalidad del Principal** para resolver el programa **principal**, si se necesita.

3.1 Paso de Inicialización

Si el conjunto índice L~E es vacío, el programa dual no tiene solución; de otra manera, cuando el conjunto índice L~E no es vacío, la búsqueda usa un método de direcciones factibles para hallar un punto de iniciación $\mathbf{u}^1$ sobre la frontera del poliedro S_u (o posiblemente S). El conjunto índice de filas del dual J_1 permite a la búsqueda establecer un sistema de restricciones activas del dual en u^1: $u = c_{J_1}$. Las filas independientes en la matriz $A^{J_1 T}$ forman un conjunto inicial de vectores independientes, el cual es ya una base para el programa dual o puede extenderse a ser una base.

3.2 Paso Principal

El **Paso Principal** se usa para hallar un punto nuevo $\mathbf{u}^{k+1}$ en cada **iteración k** (≥ 1) de la búsqueda. Dado un punto $\mathbf{u}^k$ sobre la frontera del poliedro S_u (o posiblemente S), la búsqueda usa un método de direcciones factibles para encontrar un punto nuevo $\mathbf{u}^{k+1}$ también sobre la frontera del poliedro S_u (o posiblemente S). De esta manera, una sucesión de puntos sobre la frontera del poliedro S_u (o posiblemente S) se construye al aplicar iterativamnete el paso: $u^{k+1} = u^k + d^k t_{maxk}$. El conjunto índice de filas del dual J_k permite a la búsqueda establecer un sistema de restricciones activas del dual en u^k:$A^{J_k T} \cdot u = c_{J_k}$. Las filas independientes en cada matriz $A^{J_k T}$ forman un conjunto de vectores independientes el cual es ya una base para el programa dual o puede ampliarse a ser una base. El rango de la matriz $A^{J_k T}$ es r. Cada iteración del Paso Principal busca incrementar r hasta m, la dimension del espacio solución del programa dual.

Para el vector dirección (¿factible?) d^k, cuando el conjunto de vectores independientes se va a ampliar a una base, es decir, cuando $\mathbf{r} < \mathbf{m}$, la búsqueda halla los vectores (solución) $V^i \in R^m$, para $i \in Q(k) = \{\overline{r+1}, \overline{r+2}, ..., \bar{m}\}$, (para $1 \leq r \leq m-1$), en la representación del subespacio afín $S_{J_k} = \{u \in R^m : A^{J_k T} u = c_{J_k}\}$, y los usa para computar la proyección $P_{b/S_{J_k}}$ del vector b sobre el subespacio afín S_{J_k}.

Si la proyección $P_{b/S_{J_k}}$ del vector b sobre el subespacio afín S_{J_k} no es nula, es decir $P_{b/S_{J_k}} \neq 0$, la búsqueda adopta el vector dirección (¿factible ?) $\mathbf{d}^k = P_{b/S_{J_k}}$, y luego halla la longitud de paso $\mathbf{t}_{maxk}$ a lo largo de la recta $\mathbf{L}_k = \{u \in R^m : u = u^k + t, t \in R\}$ para alcanzar el punto nuevo $\mathbf{u}^{k+1}$, cuando $t_{maxk} < \infty$. El conjunto índice de filas del dual J_{k+1} permite a la búsqueda establecer el siguiente sistema de restricciones activas del dual en u^{k+1}. De otra manera, cuando $t_{maxk} = \infty$, el programa dual no tiene solución.

Si la proyección $P_{b/S_{J_k}}$ del vector b sobre el subespacio afín S_{J_k} es nula, es decir, $P_{b/S_{J_k}} = 0$, la búsqueda usa los vectores (solución) $V^i \in R^m$, para $i \in Q(k)$, como direcciones (¿factibles ?) $\mathbf{d}^k$, y luego halla las longitudes de paso $\mathbf{t}_{maxk}$. Si $r < m$ y no hay ningún otro V^i que se pueda usar, añade restricciones auxiliares de desigualdad del dual $I \cdot u \leq c^a$, con $c^a = u^k$, activadas a las restricciones del dual activas $A^{J_k T} \cdot u = c_{J_k}$, para obtener el sistema de r+m ecuaciones $\begin{bmatrix} A^{J_k T} \\ I \end{bmatrix} \cdot u = \begin{bmatrix} c_{J_k} \\ u^k \end{bmatrix}$, con

rango $\begin{bmatrix} A^{J_k T} \\ I \end{bmatrix}$ = rango($\begin{bmatrix} A^{J_k T} \\ I \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c_{J_k} \\ u^k \end{bmatrix}$) $= r = m$.

Cuando $\mathbf{r} = \mathbf{m}$ (el conjunto de vectores independientes en $A^{J_k T}$ es una base para el programa dual), la búsqueda verifica si un punto $\mathbf{u}^k$ es o no un punto óptimo del programa dual usando el **Subpaso de Optimalidad del Dual** y, en seguida, también verifica si un punto dual óptimo u^k es o no una solución factible del programa dual usando el **Subpaso de Factibilidad del Dual**. En ambos subpasos se aplican las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker. Si el punto dual óptimo $\mathbf{u}^k$ no es una solución factible dual, va al **Paso de Optimalidad del Principal** para verificar la factibilidad del programa dual usando el programa principal.

3.3 Paso de Optimalidad del Principal

Este es el Paso Principal de la búsqueda especializado para hallar soluciones factibles del programa principal, en el espacio R^n, empezando por la base factible del principal A^{J_k} asociada con el punto óptimo $\mathbf{u}^k$ del programa dual, esto es, para identificar un conjunto de soluciones factibles del programa principal tal que si el conjunto de valores correspondientes de la función objetivo $z = c^T \cdot x$ no es acotado inferiormente, entonces el programa dual no tiene soluciones factibles. En este paso, la dimensión de cualquier base del programa principal se mantiene en $r \times r$, con $r \leq m$ y, de esta manera, los detalles de cualquier iteración de la búsqueda son similares a los del algoritmo simplex de Dantzig (Dantzig, 1963) cuando solamente se considera una variable no básica en una operación de pivote. Una alternativa es permitir que la búsqueda aumente la dimensión de la base $r \times r$ en cada iteración hasta el rango $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ = rango($\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$) $= r = n$, la dimensión del espacio solución del programa principal.

6. Conclusiones

Se ha diseñado un algoritmo nuevo para resolver PPL mediante una pareja de programas duales, pero con un enfoque diferente del propuesto por el algoritmo simplex.

Referencias

Alevras, D.; Padberg, M.W. (2001). *Linear Optimization and Extensions, Problems and Solutions*. New York: Springer-Verlag.

Banchoff, T.; Werner, J. (1992). *Linear Algebra Through Geometry*. Second Ed. New York: Springer-Verlag.

Bazaraa, M.; Jarvis, J., y Sherali, H. (1990). *Linear Programming and Network Flows*. Second Ed. New York: John Wiley.

Dantzig, G.B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. New Jersey: Princeton University Press, Princeton.

Gale, D. (1960). *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill.

Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill.

Papadimitriou, C.H. (1998). *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. New York: Dover Publications, Mineola.

Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, Princeton.

Simonnard, M. (1966). *Linear Programming*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Stoer, J.; Witzgall, C. (1970). *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*. New York: Springer-Verlag.

Zoutendijk, G. (1976). *Mathematical Programming Methods*. Amsterdam: North-Holland Publishing.