Revista Colombiana de Estadística
Nº 25 - 26, págs. 47 - 52

UN COMENTARIO SOBRE EL CONCEPTO DE REGRESIÓN DINÁMICA

Fabio Nieto[1]

Resumen

La frase "Regresión dinámica" se utiliza en dos contextos diferentes. En uno, se toma como sinónimo de Modelo de Función de Transferencia y en el otro, como sinónimo de un modelo de estados. En este artículo se explica la diferencia entre los dos usos del concepto destacando la motivación que precede a cada uno.

Palabras y frases claves: Serie temporal, Modelo de regresión, Modelo de Función de Transferencia y Modelo de estados.

1. Introducción

Peña (1987) utiliza el concepto de regresión dinámica para hacer referencia a un modelo de función de transferencia. En este trabajo se explica por qué el modelo de regresión convencional es un caso particular del modelo de función de transferencia. Allí la explicación está basada en el punto de vista estadístico.

De otra parte, West y Harrison (1989) utilizan la misma denominación para indicar cierto modelo de estados * o modelo dinámico (según la definición de estos autores). Ellos también explican por qué el modelo de regresión

[1] Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia.

* La frase inglesa "state space model" será traducida en este comentario como "modelo de estados". La definición de modelo de estados puede verse en Nieto(1990).

convencional es un caso particular de un modelo de regresión dinámica y dicha justificación se basa en el concepto de "estado" de un sistema dinámico.

2. Regresión dinámica y modelo de función de transferencia

Considérese el modelo de regresión simple convencional

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i\ , \quad i = 1, \ldots, N$$

donde i es un contador de unidades muestrales, $(u_i \mid X_i) \sim N(0, \sigma^2)$ para cada i = 1, ..., N y $(u_i \mid X_i)$ y $(u_j \mid X_j)$ son independientes estocásticamente si $i \neq j$. Si además X es variable aleatoria entonces X y u son independientes estadísticamente.

Supóngase que el experimento para recoger los datos (X_i, Y_i), i = 1, ..., N es diseñado de tal forma que los supuestos anteriores sobre $\{(u_i \mid X_i) \mid i = 1, \ldots, N\}$ son ciertos (o por lo menos razonables, desde un punto de vista práctico). Entonces todos los procedimientos inferenciales acerca de la relación postulada son válidos.

Si ahora i denota puntos en el *tiempo* y por convención se toma i = t entonces es factible que el procedimiento de recolección de datos (X_t, Y_t) no permita suponer razonablemente que la sucesión $\{u_t\}$ sea un ruido blanco gaussiano (R. B. G.), como la experiencia lo ha señalado. En el mejor de los casos, supóngase que $\{u_t\}$ es sólamente correlacionada, e. d., que $u_t \sim N(0, \sigma^2)$, t = 1, ..., N, pero $\mathrm{Corr}(u_t, u_{t'}) \neq 0$ si $t \neq t'$. Así en $\{u_t\}$ existe un patrón sistemático y se puede suponer que

$$u_t = f_t + a_t$$

con $\{a_t\}$ R. B. G. y $\{f_t\}$ denotando la parte regular de $\{u_t\}$.

Por lo tanto

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + f_t + a_t\ .$$

Si $f_t = 0$ para cada t entonces

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + a_t$$

y se tiene el modelo de regresión clásico, aunque los datos se recojan a través del tiempo. Este modelo ($f_t = 0$) es el que Peña llama "estático" y en el caso $f_t \neq 0$ lo llama "dinámico", donde la dinámica está dada por $\{f_t\}$.

Obsérvese que si $\{X_t\}$ es mutuamente independiente de $\{u_t\}$ entonces el modelo

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

es un modelo de Función de Transferencia con función de respuesta al impulso $\{\beta_1, \beta_2\}$ y proceso de ruido $\{u_t\}$.

La dinámica de $\{u_t\}$ induce una dinámica en $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ de la manera siguiente: supóngase que existe ϕ, $|\phi| < 1$, tal que $u_t - \phi u_{t-1} = a_t$, donde $\{a_t\}$ es R. B. G., entonces, si B es el operador de retardo

$$(1 - \phi B) Y_t = (1 - \phi) \beta_1 + \beta_2 (1 - \phi B) X_t + a_t$$

$$\text{o} \qquad Y_t = (1 - \phi) \beta_1 + \phi Y_{t-1} + \beta_2 X_t - \beta_2 \phi X_{t-1} + a_t$$

Si $c = (1 - \phi) \beta_1$, $\delta = \phi$, $\omega_0 = \beta_2$ y $\omega_1 = \beta_2 \phi$ entonces

$$Y_t = c + \delta Y_{t-1} + \omega_0 X_t - \omega_1 X_{t-1} + a_t$$

y esta expresión indica la forma como $\{Y_t\}$ evoluciona a través del tiempo.

3. Regresión dinámica y modelo de estados

Considérese nuevamente el modelo

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, N \tag{1}$$

donde se establece que los datos (X_t, Y_t) han sido recogidos a través del tiempo.

Suponga que los supuestos convencionales sobre $\{u_t\}$ son válidos a priori pero que al ajustar el modelo no se obtienen buenos resultados. Una forma de explicar el problema sería asumir que los parámetros β_1 y β_2 varían a través del tiempo y de manera estocástica.

Supóngase, a manera de ejemplo, que la dinámica de los parámetros está dada por

$$\left.\begin{aligned} \beta_{1t} &= \beta_{1,t-1} + \omega_{1t} \\ \beta_{2t} &= \beta_{2,t-1} + \omega_{2t} \end{aligned}\right\} \quad t = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

donde $\{\omega_{1t}\}$ y $\{\omega_{2t}\}$ son R. B. G., individualmente, pero no necesariamente mutuamente independientes.

Sea $\beta_t = (\beta_{1t}, \beta_{2t})'$ y $\omega_t = (\omega_{1t}, \omega_{2t})'$ entonces (2) puede ser reescrito matricialmente así:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_t$$

En síntesis, el modelo quedaría descrito por las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= F_t \beta_t + u_t \\ \beta_t &= G_t \beta_{t-1} + \omega_t \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

donde $F_t = (1, X_t)$ y $G_t = I$, la matriz identidad de dimensión 2x2, para todo t.

El modelo (3) es un modelo de estados o un *modelo lineal dinámico* según West y Harrison (1989).

Nótese que la primera ecuación de (3) es el modelo de regresión (1) y que la 2ª describe la dinámica estocástica de los parámetros de ese modelo. West y Harrison llaman también a (3) un modelo de regresión *dinámica*.

Si $Var(\omega_t) = 0$ para cada t entonces $\beta_t = \beta_{t-1} = b$ para cada t. En este caso el modelo (3) se reduce al modelo (1). Al no existir dinámica en los parámetros el modelo se llama *estático* y coincide con el modelo idem definido por Peña (1987).

4. Conclusiones

Se ha explicado con un caso particular la diferencia entre los dos usos de la frase *regresión dinámica*.

Aunque el modelo básico presentado fue el de regresión lineal simple, igualmente válida resulta la explicación si se considera un modelo de regresión múltiple.

Mientras que el concepto utilizado por Peña viene de la Econometría, el de West y Harrison viene del contexto bayesiano, pero más lejos aún, del enfoque de los sistemas dinámicos, en la opinión del autor del presente comentario.

Bibliografía

Nieto, F., (1990), *"Identificación de un modelo de estados para una serie cronológica usando el espacio predictor"*, Revista Colombiana de Estadística, Nos. 21 - 22.

Peña, D., (1987), *"Estadística, Modelos y Métodos: 2. Modelos Lineales y Series Temporales"*, Alianza Editorial S. A., Madrid.

West M. y Harrison J., (1989), *"Bayesian Forecasting and Dynamic Models"*, Springer-Verlag.