Revista Colombiana de Matemáticas
N° 14, Diciembre de 1986

LA ESTADISTICA Y LOS TERREMOTOS
(DESCRIPCION DE MODELOS)

Carlos Coral

Profesor Asistente-Geofísica
Universidad Nacional de Col.

Resumen. En el artículo se exponen algunos de los métodos y modelos utilizados comúnmente en el pronóstico de terremotos, planteándose brevemente la posibilidad de la aplicación de la familia G.H. de Tuckey para estudiar las características del riesgo sísmico en Colombia como un campo de aplicación de la estadística.

1. Introducción.

Ante la terrible tragedia de Armero, (13 noviembre de 1985) sus pasmosas coincidencias con otras acaecidas allí, a juzgar por las narraciones de algunos cronistas de la colonia, es importante inquietar a la comunidad universitaria y científica del país alrededor de estos temas, en particular acerca de la pronosticación de terremotos.

Este tema ha despertado serios cuestionamientos a nivel mundial. Las conclusiones, muy suscintas descritas en el presente artículo pretenden solo, dar una visión panorámica de tan importante tema.

1.1 Aspectos Generales.

El pronóstico de terremotos es, en este momento, uno de los problemas más actuales de las ciencias de la Tierra, al mismo tiempo constituye una de las principales tareas de la física de la Tierra y el objetivo primordial de la sismología.

Por pronóstico debe entenderse la predicción del lugar y fecha de ocurrencia de futuros terremotos indicando su posible fuerza y carácter en la superficie de la tierra.

El problema de los terremotos y sus manifestaciones en grandes ciudades y regiones de gran interés económico es muy importante y complejo. La base racional de las decisiones de ingeniería en regiones sísmicas exije una descripción cuantitativa de la sismicidad; la cual debe responder a las necesidades de una utilización posterior, para lo cual se elaboran mapas o cartas de riesgo sísmico o regionalización sísmica. En algunos casos, es necesario dar un pronótico simultáneo de las intensidades esperadas en diferentes lugares; en otros casos, es suficiente hacer evaluaciones independientes de los posibles efectos de los terremotos en cada una de las regiones consideradas.

Cualquiera que sea la categoría a la cual pertenece el problema del riesgo sísmico, éste siempre tiene que ver con la distribución probabilística de características definidas de oscilaciones del terreno (aceleraciones máximas, velocidad, densidad espectral, espectros de Fourier, duración etc.) en una región dada durante un evento (sismo) dado; o de los valores máximos de algunas de estas características provocadas por terremotos ocurridos en un intervalo de tiempo dado. Estas características de oscilación del terreno se pueden denominar "características de intensidad".

La información obtenida mediante observaciones insrrumentales en un territorio dado, no es suficiente para evaluar la distribución probabilística de las características de intensidad máxima; por eso es necesario utilizar también apreciaciones subjetivas de la intensidad de terremotos del pasado, como también, modelos de la sismicidad regional. Los modelos de la sismicidad regional por lo general se describen mediante expresiones que relacionan las magnitudes de los terremotos sucedidos en volúmenes dados de la corteza terrestre, con los períodos de su ocurrencia. En la mayoría de los casos es necesario una descripción más detallada de la sismicidad regional que incluya una apreciación de la magnitud o energía máxima que pueda ser generada en dichos volúmenes y además, modelos probabilísticos (modelos de procesos estocásticos) de la posible sucesión o secuencia de los eventos sísmicos.

1.2 Sismicidad Regional.

Se sabe, que entre menor sea la magnitud de los terremotos, más a menudo suceden estos (Gutenberg, Richter-1944).

En 1954 Gutenberg y Richter encontraron la ecuación, que relaciona las magnitudes de los terremotos con la frecuencia de ocurrencia de éstos, para diferentes regiones de la Tierra. El número N de terremotos con magnitud M (O mayor que M) ocurridos en una determinada región en un intervalo de tiempo dado depende de M de la siguiente manera:

$$\log_{10}N = a-bM$$

donde a y b son constantes. La constante b es aproximadamente igual a 1, de tal manera que los terremotos con magnitud $M-1$ son aproximadamente 10 veces más frecuentes que los terremotos con magnitud M. Esta relación también se puede expresar de la siguiente manera (Lommitz, Sinch-1976; Esteva 1976)

$$N = f(M) = \alpha e^{-\beta M}$$

donde N es el número promedio de terremotos con magnitudes superiores a M (función de densidad de probabilidad de M) en la unidad de volumen y unidad de tiempo. α y β son constantes regionales: α varía ampliamente de un lugar a otro del territorio, mientras que β se mantiene dentro de los límites estrechos, $\beta = b/\log e$.

En soluciones de ingeniería a menudo es necesario acotar la ecuación anterior para magnitudes pequeñas, pero todavía potencialmente destructoras, por ejemplo $M_o = 4$, y magnitudes máximas posibles M_{max}. De esta manera, se puede obtener una función de densidad del tipo siguiente (Der Kiureghian, 1977; Sarria, 1982)

$$f_M(M) = \frac{\alpha\, e^{-\beta(M-M_o)}}{1-\frac{\alpha}{\beta}\, e^{-\beta(M_{max}-M_o)}}, \qquad M_o \leq M \leq M_{max}$$

En muchos casos es necesario formular soluciones de tal manera que se tenga en mente la incertidumbre de la magnitud máxima posible y la probabilidad con la cual un terremoto de tal magnitud puede ocurrir en un período de tiempo dado. Esto conlleva a ecuaciones de ocurrencia de magnitud del tipo (Esteva, 1976):

$$f(M) = \begin{cases} f_L \cdot G(M), & \text{cuando } M_L \leq M \leq M_u \\ f_L & \text{, cuando } M < M_L \\ 0 & \text{, cuando } M > M_u \end{cases}$$

donde M_L es la magnitud mínima cuyo aporte en el riesgo sísmico es considerable; M_u : magnitud máxima posible; $G(M)$ es la función acumulativa adicional de la distribución de probabilidad de las magnitudes bajo la condición de que se realice el evento ($M \geqslant M_L$). En particular $G(M)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$G(M) = A_o + A_1 e^{-\beta M} - A_2 e^{-(\beta-\beta_1)M}$$

donde:

$$A_o = A\beta_1 e^{-\beta(M_u - M_L)}$$

$$A_1 = A(\beta-\beta_1)e^{-\beta M_L}$$

$$A_2 = A\beta e^{-\beta_1 M_u + \beta M_L}$$

$$A = \left[\beta\{1-e^{-\beta_1(M_u-M_L)}\} - \beta_1\{1-e^{-\beta(M_u-M_L)}\}\right]^{-1}$$

Yegulalp, Kuo (1974) han utilizado la teoría de los valores extremos para evaluar la posibilidad (probabilidad) con que se superen valores dados de magnitud en el transcurso de intervalos de tiempos dados. Estos autores consideran que las probabilidades señaladas satisfacen la distribución extrema del III tipo que tiene la forma:

$$F_{M_{max}}(M/t) = \begin{cases} e^{-c(M_u-M)^K t}, & M \leqslant M_u \\ 0, & M > M_u \end{cases}$$

Donde: $F_{M_{max}}(M/t)$ es la probabilidad de que la magnitud máxima observada durante el período t (años), es menor que M. M_u es la magnitud máxima posible. C,K-parámetros regionales.

1.3 Modelos Estocasticos de la Secuencia de Terremotos.

Si los terremotos se suceden en forma estacionaria y casual en el tiempo, la frecuencia u "ocurrencia" de éstos corresponden o se distribuyen según la distribución de Poisson (Lomnitz, 1974).

Simbolizando con K el número promedio de terremotos en la unidad de tiempo obtenemos la expresión para definir la probabilidad de ocurrencia de n terremotos en el intervalo de tiempo T en la forma:

$$P(n) = \frac{(KT)^n e^{-KT}}{n!}$$

El modelo de Poisson es aplicable cuando se trata de terremotos muy fuertes en dimensiones del mundo entero (Ben-Menahem, 1960), cuando no existe ninguna correlación entre la sismicidad de las diferentes regiones. Sin embargo, cuando se considera volúmenes pequeños de la corteza terrestre los datos estadísticos a menudo contradicen el modelo de Poisson ya que en algunos casos se observa agrupación de los terremotos en el tiempo, y en otros, cierta periodicidad del intervalo de tiempo entre ellos (Coral-Gomez, 1985; Gaisky, 1966-1967).

La ausencia de datos para intervalos de tiempo bastante largos obstaculiza la creación de modelos sísmicos puramente estadísticos, por eso, la descripción cuantitativa de los procesos físicos que ocurren durante los terremotos, pueden basarse en modelos acordes con el conocimiento actual de las Ciencias de tierra.

Por ejemplo, si la energía de formación que se acumula en una región crece mas o menos sistemáticamente, la función de riesgo debe crecer a medida que aumenta el tiempo desde el último terremoto y no conservarse constante, como lo exige el modelo poissoniano.

De esta manera, para describir la sucesión de sismos individuales o grupos de terremotos se podría utilizar modelos de procesos "renovables". Una propiedad característica de tales modelos es que los períodos son independientes y están distribuídos de igual manera (equidistribuidos). El proceso de Poisson es un caso particular de los modelos "renovables" cuya caracterización consiste en que la distribución de los intervalos de tiempo obedece la ley exponencial. Un mayor grado de generalización, sin complicar mucho el cálculo matemático se obtiene suponiendo que los períodos entre terremotos se distribuyen de acuerdo a la función gamma (Esteva, 1976), así:

$$f_T(t) = \frac{\nu}{(K-1)!}(\nu t)^{K-1}e^{-\nu t}$$

No sin olvidar que la distribución exponencial es una gamma con $K = 1$.

Se han propuesto varios modelos de análisis de la ocurrencia de terremotos basados en las deformaciones de la corteza terrestre (Rikitake, 1974,1976).

Hagiwava en 1974, propuso utilizar la distribución de Weibull, como se recordará es bastante útil en la investigación del control de calidad. Se ha mostrado que esta distribución es útil para analizar el tiempo de existencia de edificios, objetos de producción industrial, etc.

Supongamos un pequeño intervalo de tiempo Δt. Sea $\lambda(t)/\Delta t$ la probabilidad de ruptura en una región de la corteza terrestre en el lapso de tiempo entre t y $t+\Delta t$ (con la condición de que la ruptura no suceda antes de t). La cantidad $\lambda(\tau)$ denominada "grado de riesgo" obedece la distribución de Weibull (Rikitake, 1976):

$$\lambda(t) = Kt^{m} \text{ donde } K > 0 \text{ y } m > -1$$

La probabilidad acumulativa de la destrucción se expresa mediante la fórmula:

$$F(t) = 1-R(t)$$

Donde $R(t)$ se denomina "la esperanza" (probabilidad del período de tranquilidad) y se define por:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \Delta(t)dt} = e^{-\frac{Kt^{m+1}}{m+1}}$$

La función de densidad de probabilidad de destrucción $f(t)$ se obtiene de la ecuación:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = Kt^{m}e^{-\frac{Kt^{m+1}}{m+1}}$$

El tiempo promedio hasta la ruptura (conocido como tiempo promedio de vida) es igual a:

$$E[t] = M[t] = \int_0^{+\infty} t\cdot f(t)dt = \left[\frac{K}{m+1}\right]^{-\frac{1}{m+1}} \Gamma\left(\frac{m+2}{m+1}\right)$$

donde Γ es la función gamma.

Conclusiones.

Llama poderosamente la atención, el rol que parecen desempeñar algunas funciones (contínuas o discretas), en los modelos antes descritos, en particular la función exponencial, lo cual es una manifestación de coherencia, dejando entrever la posibilidad de poderse generar cada uno de ellos mediante una familia del tipo conocido como de G-H de Tuckey, lo cual facilitaría su generación y cierta unidad dentro de la aparente diversidad de modelos aquí propuestos.

El cálculo de algunas de las constantes para lugares específicos de nuestra geografía, permitiría la adaptación de éstos para el inquietante caso colombiano.

* *

BIBLIOGRAFIA

Ben Menahem A., Some consequences of earthquake statistics for the years 1918/1955. Gerlands Beitd Geophys.- 1960;69,68.

Coral Gómez C. Contribución al estudio de la actividad sísmica en Santander Colombia). Memorias del VI Congreso Latinoaméricano de Geologfa. T. 2, 271-291. 1985

Der Kiureghian, A., Elements of Probability Theory. Seminar on earthquake Engineering. University of California. Berkeley. 1977.

Esteva, L., Sismicity En.: Seismic Risk and Engineering Decisisions by C. Lomnitz and E. Rosenbleth (Editors). Elsevier. 1976

Gaisky, V.N., The time distributions of large, deep earthquakes from the Pamir-Hindu-Kush. Dokl. Akad. Nauk Tadjik S.S.R. 9(8),18. 1966.

On similarity between collections of earth quakes, the connections between them and their tendency to periodicity. Fiz. Zemli. 7,20-28 English Transl. pp 432). 1967.

Gutemberg, B., Richer, C.F., Frecuency of earth quakes in California. Bull. Seismol. Soc. Am.- 1944,34,185.

Seismicity of the earthquakes. Princeton University Press. Princeton 1954.

Hagiwava, Y., Probability of earthquake occurrence as obtained from a Weibull distribu tions analysis of Crustal strain. Tectonophysics. 23,313. 1974.

Herazo, C.A., Distribución G-H Tuckey y aplica ciones a las distribuciones derivadas. Depto. de Mat. y Est. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. 1984

Martínez, Iglewicz., The *g-h* family of the distributions in some aplication of robust scale estimators. Tesis. Temple University. 1981.

Rikitake, T., Probability of earthquakes occurrence as estimated from crustal strain. Tectonophysics. 23,299. 1974.
Earthquakes prediction. Elsevier, 1976.

Sarria Molina, A., Ingeniería sísmica. Universidad de los Andes. Bogotá. 1982.

Yegulalp T, Kuo J., Statistical prediction of the occurrence of maximun magnitude earthquake. Bull. Seismol. Soc. Am. 64(2),393. 1974.

* *