Revista Colombiana de Estadística
No. 13 Junio de 1.986

NORMALIDAD ASINTOTICA DEL ESTIMADOR IRGNA EN LOS MODELOS DE REGRESION

Ramón A. Matos M.

Barranquilla-Colombia

Sinopsis. En este trabajo se demuestra la estabilidad del estimador IRGNA en la estimación de parámetros de los modelos F cuando a la esperanza y a la dispersión se incrementa una función infinitesimal respecto al tamaño de la muestra.

Abstract. In this paper, the estability of the estimator IRGNA in the estimation of parameters of the F models, when to the expectation and dispersion is increased an infinitesimal function, is found.

Introducción. El análisis clásico de regresión es uno de los más conocidos métodos utilizados para aproximar la dependencia desconocida entre magnitudes. Este método trabaja sólo con los valores medios de una distribución desconocida de las observaciones, cuyos segundos momentos se consideran dados.

La función de regresión que respecto a los parámetros desconocidos es no lineal, recibe el nombre de función de regresión no lineal. Un mayor campo de aplicación y una mayor efectividad la tienen las generalizaciones de los modelos de regresión no lineal que permiten: 1) dependencia de la dispersión de las observaciones (y) respecto al parámetro desconocido (θ). 2) El parámetro θ unívocamente se define a partir de los valores medios de $y\left(\eta(x_1, \theta), \ldots, \eta(x_N, \theta)\right)$.

De acuerdo con el término "Fitting expectations" según la terminología propuesta por Jennrrich R. and Ralston M.L. (1979), llamaremos a estas generalizaciones modelo F.

Las estimaciones en los modelos de regresión con pequeños errores aleatorios en las variables predictoras (Feodorov V.V. 1974) y las estimaciones polinomiales en los modelos de regresión se reducen a estimaciones en el modelo F: estas son algunas ventajas de estos modelos sobre los modelos de regresión clásica.

Un estimador suficiente para $\overset{*}{\theta}$(donde $\overset{*}{\theta}$ es el valor real del parámetro θ) se encuentra con ayuda del algoritmo iterativo Gauss-Newton, en el cual la corrección $\theta^{s+1}-\theta^{s}$ es un estimador de mínimo cuadrado linearizado en el punto θ^{s} del modelo.

Siguiendo la terminología aceptada (Jenrrich, Ralston 1979), este algoritmo recibe el nombre de IRGNA formado con las primeras letras de la expresión inglesa Iterated Reweighted Gauss-Newton Algorithm. El estimador IRGNA en los modelo F y los estimadores de mínimo cuadrado en la regresión clásica poseen iguales propiedades óptimas asintóticas.

Este artículo tiene como objetivo formular las condiciones para la normalidad asintótica local (N.A.L.) del estimador IRGNA definido para el modelo F pero aplicado en el modelo GRAM (Generalized Regression Asymptotic Model). De esta manera se demuestra la estabilidad del estimador IRGNA en el modelo F cuando a las características numéricas de las observaciones se les incrementa una función infinitesimal respecto al tamaño de la muestra. Los modelos GRAM describen un número mayor de problemas que los modelos F.

En adelante se usará la siguiente notacion:

E-esperanza matemática, D-dispersión, T-símbolo de transposición, det A-determinante de la matriz cuadrada A, $\mathbb{1}_A(.)$ es el indicador del conjunto A.

El modelo y el estimador.

Considérese el modelo de regresión

$$Ey_i = \eta(x_i,\theta)+\alpha_N\mu(x_i,\theta)$$
$$Dy_i = V(x_i,\theta)+\beta_N W(x_i,\theta)$$

donde las observaciones $y_i \in R^1$, $x_i \in X \subset R^1$, N es un entero positivo, i toma valores de 1 a N, las funciones η,μ,V,W son conocidas. $\theta \in \Theta \subset R^p$ donde Θ es un conjunto compacto, es el parámetro desconocido.

Exigiremos el cumplimiento de las siguientes condiciones:

1) $\eta, \mu, \qquad \phi := \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$

son funciones continuas y acotadas en el conjunto $(X \times \Theta)$.

2) $\inf\limits_{X \times \Theta} \det V(x, \theta) > 0$

3) α_N, β_N son sucesiones dependientes de N tales que

$\sqrt{N}\alpha_N \to 0$ y $\beta_N \to 0$ si $N \to \infty$

4) La familia de medidas $E_N(A) := N^{-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{1}_A(x_i)$

definidas en los conjuntos Borelianos $A \subset X$ converge débilmente a la medida E, si $N \to \infty$ o sea para toda función continua $g(x)$ en X si $N \to \infty$ tiene lugar

$$\int\limits_X g(x) E_N(dx) \to \int\limits_X g(x) E(dx).$$

5) La matriz $m(\theta) := \int\limits_X \phi^T(x,\theta) V^{-1}(x,\theta) \phi(x,\theta) dE(x)$

es tal que $\inf\limits_{\Theta} \det m(\theta) > 0$

El esquema así descrito lo llamaremos modelo GRAM.

Definiremos el estimador IRGNA. Supongamos que ya fue obtenido en el paso s el estimador $\overset{s}{\theta} = \overset{s}{\theta}(y) \in \Theta$ para las observaciones $y = (y_1, \ldots, y_N)$.

Sea el operador

$$A_N(\theta) := (Nm_N(\theta))^{-1}\phi^T(x,\theta)V^{-1}(x,\theta)$$

donde $m_N(\theta) := \int_X \phi^T(x,\theta)V^{-1}(x,\theta)\phi(x.\theta)dE_N,$

$$x = (x_1,\dots,x_N)^T$$

$$\delta(\theta) = y-\eta(x,\theta).$$

El estimador IRGNA en el paso $s+1$ lo definimos de la siguiente manera:

$$\overset{s+1}{\theta} := \overset{s}{\theta}+A_N(\overset{s}{\theta})\delta(\overset{s}{\theta}).$$

Normalidad Asintótica Local.

Formulamos el teorema sobre la normalidad asintótica local del estimador IRGNA en las condiciones del modelo GRAM y haremos un bosquejo de su demostración.

Teorema. Si se cumplen las condiciones del modelo GRAM y la aproximación inicial del algoritmo IRGNA, $\theta^{(o)}$ es tal que para todo N, $\sqrt{N}(\theta^{(o)}-\theta^*)$ es acotada entonces

$$\sqrt{N}(\theta^{(N)}-\theta^*) \Rightarrow \mathbb{N}(0,m^{-1}(\theta^*)),\ \text{si } N\to\infty,$$

donde $\Rightarrow$ denota la convergencia de la función de distribución de la variable aleatoria, $\sqrt{N}(\Theta^{(N)}-\Theta^*)$ y $\mathbb{N}(A,B)$-distribución normal con parámetros A y B.

<u>Demostración</u>. Inicialmente se demuestra la existencia del vector aleatorio límite $\hat{\Theta}(y^N)$ para el algoritmo IRGNA cuando el tamaño de las observaciones $N \to \infty$. Luego, utilizando el teorema central del límite en el caso multidimensional se demuestra que

$$\sqrt{N}A_N(\Theta^*)\delta(\Theta^*) \Rightarrow \mathbb{N}(0,m^{-1}(\Theta^*)).$$

Finalmente, a partir de la igualdad

$$\sqrt{N}(\hat{\Theta}(y^N)-\Theta^*) = \sqrt{N}A_N(\Theta^*)\delta(\Theta^*)+\sqrt{N}I_1+\sqrt{N}I_2,$$

donde

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\partial A_N(\Theta^*+\lambda(\hat{\Theta}(y^N)-\Theta^*))}{\partial \Theta}\delta(\Theta^*)d\lambda,$$

$$I_2 = -A_N(\hat{\Theta}(y^N))\int_0^1 (\phi(\hat{\Theta}(y^N)+\lambda(\hat{\Theta}(y^N)-\Theta^*))-\phi(\hat{\Theta}(y^N)))d\lambda$$

y usando la ley de los grandes números para demostrar que $\sqrt{N}I_1 \to 0$ y $\sqrt{N}I_2 \to 0$ cuando $N \to \infty$, se concluye la afirmación del teorema.

<u>**Observaciones**</u>.

La convergencia sólo se verifica en una

vecindad del conjunto Θ con centro θ^* y cuyo radio depende de N.

Un resultado similar para los estimadores de mínimo cuadrado en los modelos de regresión no lineal fue presentado por Jennrich R.(1969).

En el proceso de la demostración bosquejado se muestra la acotación del vector aleatorio $\sqrt{N}(\theta^{(N)}-\theta^*)$ de donde es fácil encontrar la cantidad mínima de pasos δ del algoritmo IRGNA necesaria para el cumplimiento de la propiedad N.A.L.

Este teorema marca pautas metodológicas que pueden ser utilizadas en la convergencia de otros algoritmos en los modelos de regresión.

* *

BIBLIOGRAFIA

Feodorov V.V. (1974) "Regression problems with controlled variables subject to error". Biometrika, 61,1,p.49-56.

Jennrrich R. (1969) "Asymptotic propierties of non-linear LS-estimators". Ann. Math. Statist., 40, p. 633-643.

Jennrich R., Ralston M.L. (1979) "Fitting non-linear modet to data". Ann. Rev. of Biophis., Bioengineer.

*   *