Revista Colombiana de Estadística
Nº 8 - 1983

TEORIA DE LA RUINA
Y
EL PROCESO DE WIENER

Néstor Jacobo Lasprilla A.

Estudiante carrera de Matemáticas

Director del Seminario: *Luis G. Moreno O.*

Introducción.

El objetivo principal de éste trabajo es establecer una analogía entre la Teoría de la Ruina y el Movimiento Browniano. Con éste fin se considera el Movimiento Financiero de una empresa desde el punto de vista del movimiento de una partícula Browniana y mediante el Teorema del Límite Central, se establece la distribución de la probabilidad del tiempo que transcurre pa ra que la empresa en mención se arruine.

1. Nociones generales de Procesos Estocásticos.

La teoría clásica de probabilidades trata con problemas que envuelven colecciones de variables aleatorias independientes. Sin embargo, muchos problemas reales no son de esta naturaleza y para tratarlos satisfactoriamente es necesario extender la teoría a colecciones de variables aleatorias dependientes.

Una colección $\{X_t\}$ de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},p)$ se conoce con el nombre de "Proceso Estocástico"

Los elementos principales que distinguen a un proceso estocástico son: El conjunto de subíndices, el espacio de los estados y las relaciones entre las variables aleatorias.

En un proceso estocástico $\{X_t\}$, el conjunto no vacío del cual t toma sus valores se conoce con el nombre de "Conjunto de Subíndices". Un proceso $\{X_t\colon t \in I\}$ en donde $I \subseteq \mathbb{Z}$ es llamado "Proceso estocástico de tiempo discreto", mientras que un proceso $\{X_t: t \in I\}$ en donde $I \subseteq \mathbb{R}$, es llamado "Proceso estocástico de tiempo contínuo".

El espacio de los estados, que indicaremos por S, es el espacio que contiene los valores de cada variable X_t. Cuando S es enumerable, el proceso $\{X_t\}$ es un *proceso de estado discreto.* Por el contrario si S no es enumerable nos referiremos al proceso $\{X_t\}$ como a un *proceso de estado contínuo*. El espacio S puede ser unidimensional, bidimensional,..., n-dimensional.

Dentro de los procesos estocásticos podemos distinguir; entre otros, los caminos aleatorios y los procesos de Markov.

a. Caminos aleatorios.

Sean, $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes y distribuídas idénticamente y $x \in \mathbb{R}$. El proceso estocástico $S_0, S_1, S_2, \ldots$ con $S_0 = x$ y $S_n = x+X_1+\ldots+X_n$ para $n = 1,2,\ldots$ es llamado *un camino aleatorio que se inicia en* x. En este contexto las variables aleatorias

$$X_n = S_n - S_{n-1} \qquad n = 1,2,\ldots$$

son llamadas los *incrementos* del proceso $\{S_n\}$.

Cuando el espacio de los estados del proceso $\{S_n\}$ es un subconjunto de los enteros, la sucesión $\{S_n\}$ recibe el nombre de *camino aleatorio unidimensional*. En este caso, el proceso es representado por una partícula que se desplaza en forma horizontal (sobre la recta real). Si la partícula se halla en el estado i, puede en una transición simple, permanecer en i, con probabilidad r_i, o moverse a uno de los estados adyacentes: $i-1$ ó $i+1$, con probabilidades q_i y p_i respectivamente. Puesto que no hay más alternativas tenemos: $q_i+r_i+p_i = 1$ cualquiera que sea el estado i.

b. Procesos de Markov.

Un proceso $\{X_t\colon t \in I\}$ recibe el nombre de *Proceso de Markov*, si para todo conjunto B de Borel(*) en $\mathbb{R}$ se tiene:

$$P\{X_t \in B/X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\}$$

$$P\{X_t \in B/X_{t_n} = x_n\},$$

(*) Decimos que un conjunto B es de Borel, si puede ser obtenido por un número contable de operaciones (uniones, intersecciones o complementos) a partir de conjuntos abiertos.

siempre y cuando $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$. En otras palabras, la probabilidad de cualquier comportamiento futuro del proceso, cuando su estado presente es conocido, no se altera por el conocimiento adicional que concierne a su comportamiento pasado.

2. El proceso de Wiener o movimiento browniano.

El movimiento browniano, descubierto como un fenómeno físico, por el botánico inglés Robert Brown en 1827, es el movimiento exhibido por una partícula que se halla totalmente sumergida en un líquido o en un gas. La primera explicación del fenómeno sobre el movimiento browniano fué dada por Einstein en 1905. Sin embargo, la formulación matemática concisa del movimiento browniano fué dada por Norbert Wiener en 1918.

Sea X_t el desplazamiento (desde el punto de partida y a lo largo de un eje fijo) en el tiempo t de una partícula browniana. El desplazamiento X_t-X_s sobre el intervalo (s,t) puede observarse como la suma de un gran número de desplazamientos pequeños, en virtud de lo cual, mediante el Teorema del Límite Central, podemos afirmar que la diferencia $X_t - X_s$ es distribuída normalmente. De manera similar, es razonable afirmar que los incrementos del proceso $\{X_t\}$ son estacionarios, esto es, las distribuciones de $X_t - X_s$ y de $X_{t+h} - X_{s+h}$ son las mismas, para cualquier $h > 0$. Intuitivamente es claro que el desplazamiento $X_t - X_s$ debe depender solo de la longitud $t-s$ y no del tiempo en que empezamos la observación.

Un proceso $\{X_t : t \geqslant 0\}$ recibe el nombre de *proceso de Wiener* con coefciente de desplazamiento μ si

i) $X_0 = 0$

ii) $\{X_t : t \geqslant 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios.

iii) Para cada $t \geqslant 0$, X_t es distribuida normalmente con media μt

De la condición (i) se deduce que el proceso $\{X_t : t \geqslant 0\}$ no es estacionario. Escribiendo:

$$X_{t+s} = X_{t+s} - X_t + X_t$$

y usando la suposición de incrementos independientes, obtenemos:

$$Var(X_{t+s}) = Var(X_{t+s} - X_t) + Var(X_t)$$

la cual por incrementos estacionarios produce:

$$Var(X_{t+s}) = Var(X_s) + Var(X_t).$$

La solución de esta ecuación funcional viene dada por

$$Var(X_t) = \sigma^2 t \tag{2.1}$$

de donde el valor de σ^2 es una función del proceso fundamental y debe determinarse empíricamente. Del resultado anterior se concluye que la variable X_t tiene distribución normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$.

La densidad de probabilidad de X_t está dada entonces por

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \tag{2.2}$$

3. **Teoría de la ruina.**

La teoría de la ruina trata con las variaciones en la cantidad de superavit de un asegurador, en un período de tiempo. Por superavit se entiende, el exceso de primas recibidas sobre los reclamos pagados. Para $t \geq 0$ sea W_t el superavit del asegurador en el tiempo t. Asumiremos que los tenedores de las pólizas pagan una prima de riesgos $c > 0$ por unidad de tiempo y que S_t indica los reclamos totales hasta el tiempo t. Si $W_0 = W$ es el superavit a mano en el tiempo cero, posiblemente como resultado de operaciones pasadas, entonces

$$(3.1) \qquad W_t = w + ct - S_t \; ; \; t \geq 0$$

Nótese que en éste modelo no se tienen en cuenta el interés y los factores distintos a las primas y a los reclamos, que podrían afectar el superavit. Por ejemplo, no se involucran los dividendos a los aseguradores, los gastos y los recargos asociados con estos flujos de dinero. Un resultado típico de este proceso de superavit $\{W_t: t \geq 0\}$ es mostrado en la Figura 1.

Se observa que el superavit se incrementa linealmente (con pendiente c), excepto en los tiempos en que un reclamo ocurre, momento en el cual, el superavit disminuye en una cantidad equivalente al monto del reclamo. En el gráfico R_i indica el valor del i-ésimo reclamo y Z_2^i representa el monto de la prima acumulada desde el

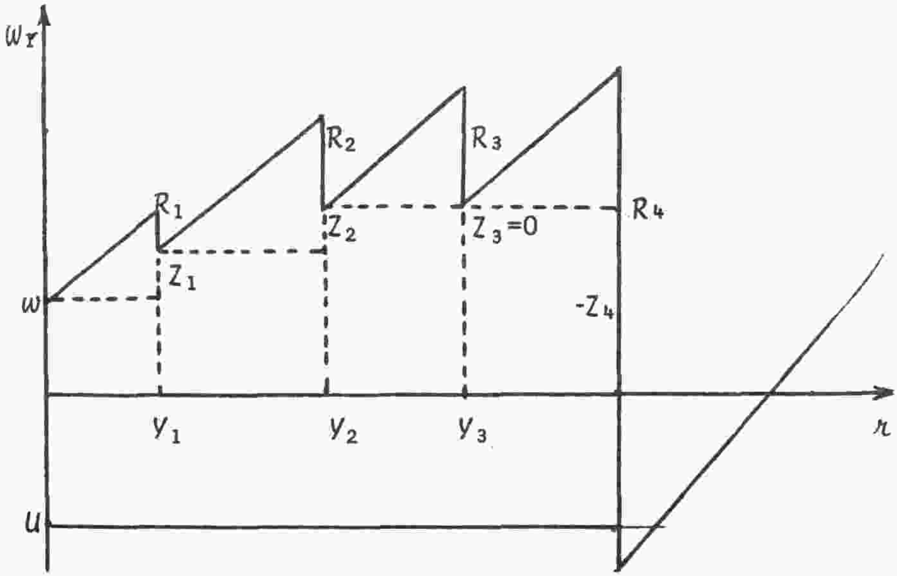

Figura 1

reclamo precedente menos el mondo del i-ésimo reclamo.

De acuerdo con el planteamiento anterior, el superavit en el tiempo r, se puede escribir mediante la relación:

$$(3.2) \qquad W_r = w + \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

en donde $N = [r]$ (la parte entera de r).

Como se ilustra en la Figura 1, el superavit podría traspasar una barrera preestablecida, la cual se halla a la distancia U de la recta $W_r = 0$. Cuando el superavit atraviesa esta barrera se dice que la ruina ha ocurrido. En la práctica es posible que un asegurador cuyo superavit cruza la barrera U, sea refinanciado para que continúe operando.

Teniendo en cuenta la posibilidad de refinanciación diremos que la ruina se presenta cuando el superavit cruza la barrera U por primera vez. El tiempo T en que esto ocurre se define en la forma siguiente:

(3.3) $$T = mín\{r: W_r < U\}$$

El símbolo $T = \infty$ se usa para indicar que la ruina jamás ocurre, esto es, $W_r > U$ para todo $r \geqslant 0$.

Por otra parte, la estabilidad financiera de un asegurador se mide por la probabilidad de ruina de este. Esta probabilidad de ruina que depende del superavit inicial w se puede indicar en la forma

(3.4) $$\psi(w) = P\{T < \infty\}.$$

En la práctica, la mayoría de los aseguradores estan interesados en la ruina, sólo sobre un período largo pero finito. Más precisamente, la consideración se limita a

$$\psi(w,r) = P\{T < r\} \tag{3.5}$$

la probabilidad de ruina antes del tiempo r.

4. La Teoría de la Ruina y el Proceso de Wiener.

Consideremos la teoría de la ruina desde el punto de vista de un camino aleatorio unidimensional. Supondremos que una partícula inicia su movimiento en el origen y que la barrera U se halla a la derecha del origen. Por tal razón Z_i representa ahora, el déficit a que da lugar al i-ésimo reclamo; esto es, el monto del i-ésimo reclamo menos el monto de la prima acumulada desde el reclamo precedente. De esta manera, si la diferencia es positiva la partícula avanza hacia la derecha y si la diferencia es negativa la partícula se desplaza hacia la izquierda. La ecuación (3.2) se puede escribir entonces en la forma

$$W_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i \tag{4.1}$$

en donde W_N representa ahora el déficit del asegurador luego del N-ésimo reclamo.

Igual que en la mayoría de las aplicaciones prácticas, asumiremos que U es grande en comparación con los pasos individuales de la partícula. También supondremos que las variables $Z_1, Z_2, \ldots$ son independientes y distribuídas idénticamente con

$$(4.2) \qquad EZ_i = m \quad \text{y} \quad Var\ Z_i = \sigma^2 \quad i = 1,2,\ldots$$

en donde m representa el recargo de seguridad.

El problema se centra en hallar, la función de distribución del tiempo T que toma la partícula para cruzar la barrera U por primera vez. Por esta razón definimos ahora el tiempo en la forma

$$(4.3) \qquad T = min\{N: W_N > U\}$$

Entonces el evento $\{T \leqslant N\}$ es equivalente al evento $\{W_N > U\}$ y por tanto, la probabilidad de ruina antes del N-ésimo reclamo viene dada por

$$(4.4) \qquad P\{T \leqslant N\} = P\{ \frac{W_N}{U} > 1\}$$

Puesto que a medida que U aumenta de valor se requiere un recargo menor de seguridad, el término mU se considerará como una constante y se indicará por μ. Escribiendo la variable $\frac{W_N}{U}$ en la forma:

$$\frac{W_N}{U} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{U}\,\frac{W_N - mN}{\sigma\sqrt{N}} + \frac{mN}{U} \tag{4.5}$$

Vemos por el Teorema del Límite Central que para U y N bastante grandes, la variable $\frac{W_N}{U}$ se aproxima a la distribución normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$ con $t = \frac{N}{U^2}$. Para evitar un caso trivial se asume que $t > 0$. En esta forma, la función de densidad de la variable $\frac{W_N}{U}$ está dada por la relación (2.2) y la probabilidad de ruina antes del n-ésimo reclamo viene dada por

$$P\{T \leqslant N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} \int_1^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t\sigma^2}}\,dx \tag{4.6}$$

Mediante el cambio de variable: $z = \frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}$ se tiene

$$P\{T \leqslant N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{1-\mu}{\sigma\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2/2}dz \tag{4.7}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Por lo tanto, de acuerdo con esta última relación, los valores de la probabilidad $P\{T \leqslant N\}$ se obtiene facilmente, consultando la tabla de distribución normal.

5. Ejemplo.

Una compañía tiene 10.000 reclamos por año, siendo \$ 1.000 el monto promedio de cada uno de ellos. Sabiendo que la desviación estándar es de \$ 10.000 y el recargo de seguridad es igual a 0; con probabilidad 0.995 la compañía desea protegerse de la ruina durante los primeros 25 años de operación.

De acuerdo con las consideraciones anteriores tenemos:

$$\sigma = 10.000$$
$$\mu = 0$$
$$N = 25(1.000) = 250.000$$
$$\Phi\left(\frac{1-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = 0.995$$

Consultando la tabla de distribución normal, encontramos que $t = 1,5\times 10^{-9}$. En consecuencia

$$U = \$\ 12'909.404.$$

Como el ingreso de las primas netas anuales es 10.000×1.000 = 10'000.000 vemos que la reserva de la compañía debe ser igual al 129,09% del ingreso por prima neta anual. Esta reserva es necesaria para proteger la supervivencia de la compañía durante los primeros 25 años de operación, con 99,5% de probabilidad.

Ahora, si dejamos las mismas suposiciones excepto que el tamaño de la compañía es dos veces mayor, ello significa que la compañía tiene ahora 20.000 reclamos por año y que el ingreso anual por primas netas es de 20'000.000. En este caso hallamos que U = \$18'257.400 indicando que la reserva debe ser anualmente del 91,28% del ingreso por prima neta.

*

BIBLIOGRAFIA

Bohman, H., "Risk theory and Wiener Processes" Astin Vol.VII pp. 96-99, 1972.

Büllmann, H., *Mathematical Methods in Risk Theory* Springer-Verlag 1970.

Gerber, Hans U., *An introduction to mathematical Risk theory*, S.S Huebner Foundation Monograph series, 1979.

Iglehart, Donal L., "Difussion Aproximation in collective Risk theory", *Journal of Applied Probability*, pp. 285-292(1969)

Karlin, Samuel, A *first course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1969.

Ross, Sheldon, *Applied Probability models with optimization aplications*, Holden Day, 1970.