Revista Colombiana de Estadística
Nº 7 - 1983

UN MODELO DE DECRECIMIENTO MULTIPLE

Luis G. Moreno O.

Profesor Asociado
Universidad Nacional

1. Introducción.

Los procedimientos analíticos que se aplican a los problemas que involucran la mortalidad, como única causa de *decremento*, pueden extenderse para conformar un modelo que envuelva varias causas de decremento que operen sobre un grupo particular de vidas.

El grupo de vidas se considera cerrado; esto es, luego de su conformación inicial no hay ingresos nuevos ni reingresos.

El modelo matemático a partir del cual se analizan los distintos decrementos es conocido como la Tabla de Decremento Múltiple. En esta tabla se involucra un grupo numeroso de vidas, las cuales se hallan sujetas a diversas causas independientes de decremento que operan continuamente.

2. Descripción del modelo.

Sea T_x la variable aleatoria continua que señala el tiempo que transcurre hasta que una persona de edad x abandone el grupo y la variable aleatoria discreta J_x que indica la causa del decremento para una vida de edad x. La distribución de probabilidad conjunta de estas variables aleatorias se indica por

$$f(t,j) \quad \text{para } t > 0 \text{ y } \quad j = 1,2,\ldots,m$$

siendo m el número de causas de decremento a las cuales está sujeta cualquier persona que forme parte del grupo de vidas.

En esta forma, la función de frecuencia marginal de la variable J_x y la función de densidad marginal de la variable T_x, se pueden expresar respectivamente como sigue:

$$g(j) = \int_0^\infty f(s,j)\,ds \qquad j = 1,2,\ldots,m \tag{1}$$

y

$$h(t) = \sum_{j=1}^{m} f(t,j) \qquad t > 0 \tag{2}$$

Entonces, las funciones de distribución margi nales de las variables J_x y T_x vienen dadas respectivamente por

$$G(r) = P\{J_x \leq r\} = \sum_{j=1}^{r} \int_0^\infty f(s,j)ds \tag{3}$$

y

$$H(t) = P\{T_x \leq t\} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f(s,j)ds \tag{4}$$

3. Probabilidades de decremento.

La función $f(t,j)$ puede utilizarse en la forma usual para establecer las probabilidades de los eventos definidos por las variables aleatorias J_x y T_x.

Primero consideremos la probabilidad de que, por la causa (j), una persona de edad x abandone el grupo de vidas antes de alcanzar la edad $x+t$. Esta probabilidad, representada por el símbolo ${}_tq_x^{(j)}$, se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= P\{T_x \leq t,\ J_x = j\} \\ &= \int_0^t f(s,j)ds\ . \end{aligned} \tag{5}$$

Por otra parte, la probabilidad de que una persona de edad x abandone el grupo de vidas antes de la edad $x+t$, por cualquiera de las m causas, es representada por el símbolo ${}_tq_x^{(\tau)}$ y viene dada por la relación

$$_{t}q_{x}^{(\tau)} = H(t) = \sum_{j=1}^{m} {}_{t}q_{x}^{(j)} \qquad (6)$$

Se puede tratar ahora la tasa instantanea de decremento. Para ello se tiene en cuenta que

$$P\{t < T_x \leqslant t + dt, \quad J_x = j\} = f(t,j)dt \qquad (7)$$

De esta manera

$$\mu_{x+t}^{(j)}dt = P\{t < T_x \leqslant t + dt, J_x = j/T_x > t\}$$

en donde $\mu_{x+t}^{(j)}$ representa la tasa instantánea de decremento por la causa (j), en la edad $x+t$. Entonces, de las ecuaciones (4) y (7) se desprende que

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{1-H(t)} \qquad (8)$$

La tasa instantánea total de decremento a la edad $x+t$, indicada por $\mu_{x+t}^{(\tau)}$ se puede expresar entonces en la forma

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{h(t)}{1-H(t)} \qquad (9)$$

Finalmente, de las ecuaciones (8) y (9) se obtienen respectivamente las relaciones

$$f(t,j) = {}_{t}p_{x}^{(\tau)} \quad \mu_{x+t}^{(j)} \qquad (10)$$

y

$$h(t) = {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_{x+t}^{(\tau)} \tag{11}$$

donde ${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}$, indica la probabilidad de que una persona de edad x permanezca en el grupo de vidas por lo menos un tiempo t.

4. Ejemplo.

En una tabla de decremento múltiple asociada a cierto grupo de vidas se tiene en cuenta tres tasas instantáneas de decremento $\mu_x^{(1)}$, $\mu_x^{(2)}$ y $\mu_x^{(3)}$ donde

$$\mu_x^{(j)} = \frac{3}{11j(100-x)} \qquad j = 1,2,3.$$

Entonces, la tasa instantánea total de decremento de la edad x y la probabilidad de que una persona de edad x permanezca en el grupo de vidas por lo menos hasta la edad $x+t$, vienen dadas por

$$\mu_x^{(\tau)} = 1/2(100-x)$$

y

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= exp\{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds\} \\ &= \left(\frac{100-x-t}{100-x} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (10) se encuentra la distribución conjunta de probabilidad.

$$f(t,j) = 3/11j|(100-x)(100-x-t)|^{\frac{1}{2}}$$

y en esta forma, mediante la ecuación (5) se obtiene la probabilidad de que, por la causa (j), una persona de edad x abandone el grupo de vidas antes de alcanzar la edad $x+t$. Esta probabilidad es dada por

$${}_{t}q_{x}^{(j)} = \frac{6[(100-x)^{\frac{1}{2}} - (100-x-t)^{\frac{1}{2}}]}{11j(100-x)^{\frac{1}{2}}}$$

* *

BIBLIOGRAFIA

Jordan, C.W., *Life Contingencies*, The Society of Actuaries, Second Edition, 1975.

* * *