Revista Colombiana de Estadística
Nº 7 - 1983

MALA SUERTE

Yu Takeuchi

Profesor Titular
Universidad Nacional

Introducción.

Cuando un estudiante pierde la materia siempre dice:

"*Profesor, yo había estudiado bien, pero tuve* mala suerte *en el examen!*"

Acaso, ¿existe este fenómeno - mala suerte? Supongamos que a través de un semestre (o un año) se enseñaron 100 cosas; si un estudiante aprendió 60 de ellas, naturalmente la capacidad académica verdadera de este estudiante es de tres ($3 = 5\times\frac{60}{100}$) o sea "aprobado". Sin embargo, como no se preguntan todos los temas enseñados en el examen por razones técnicas este estudiante puede obtener la no ta 0 si todas las preguntas del examen salen desafortunadamente, de los 40 temas que él no había estudiado. Para facilitar el análisis de la situación vamos a suponer que en el examen se preguntan solamente 5 temas de los 100 enseñados. Sea $P(k)$ ($k = 0,1,...,5$) la probabilidad de obtener la nota k (para un estudiante cuya capacidad verdadera es 3), entonces $P(k)$ es la probabilidad de escoger k temas de los 60 estudiados y $5-k$ temas de los 40 no estudiados, luego

$$P(k) = \binom{60}{k}\binom{40}{5-k} \Big/ \binom{100}{5}$$

por lo tanto se obtiene que:

$$P(0) = 0.0087, \quad P(1) = 0.0728, \quad P(2) = 0.2323$$

La probabilidad de perder la materia es:

$$P(0) + P(1) + P(2) = 0.314 ,$$

esto es, este alumno pierde la materia, poseyendo capacidad verdadera 3, con probabilidad de 31% (la probabilidad de Mala Suerte). Se ve que esta probabilidad de "Mala Suerte" es bastante grande; en el presente trabajo veremos si es posible disminuir esta mala suerte.

Cálculo de la "Mala Suerte".

En el presente trabajo consideremos el siguiente modelo de la enseñanza-evaluación:

(I) A través de un semestre (o un año) se enseñaron $5n$ temas distintos, los cuales son totalmente *independientes*.

(II) Los alumnos aprenden o no cada uno de $5n$ temas enseñados en forma independiente. Decimos que un alumno posee la capacidad académica k (sobre 5) si sabe contestar correctamente kn temas de los $5n$ enseñados, pero siempre se equivoca en cuanto a otros $(5-k)n$ temas.

(III) Hay un sólo examen para la evaluación del alumno, allí se preguntan $5s$ temas de los $5n$ enseñados.

(IV) Un estudiante pierde la materia si obtiene una calificación menor que "tres".

Este modelo no está bien ajustado al caso de la enseñanza-evaluación de las matemáticas, ya que allí los temas enseñados siempre están relacionados mutuamente. Por ejemplo, si no sabe "*derivar*" no puede realizar "*cambio de variables en la integración*". Pero, en algunas otras materias más memorísticas nuestro modelo puede ser una aproximación del sistema "enseñanza-evaluación". Por ejemplo, aprender el nombre de la capital de todos los países del mundo, aprender el significado de 1000 palabras en inglés, acumular los conocimientos al estilo de cabeza y cola; este tipo de aprendizaje es muy similar a nuestro modelo.

Número de preguntas en el examen.

Vamos a estudiar primero cómo cambia la mala suerte cuando el número de preguntas en el examen aumenta. Si hay mayor número de preguntas en el examen, evidentemente habrá mayor confiabilidad en la evaluación, luego la injusticia por mala suerte debería disminuir. Para mayor sencillez supongamos que $5n = 100$, o sea que se enseñan 100 temas distintos. Como un estudiante de capacidad tres (sobre 5) domina bien los 60 temas, y no conoce los 40 restantes la probabilidad de contestar correctamente j preguntas en el examen de $5s$ puntos es:

$$P(j) = \binom{60}{j}\binom{40}{5s-j} \Big/ \binom{100}{5s} \tag{1}$$

por lo tanto la probabilidad de perder la materia (mala suerte) es:

$$P = \sum_{j<3s} P(j) = \sum_{j=0}^{3s-1} \binom{60}{j}\binom{40}{5s-1} \Big/ \binom{100}{5s} \tag{2}$$

(si $5s \leqslant 40$),

$$= \sum_{j=5s-40}^{3s-1} \binom{60}{j}\binom{40}{5s-j} \Big/ \binom{100}{5s} \qquad (3)$$

(si $5s > 40$).

En la Tabla 1 aparece el valor de P (mala suerte) para varios valores de $5s$.

Tabla 1

Nº de preguntas $5s$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	95	100
mala suerte P	31.4 %	36.1 %	38.3 %	39.6 %	40.4 %	41.0 %	41.7 %	41.9 %	41.9 %	41.4 %	40.3 %	37.4 %	33.2 %	0

Se observa que la probabilidad de mala suerte es siempre superior al 30% a menos que se formulen 100 preguntas en el examen, y que ésta es mínima cuando el número de preguntas en el examen sea mínimo, o sea, 5 preguntas nada más, situación contraria a lo que habíamos imaginado inicialmente.

Número de temas que se enseñan.

Como nuestro propósito es tratar de minimizar la mala suerte, formulemos solamente 5 preguntas en el único examen, o sea, $5s = 5$ con la hipótesis III. Si se enseñan $5n$ temas a través del curso, un estudiante de capacidad tres (sobre 5) domina $3n$

temas, y no domina los $2n$ temas restantes; así la probabilidad de obtener la calificación j (sobre 5) es:

$$P(j) = \binom{3n}{j}\binom{2n}{5-j} \Big/ \binom{5n}{5} \qquad (4)$$

Por lo tanto, la probabilidad P de perder la materia (mala suerte) es:

$$P = \left\{\binom{3n}{0}\binom{2n}{5} + \binom{3n}{1}\binom{2n}{4} + \binom{3n}{2}\binom{2n}{3}\right\} \Big/ \binom{5n}{5} \qquad (5)$$

En la Tabla 2 se muestra el valor de P para distintos valores de $5n$. En (5), tomando límite cuando $n \to \infty$ se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} P = 0.31744. \qquad (6)$$

Tabla 2

Nº de temas enseñados $5n$	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100	∞
mala suerte P	0 %	26.2 %	28.7 %	29.6 %	30.4 %	30.8 %	31.0 %	31.2 %	31.2 %	31.3 %	31.4 %	31.4 %	31.7 %

La mala suerte aumenta cuando el número de temas enseñados aumenta, esto es muy natural pues al aumetar el número temas enseñados la confiabilidad del examen (de sólo 5 puntos) disminuye. Sin embargo, se observa que esta variación de P es muy pequeña, y se puede considerar que la probabilidad de mala suerte P es prácticamente constante, aproximadamente el 30%.

Realización de exámenes parciales.

Como hemos observado en las secciones anteriores, la injusticia por mala suerte es siempre grande; hagamos ahora otro intento para disminuirla modificando un poco nuestra hipótesis. En lugar de III supongamos que:

(III') Se realizan dos exámenes parciales sobre la mitad de los temas enseñados, con 5 preguntas cada uno. La calificación definitiva es el promedio de los resultados de los exámenes parciales.

Si un alumno posee capacidad tres (sobre 5), en cada examen parcial él puede contestar correctamente cualquiera de $3n/2$ temas, y no puede contestar los restantes, así la probabilidad $Q(j)$ de obtener la nota j (sobre 5) en cada examen parcial es:

$$Q(j) = \binom{3n/2}{j}\binom{2n/2}{5-j} \Big/ \binom{5n/2}{5}. \tag{7}$$

El pierde la materia si la suma de las notas parciales es menor que 6, por lo tanto, la probabili dad de perder la materia (mala suerte P) es:

$$P = \sum_{i+j \leq 5} Q(i)Q(j) \qquad (8)$$

En la tabla 3 se muestra el valor de P para varios valores de $5n$.

Tabla 3

Nº de temas enseñados $5n$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Mala suerte P	0 %	32.9 %	34.7 %	35.3 %	35.6 %	35.8 %	36.0 %	36.1 %	36.1 %	36.2 %

Comparando con la Tabla 2, se observa que el realizar dos exámenes parciales en lugar de un único no disminuye la mala suerte, más bien aumenta un poco.

Conclusión.

Parece que todo intento para disminuir la injusticia por mala suerte es vano; un estudiante de capacidad verdadera 3 (sobre 5) tiene aproximadamente el 30% de probabilidad de perder la materia por mala suerte. Acaso, ¿no es demasiado optimista al esperar pasar la materia teniendo apenas capacidad verdadera exactamente igual a 3? En la vida real siempre se debe tener en cuenta un margen de seguridad. En realidad, la mala suerte disminuye sustancialmente para los estudiantes con capacidad verdadera 3.5 o superior como se observa en la Tabla 4. Allí se muestra el caso en el cual el tema enseñado es de 100 y la calificación se hace por medio de un sólo examen de 5 preguntas.

Tabla 4

Capacidad verdadera (sobre 5)	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
P(mala suerte) sin habilitación.	31.4% (*)	50 % (*)	31.4%	15.8%	5.3%	0.7%
P con habilitación.	52.9% (*)	75% (*)	10.0%	2.5%	0.3%	0.0%

Nota: (*) buena suerte = 1 - P

Por un razonamiento análogo al anterior podemos calcular la probabilidad de la buena suerte para los estudiantes cuya capacidad académica verdadera es inferior a 3. En la Tabla 4, los primeros dos renglones indican la probabilidad de "buena suerte". Se ve que la injusticia por la "buena suerte" para los alumnos malos es demasiado grande bajo nuestra hipótesis (la calificación por un sólo examen de 5 puntos). El realizar varios exámenes parciales y el poner un mayor número de pregun tas en cada examen, no sirven para disminuir la mala suerte de estudiantes aprobables con capacidad 3, pero si es bastante útil para disminuir la injusticia por "buena suerte" de los estudiantes malos. En la Tabla 5 se muestra la probabilidad P de perder la materia para el caso en el cual el tema enseñado es de 100, y la calificación se hace por medio de un sólo examen de $5s$ puntos, donde q es la capacidad verdadera del estudiante.

Tabla 5

q \ $5s$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
0.5	99.3	100													
1	94.7	99.6	100												
1.5	84.2	96.1	99.1	99.8	100										
2	68.6	84.6	92.2	96.2	98.2	99.3	99.7	99.9	100						
2.5	50.0	63.0	71.2	77.3	82.2	86.2	90.0	92.4	94.6	96.4	97.8	98.8	99.4	99.8	100
3	31 4	36 1	38 3	39 6	40 4	41 0	41 4	41 7	41 8	41 9	41 9	41 9	41 7	41 4	41 0
3.5	15.8	13.8	11.3	8.8	6.7	5.0	3.5	2.3	1.4	0.8	0.4	0.1	0	0	0
4	5.3	2.5	1.1	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.5	0.7 %	0	0	0	0										

P = probabilidad de perder la materia (%)

$5s$ = el número de preguntas.

q = capacidad verdadera del estudiante.

* *