Revista Colombiana de Estadística
Nº 6 - 1982

FUNCIONES DE SUPERVIVENCIA DE UN PARAMETRO

Ramón Fandiño Arbeláez

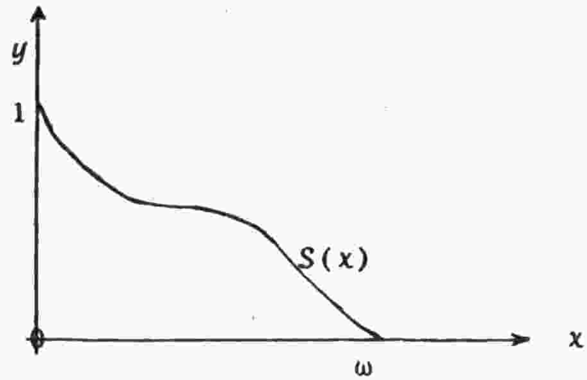
Profesor
Universidad Nacional

Resumen: En el presente estudio se construyen funciones de supervivencia que se adaptan bastante bien al patrón normal de mortalidad y en contraposición con las funciones de Gompertz y Makeham, son funciones de un sólo parámetro.

Introducción. Una función de supervivencia es una función $S(x)$ definida en el intervalo $[0,\omega]$ tal que $S(0) = 1$, $S(\omega) = 0$ y $S(x)$ decrece de 1 a 0. Además $S(x)$ se define como la probabilidad de que una nueva vida de edad 0 sobreviva hasta alcanzar la edad x.

Las funciones de supervivencia que más se adaptan al patrón normal de mortalidad son las curvas de Gompertz $S(x) = a^{b^x}$ y Makeham $S(x) = a^x b^{c^x}$

pero presentan el gran inconveniente de sus parámetros a, b y c que no se pueden estimar fácilmente. Las curvas de Compertz y Makeham presenta la configuración:



Anotamos además que ω usualmente se toma grande 90, 95, 100 ó 105 y $S(\omega)$ se define como 0.

En este estudio construímos funciones de supervivencia de un sólo parámetro a partir de las curvas de Lamé (Gabriel Lamé, físico francés del siglo XIX). Estas tienen como ecuación

$$\left|\frac{x}{a}\right|^{\alpha} + \left|\frac{y}{b}\right|^{\alpha} = 1 \quad \text{con } a, b, \text{ y } \alpha \text{ positivos reales}$$

Figuras muy familiares como la circunferencia, la elipse, el rombo y la astroide son curvas de Lamé.

Si en la ecuación $\left|\frac{x}{a}\right|^{\alpha} \left|\frac{y}{b}\right|^{\alpha} = 1$, tomanos $a = \omega = 100$, $b = 1$ y $\alpha > 1$, obtenemos una función de supervivencia que se puede adaptar bastante bien al patrón normal de mortalidad y que presenta el sólo parámetro α.

Sea esta:

$$S(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 100$$

Claramente $S(0) = 1$, $S(100) = 0$ y $S(x)$ decrece de 1 a 0.

Para justificar el hecho de que $S(x)$ es una probabilidad, suponemos la existencia de cierta variable aleatoria X y su correspondiente función de probabilidad P.

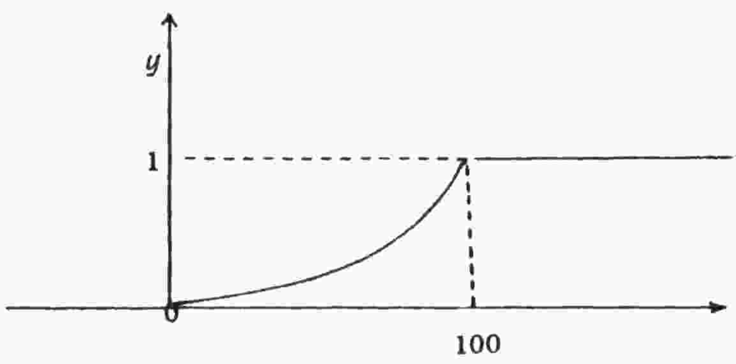
Planteamos la ecuación:

$$P(X > x) = \left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

luego existe una función de distribución F_X dada por:

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = 1 - \left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \quad \text{con } \alpha > 1 \text{ y } 0 \leqslant x \leqslant 100$$

su gráfica es:

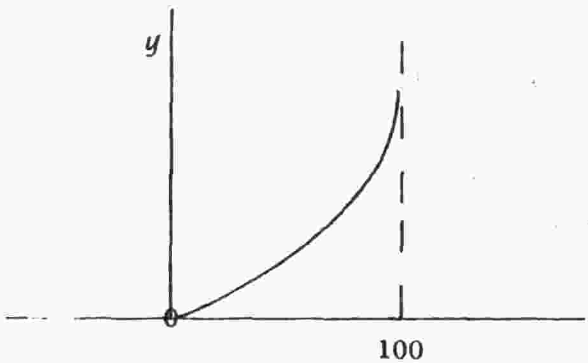


La densidad es:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{100} \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

con $\alpha > 1$ y $0 \leqslant x < 100$,

su gráfica es:



Definimos formalmente:

Una variable aleatoria X tiene distribución de Lamé con parámetro α y notamos $X \sim L(\alpha)$; $\alpha > 1$; si su densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} & \text{si } 0 \leqslant x < 100 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La f_X definida aquí es una función de densidad, en efecto:

a) $f_X(x) \geqslant 0$, para todo x real

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$

La función de distribución es:

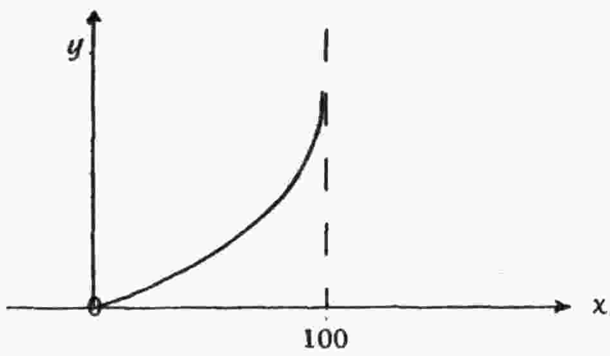
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 1 - (1 - (\frac{x}{100})^{\alpha})^{1/\alpha} .$$

Queda claro entonces que $S(x)$ es una probabilidad, pues $S(x) = P(X > x)$ con $X \sim L(\alpha)$.

La fuerza de mortalidad o susceptibilidad del hombre hacia la muerte viene dada por:

$$\mu_x = \frac{x^{\alpha}}{100^{\alpha} - x^{\alpha}} \quad ; \qquad 0 \leqslant x < 100.$$

su gráfica es:



Ahora presentamos la Tabla de Mortalidad basada en la función de supervivencia desarrollada.

Tomamos $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\ell_0 = 100.000$

TABLA DE MORTALIDAD

x	ℓ_x	x	ℓ_x
1	99964.11	26	92851.55
2	99889.80	27	92390.11
3	99787.56	28	91916.50
4	99661.50	29	91430.76
5	99514.09	30	90932.90
6	99347.02	31	90.422.94
7	99161.56	32	89900.86
8	98958.70	33	89366.67
9	98739.22	34	88820.34
10	98503.78	35	88261.85
11	98252.93	36	87691.15
12	97987.14	37	87108.20
13	97706.81	38	86512.96
14	97412.28	39	85905.34
15	97103.86	40	85285.29
16	96781.82	41	84652.71
17	96446.39	42	84007.53
18	96097.76	43	83349.64
19	95736.13	44	82678.92
20	95361.66	45	81995.26
21	94974.47	46	81298.54
22	94574.69	47	80588.60
23	94162.42	48	79865.30
24	93737.76	49	79128.48
25	93300.78	50	78377.96

...

x	ℓ_x	x	ℓ_x
51	77613.55	76	53052.78
52	76835.05	77	51789.63
53	76047.25	78	50496.73
54	75234.91	69	49172.50
55	74412.80	80	47815.18
56	73575.65	81	46422.80
57	72723.18	82	44993.14
58	71855.09	83	43523.68
59	70971.07	84	42011.56
60	70070.77	85	40453.46
61	69153.83	86	38845.55
62	68219.85	87	37183.33
63	67268.43	88	35461.48
64	66299.11	89	33673.60
65	65311.41	90	31811.88
66	64304.83	91	29866.64
67	63278.80	92	27825.54
68	62232.73	93	25672.54
69	61165.97	94	23385.93
70	60077.84	95	20935.05
71	58967.56	96	18273.90
72	57.834.33	97	15327.14
73	56677.26	98	11952.86
74	55495.37	99	7803.00
75	54287.60	100	000.00

BIBLIOGRAFIA

[1] Jórdan, Chester Wallace Jr., *Life Contingencies*, The Society of Actuaries, (1967)

[2] Bohm. *Matematicas Actuariales I y II*, Editorial Uteha. (19).

* *