

Revista Colombiana de Estadística

Nº 6 - 1982

FORMULACION DE UN MODELO LINEAL: LA FIESTA DE CUMPLEAÑOS DE LA ABUELA

Adaptado por: *Pedro Nel Pacheco D.*

Profesor Asistente
Universidad Nacional

La palabra "experimentar" tiene un amplio sentido en el contexto estadístico. *Experimenta* el Biólogo, el Químico, el Médico con la experimentación usual del laboratorio; pero experimenta también el Ingeniero evaluando diferentes técnicas para realizar un proceso, lo hace también el pedagogo *enseñando* sus métodos de aprendizaje; experimenta también el sicólogo probando diferentes medios de producir un efecto psicológico; hace experimentación el Agrónomo para comparar semillas, fertilizantes, suelos, técnicas de riego, técnicas de siembra, etc.

En cualquier caso, antes de realizar el "experimento" hay necesidad de diseñarlo -igual que hace el Arquitecto antes de construir un edificio- y es en el Diseño del Experimento y en la ejecución de

14.

tal diseño donde el Estadístico aporta sus conocimientos para que el Biólogo, Médico, Químico, Ingeniero, Pedagogo, Sicólogo, Agrónomo, etc. obtengan el mayor provecho posible de los recursos disponibles para llegar a descubrir algún principio o efecto desconocido o para probar, establecer o ilustrar alguna verdad propuesta o conocida.

1. El problema.

Ejecutado el experimento, se requiere construir un modelo matemático denominado "Modelo Lineal" que resuma lo mejor posible los resultados.

Una idea de la construcción de este tipo de modelos fué ejemplificado por Ching Chum Li [1], con la historia referida a continuación:

2. "La fiesta de Cumpleaños de la Abuela".

2.1. La fiesta.

Para celebrar su 84 aniversario, la abuela decide distribuir \$84.00 entre sus 12 nietos. Siendo imparcial y queriéndolos a todos, la abuela dá \$7.00 a cada nieto ($7 \times 12 = 84$). El abuelo advierte que 4 de los muchachos son estudiantes de universidad, 4 de bachillerato y los cuatro restantes de primaria. El no cree que todos deben disponer de la misma can

tividad de dinero para sus gastos; sugiere que los ma yores reciban más que los jóvenes. Cortésmente, ca da uno de los cuatro estudiantes de primaria ofrece \$2.00 al grupo de los estudiantes de universidad y cada uno de los 4 de bachillerato ofrece \$1.00. La cantidad de dinero entre los 12 muchachos sigue sien do \$84.00 pero ahora los cuatro estudiantes de uni- versidad tienen un total de \$40.00 poseyendo cada uno de ellos \$10.00 en lugar de los \$7.00 primeros. Después de la redistribución de aguinaldos, los mu- chachos deciden jugar al Póker en tres mesas separa das: los cuatro de universidad en una mesa, los 4 de bachillerato en otra mesa, y los más jóvenes en otra. Todos aceptan las reglas de la casa de que la unidad de apuesta sean monedas de 50 centavos. (Si los jóvenes jugarán con monedas de 20, en una mesa y los mayores con monedas de \$1.00 en la otra mesa, el caso sería distinto).

Al final de la tarde, cada muchacho cuenta lo que ha ganado o perdido en el juego y cuánto le queda de los \$7.00 recibidos en un principio. En la siguiente tabla, se da, para cada uno de los mucha- chos, la explicación detallada, que deberá leerse de izquierda a derecha.

Obsérvese que la ganancia o pérdida del Poker se trata simplemente de una "cuestión de cada mesa" lo cual significa que en cada mesa deben compensar- se las pérdidas y las ganancias entre los cuatro ju gadores de esa mesa.

Tabla N° 1
Acontecimientos durante la fiesta de
aniversario de la abuela

| Grupo | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|--------------|--------------------------------|------------------|-------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---|
| | Cantidad original \bar{V} | Aportes T_i | Al comenzar el juego \bar{V}_i | Ganancia o Pérdida E_{ij} | Final de la Partida V_{ij} | Neto resp. cant. original $V_{ij}-\bar{V}$ |
| PRIMARIA | 7 | -2 | 5 | +1 | 6 | -1 |
| | 7 | -2 | 5 | -3 | 2 | -5 |
| | 7 | -2 | 5 | +4 | 9 | +2 |
| | 7 | -2 | 5 | -2 | 3 | -4 |
| BACHILLERATO | 7 | -1 | 6 | -2 | 4 | -3 |
| | 7 | -1 | 6 | +4 | 10 | +3 |
| | 7 | -1 | 6 | -2 | 4 | -3 |
| | 7 | -1 | 6 | 0 | 6 | -1 |
| UNIVERSIDAD | 7 | +3 | 10 | -1 | 9 | +2 |
| | 7 | +3 | 10 | +2 | 12 | +5 |
| | 7 | +3 | 10 | -2 | 8 | +1 |
| | 7 | +3 | 10 | +1 | 11 | +4 |
| TOTAL | 84 | 0 | 84 | 0,0,0* en c/m 0 | | 0 |

2.2. El Abogado que reconstruye los hechos.

Poco después de haber terminado la partida llega el Abogado de la familia para felicitar a la abuela por su aniversario. Entonces se entera del obsequio de la abuela y de las partidas de póker de los

muchachos, pero no de los detalles.

Se entera de lo que le ha quedado a cada muchacho al final de la partida: para el grupo de los más jóvenes 6, 2, 9, 3; para el grupo de bachillerato 4, 10, 4, 6; para el grupo de los universitarios 9, 12, 8, 11. En otras palabras, todo lo que conoce son los resultados finales registrados en la columna 5 de la Tabla 1. Estas son sus "observaciones" por decirlo así: ¿Puede el abogado reconstruir, a partir tan sólo de sus observaciones, la serie completa de los hechos (es decir toda la tabla)?

Sí que puede, si le revelan dos condiciones generales:

- 1) En cada una de las mesas de poker, al iniciar la partida cada jugador tenía la misma cantidad de dinero.
- 2) Inicialmente, cada muchacho recibió de la abuela la misma cantidad.

Informado de estas condiciones, el abogado puede reconstruir rápidamente toda la serie de hechos registrados en la Tabla 1. Puesto que la cantidad total de dinero es de \$84.00 en un principio cada muchacho debe haber tenido \$7.00 y como la cantidad total del grupo de primaria es de \$20.00, al comienzo de la partida cada estudiante de primaria debe haber tenido \$5.00 las columnas 1 y 3 se dedu-

cen inmediatamente. El primer muchacho que estudia primaria termina con \$6.00; esto quiere decir que tiene que haber ganado \$1.00 en la partida de póker. Pero antes de jugar dió \$2.00 de manera que el resultado es que todavía le falta \$1.00 para los \$7.00 originales, y así sucesivamente.

2.3. Las tres componentes de una observación.

El experimentador y el estadístico están en la misma situación del abogado de la familia. Todo experimento se basa en una serie de observaciones que son el resultado final de la acción de diversos factores. El trabajo del Estadístico ayuda al experimentador a reconstruir, a partir de las observaciones, sirva de ejemplo la Tabla 1 y tratar de interpretar las observaciones desde ese punto de vista.

Explicando ahora en lenguaje estadístico la Tabla 1, los números de la columna (5) se notan y_{ij} y son las primeras observaciones del experimentador, son sus resultados. El número 7 que aparece en la columna (1) recibe el nombre de *Media general* \bar{V} y los números de la columna (3) son el promedio de cada grupo \bar{V}_i .

Los números de la columna (2) reciben en general el nombre de *efectos de tratamiento*; y en este caso particular puede llamarse *efecto de la edad* ya que la redistribución se hace basándose en la edad. La "Ganancia" o pérdida de la columna (4) se llama

error o variación de azar de una observación individual. Finalmente el "valor neto" de la última columna es la desviación total $y_{ij} - \bar{y}$.

Una vez definidos los términos, podemos fijarnos en las estrechas y obvias relaciones que hay entre las seis columnas de números.

Por ejemplo: el segundo muchacho de primaria contribuyó, en un principio, con \$2.00 (efecto de la edad) y después perdió en el juego \$3.00 (variación de azar); por lo tanto pierde un total de \$5.00. Así pues, la columna (6) = columna (2) + columna (4).

El efecto de la edad es T_i y el error es E_{ij} .

En general, cada valor observado y_{ij} puede descomponerse en tres partes distintas: la primera parte \bar{y} es común a cada observación; la segunda parte T_i es común a cada miembro de uno cualquiera de los grupos y la tercera parte E_{ij} ; varía de un individuo a otro; así queda definido el modelo:

$$y_{ij} = \bar{y} + T_i + E_{ij}.$$

* *

BIBLIOGRAFIA

- [1] Li, Ching Chum, *Diseño Experimental*. Omega, Barcelona, 1972.

- [2] Kempthorne, Oscar, *The Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, Inc. Lond. Sydney, 1953.

* * *