Revista Colombiana de Estadística
Nº 5 - 1982.

REFLEXION DE MATRICES
Y
PALINDROMIA

Ramón Fandiño A.

Profesor Asistente.
Universidad Nacional

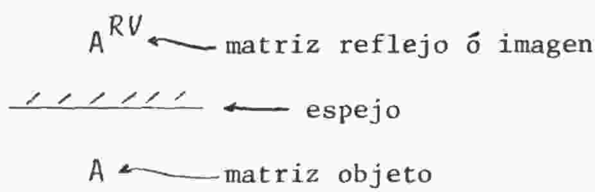
Resumen. En este artículo se presenta un recuento de los resultados obtenidos del estudio de la reflexión de matrices en un espejo.

Si se acepta que los símbolos que utilizamos a diario para representar cualquier número (real o complejo) no tienen "lados", es decir que por cualquier lado o desde cualquier ángulo que se les mire, siguen representando el mismo número, o sea que los símbolos no tienen ni arriba ni abajo, ni derecha ni izquierda, las imágenes que obtenemos al reflejar una matriz en un espejo presentan propiedades muy interesantes.

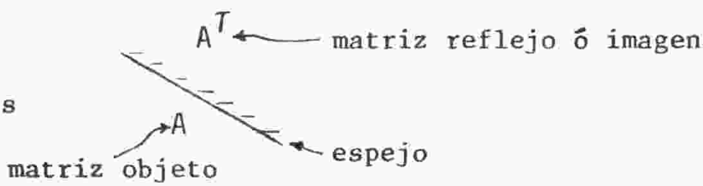
El presente artículo está dedicado al estudio de tales imágenes y los resultados obtenidos por el autor se cobijan bajo el título inicial. Empezamos por definir la palabra *palindromía*. La enciclopedia Larousse nos dice: ... escrito *palíndromo* es aquel que conserva su significado leído de derecha a izquierda ..., por ejemplo las palabras *oso* y *oro* son palíndromas. La frase: "Dábale arroz a la zorra el abad", es un palíndromo.

En el caso de reflexión de matrices en un espejo consideraremos tres tipos básicos: reflexiones a 0 grados, a 45 grados y a 90 grados, así:

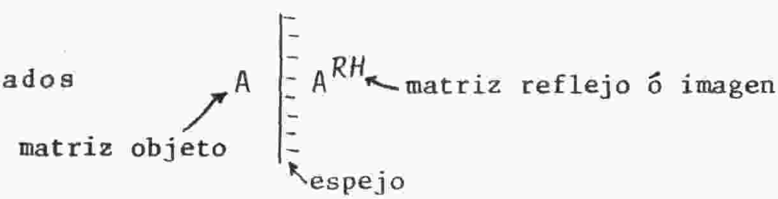
a 0 grados:



a 45 grados



a 90 grados



En cada caso las imágenes obtenidas A^{RV}, A^{T} y A^{RH} son matrices muy especiales.

En la reflexión a 45 grados obtenemos la matriz muy conocida A^T, o sea la *transpuesta* de A.

Nos dedicaremos pues con mayor énfasis a las imágenes A^{RV} y A^{RH} que llamaremos respectivamente *reflejo vertical* de A y *reflejo horizontal* de A.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^{RV} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{RH} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Si recordamos que una matriz es un conjunto de números, doblemente ordenado, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, vemos que A^{RV} es la matriz A leída de izquierda a derecha y de *abajo* hacia *arriba*, y A^{RH} es la matriz A leída de *derecha* a *izquierda* y de arriba hacia abajo.

Es claro entonces que A^{RV} se puede obtener de

A permutando sus filas de cierta manera y por consiguiente existe una matriz de permutación E tal que $A^{RV} = EA$, asi mismo A^{RH} se obtiene de A permutando sus columnas, luego existe una matriz de permutación E tal que $A^{RH} = AE$. El autor verificó que en ambos casos $E = I^{RH} = I^{RV}$, es decir que la matriz E es tanto el reflejo horizontal como el reflejo vertical de la matriz idéntica.

$$E = \begin{bmatrix} \bigcirc & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \bigcirc \end{bmatrix}$$

Como $A^{RV} = EA$ y $A^{RH} = AE$ y por consiguiente la matriz E juega el papel de *espejo*, la llamaremos *matriz espejo*.

Es fácil verificar que esta matriz es tripotente, involutiva, unitaria y no singular reflexiva.

Se muestra que los operadores *RH* y *RV* gozan de las mismas propiedades del operador *transposición* salvo en el caso del producto donde se verifica que $(AB)^{RH} = AB^{RH}$ y $(AB)^{RV} = A^{RV}B$.

También se tiene $(A^{-})^{RH} = (A^{RV})^{-}$, que A sea regular o no (A^{-}= seudo-inversa de Moore-Penrose).

Llamaremos *palindromas horizontales* y *palindromas verticales* a aquellas matrices que coinciden con sus respetivos *reflejos*, y *palindroma doble* a aauella que coincide simultáneamente con sus dos *reflejos*.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = A^{RH} \quad ; \quad A \text{ es palindroma horizontal}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix} = B^{RV} \quad ; \quad B \text{ es palindroma vertical}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = C^{RH} = C^{RV} \; ; \; C \text{ es palindroma doble}$$

Si además $A = A^T = A^{RH} = A^{RV}$, A se llamará *tetrasimétrica*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A^T = A^{RH} = A^{RV} \; ; \; A \text{ es tetrasimétrica.}$$

Por último unos resultados con respecto a la distribución *normal multivariada*. (No singular y singular).

1) Si $X \sim N_p(\mu, V)$, entonces $X^{RV} \sim N_p(\mu^{RV}, V^{RVRH})$,

aquí $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ es un vector de p variables aleatorias, con vector de medias $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$ y matriz de varianza-covarianza $V = [cov\ (x_i, x_j)]$ no singular.

2) Si $X \sim N_p(\mu\, \mathbb{1},\ \sigma^2 I)$, entonces $X^{RV} \sim N_p(\mu\, \mathbb{1},\ \sigma^2 I)$.

3) Si $X \sim SN_p(\mu, V)$, V es tetrasimétrica, entonces $X^{RV} \sim SN\ (\mu^{RV}, V)$.

Aquí $SN_p(\mu, V)$ es la distribución normal singular, con vector de medias μ y matriz de varianza-corvarianza V tetrasimétrica (se puede tomar palindroma doble, y se conserva el resultado). Por ser V tetrasimétrica, V es singular!

4) Si $X \sim SN\ (\mu, V)$ y V es palindroma vertical, entonces: $E(X' X^{RV}) = tr(V) + \mu'\ \mu^{RV}$.

5) Si $X \sim N_2(\mathbb{0}, \sigma^2 I)$ y $F_X(x_1, x_2)$ es la función de densidad de X, entonces, la matriz $[F_X(i,j)]$, donde (i,j) son puntos reticulares, es una matriz tetrasimétrica.

* * *