Revista Colombiana de Estadística
No. 4 - 1981

LA FUNCION DE COSTO EN LAS CADENAS DE MARKOV

Luís G. Moreno O.

Profesor Asociado

Universidad Nacional

Abstract

This paper presents an elementary description of the cost role in Markov Chains, when the states are ergodic and they belong to the same class and when the chain is periodic. Since the cost does not depend only on the states of the chain but also on other factors, these factors are analyzed and clarified with an example.

Resumen

Comúnmente las transiciones en las cadenas de Markov implican cierto costo que depende de los estados en que se hallan las cadenas y de otros factores relacionados con estos estados. Hay dos clases de costos, el costo esperado por unidad de tiempo y el costo promedio esperado que se presenta al tener en cuenta varias unidades de tiempo. Para un número específico de unidades de tiempo, existe cierta diferencia entre los costos, la que desaparece cuando estos se establecen después de largo tiempo.

Puesto que, como se verá, no siempre existe la probabilidad de transición $P_{ij}^{(t)}$ después de largo tiempo (cuando $t \to \infty$), es más conveniente, en este caso, recurrir al costo promedio esperado. Sin embargo, los dos tipos de costos serán estudiandos en detalle.

EL COSTO ESPERADO POR UNIDAD DE TIEMPO.

Consideremos una cadena de Markov de tiempo discreto $\{X_t\}$, con espacio de los estados $S=\{0,1,2,\ldots\}$. Suponemos que se presenta un costo $C(j)$ cuando la cadena se halla en el estado $X_t=j$ en el tiempo t y que la función $C(\cdot)$ es independiente de t. El costo esperado en la t-ésima unidad de tiempo, cuando inicialmente la cadena se hallaba en el estado i, viene dada por

$$E[C(X_t)/X_o=i]=\sum_{j=o}^{\infty} C(j)\,P\{X_t=j/X_o=i\}=\sum_{j=o}^{\infty} C(j)\,P_{ij}^{(t)}$$

Si los estados i y j son ergódicos y pertenecen a una misma clase,

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}^{(t)}$$

existe y es igual a P_j, en donde P_j pertenece a la sucesión $\{P_o, P_1, P_2, \ldots\}$, que constituye la distribución estacionaria de la cadena. En este caso, el costo esperado, después de largo tiempo, cuando inicialmente la cadena se halla en el estado i, está dado entonces por

$$\lim_{t\to\infty} E[C(X_t)/X_o=i]=\sum_{j=o}^{\infty} C(j)P_j$$

En muchos problemas que se encuentran en la práctica, el costo puede depender no sólo del estado en que se halla la cadena sino de otros factores que aunque son independientes de este estado pueden estar relacionados con él. Consideremos m factores independientes entre sí e independientes del tiempo t y representados por las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. En estas circunstancias el costo se indica por la función $C(X_t; Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ y si el estado inicial de la cadena es i,

$$E[C(X_t;Y_1,\ldots,Y_m)/X_o=i]=E\{E[(C(X_t;Y_1,\ldots,Y_m)/X_t)/X_o=i]\}$$

$$=\sum_{j=o}^{\infty} E[C(j;\ Y_1,\ldots,Y_m)]P_{ij}^{(t)}$$

indica el costo esperado en la t-ésima unidad de tiempo. Al cabo de un tiempo prolongado, el costo esperado por unidad de tiempo sería,

$$\lim_{t\to\infty} E[C(X_t;\ Y_1,\ldots,Y_m)/X_o=i)]=\sum_{j=o}^{\infty} E[C(j;Y_1,\ldots,Y_m)]P_j$$

EL COSTO PROMEDIO ESPERADO POR UNIDAD DE TIEMPO.

Ahora supondremos que la cadena de Markov no es aperiódica. Bajo esta hipótesis,

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}^{(t)}$$

podría no existir, en cuyo caso se debe recurrir a la suma de Césaro, siendo así necesario tratar con el costo promedio esperado por unidad de tiempo que se presenta en las primeras n unidades de tiempo. Nuevamente la función $C(X_t)$, independiente del tiempo t, representará el costo cuando la cadena se halle en el estado X_t. Este costo promedio esperado, si la cadena inicialmente se encuentra en el estado i, es el siguiente :

$$E\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)/X_o=i\}= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E[C(X_t)/X_o=i] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=o}^{\infty} C(j)P_{ij}^{(t)}$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} C(j)\cdot \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} P_{ij}^{(t)}$$

Al cabo de un tiempo prolongado, el costo promedio esperado por unidad de tiempo, cuando i es el estado inicial de la cadena, viene a ser,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)/X_o=i\right] = \sum_{j=o}^{\infty} C(j)\, P_j\ ,$$

en donde la sucesión $\{P_j\}$, como antes, constituye la distribución estacionaria de la cadena.

Cuando el costo también dependa de los factores representados por las variables $Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$, lo identificamos por la función $C(X_t; Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$, como se hizo anteriormente. En esta forma, si la cadena se halla inicialmente en el estado i, este costo se expresa como sigue :

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t;Y_1,\ldots,Y_m)/X_o=i\right] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\{E[C(X_t;Y_1,\ldots,Y_m/$$

$$/X_t/X_o=i]\} = \sum_{j=o}^{\infty} E[C(j;\ Y_1,\ldots,Y_m)]\cdot \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} P_{ij}^{(t)}$$

Después de un tiempo prolongado, el costo promedio esperado por unidad de tiempo, cuando el estado inicial de la cadena es i, viene dado por

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t;Y_1,\ldots,Y_m)/X_o=i\right] = \sum_{j=o}^{\infty} E[C(j;Y_1,\ldots,Y_m)]P_j.$$

Ejemplo.

Un almacén de electrodomésticos vende un modelo particular de neveras, el cual se puede ordenar semanalmente. La demanda D de este artículo, en cualquier semana, se rige por una distribución geométrica con parámetro 1/4. $X_o=1$, representa el número de neveras disponibles al comienzo y la variable X_t indicará el número de neveras en existencia al final de la t-ésima semana ($t = 1,2,\ldots$).

Si al finalizar una semana hay menos de dos neveras, se efectúa un pedido de dos unidades, de lo contrario, no se hace pedido alguno. Por otra parte, las ventas se pierden cuando la demanda excede el inventario disponible.

De acuerdo con las consideraciones anteriores el espacio de los estados está dado por $S=\{0,1,2,3\}$ y las variables X_t y X_{t+1} se hallan relacionadas por la ecuación,

$$X_{t+1} = \begin{cases} (X_t - D)^+ & \text{si } X_t \geq 2 \\ (X_t + 2 - D)^+ & \text{si } X_t < 2. \end{cases}$$

Entonces, teniendo en cuenta que la demanda D se distribuye geométricamente con parámetro $1/4$, la matriz de probabilidades de transición será

$$P = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 36 & 12 & 16 & 0 \\ 27 & 9 & 12 & 16 \\ 36 & 12 & 16 & 0 \\ 27 & 9 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

y de esta manera, la distribución estacionaria de la cadena queda en la forma :

$$P_o = \frac{9}{17}\,,\ P_1 = \frac{3}{17}\,,\ P_2 = \frac{4}{17}\,,\ P_3 = \frac{1}{17}$$

Ahora bien, por cada nevera que se halle en existencia al finalizar cada semana, hay un costo de almacenaje de \$1.000. Además, por cada nevera requerida que no haya en existencia se presenta una pérdida valorada en \$10.000. De esta forma, el costo en la t-ésima semana se puede representar por la función $C(X_{t-1},D)$, definida como sigue,

$$C(0,D) = 10.000\,(D-2)^+$$
$$C(1,D) = 1.000 + 10.000\,(D-3)^+$$

$$C(2,D) = 2.000 + 10.000\,(D-2)^+$$
$$C(3,D) = 3.000 + 10.000\,(D-3)^+$$

Puesto que el valor esperado de la variable $(D-j)^+$ viene a ser

$$\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}(i-j)^+\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{4}\sum_{i=j}^{\infty}(i-j)\left(\frac{3}{4}\right)^i = 3\left(\frac{3}{4}\right)^j$$

tenemos que,

$$E[C(0,D)] = 16.875 \qquad E[C(2,D)] = 18.875$$
$$E[C(1,D)] = 13.656,25 \qquad E[C(3,D)] = 15.656,25$$

Entonces, los costos esperados, en la primera semana y después de un tiempo prolongado, son respectivamente,

\$ 16.492,68 y \$ 16.705,88

Haciendo uso de la matriz de transición en dos pasos, vemos que

\$ 16.662,57

es el costo esperado, en la segunda semana. Finalmente, el costo promedio esperado por semana, durante las dos primeras semanas es igual a

$$\frac{1}{2}\,(16.492,68 + 16.662,57) = \$16.577,63$$

BIBLIOGRAFIA

Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, 2nd. ed., 1957.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J., Introduction to Operation Research, Holden - Day, 1970.

Kemeny, J.G. and Snell, J.L., Finite Markov Chains, Springer-Verlag, 1976.