Revista Colombiana de Estadística.
N° 3 - 1981

UN MODELO GEOMETRICO PARA LOS FLUJOS DE EFECTIVO

Marco Fidel Castillo
Profesor Asociado
Universidad Nacional

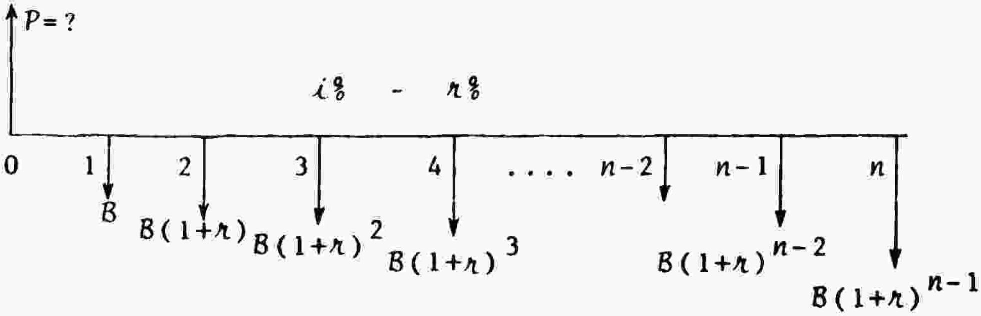
En los diferentes tratados de los modelos financieros donde se trabaja con la *Teoría del Interés*, es corriente encontrar el manejo de los flujos de efectivo, bajo el supuesto de que su comportamiento es uniforme, es decir los ingresos y egresos de efectivo son iguales durante todos los períodos de la vida útil de un proyecto; es posible también ver estos flujos aumentando o disminuyendo en forma constante, es decir un comportamiento similar al de los progresiones aritméticas, a dichos flujos se les denomina gradientes uniformes (aritméticos).

Sinembargo poca preocupación existe por el tratamiento del crecimiento o disminución en forma geométrica de los flujos de efectivo, es decir determinar fórmulas que son útiles dado el proceso inflacionario mundial, donde es corriente que los costos de los alimentos, los salarios, arriendos, etc.; aumentan en forma geométrica y no como lo expuesto anteriormente.

Es por tanto necesario exponer un *Modelo Geométrico*, para determinar el Valor Presente Neto (P) de los flujos de efectivo de un proyecto, o la Anualidad correspondiente, A.

El problema se visualiza mediante el diagrama de flujo de efectivo del proyecto, que consiste en graficar los períodos de vida útil, o sea puntos sobre una línea horizontal; tanto como, los egresos e ingresos son flechas hacia arriba o hacia abajo respectivamente en los puntos de cada uno de los períodos del proyecto.

De tal forma se tiene:



donde:

P : Valor presente total de la serie gradiente geométrica.

$r\%$: Aumento porcentual de los flujos de efectivos

$i\%$: Tasa de interés - Tasa de descuento

B : Flujo de efectivo base

n : Número de período del proyecto (Vida útil).

Nótese en el diagrama que el primer flujo es B en el período 1, el segundo es $B(1+r)$ en el período 2, es decir el primer flujo más su respectivo aumento geométrico, y así sucesivamente hasta el último que es $B(1+r)^{n-1}$; estos flujos se comportan como valores futuros que se traerán al presente total ubicado en el período 0, según diagrama.

Al utilizar el factor de descuento $\frac{1}{(1+i)^n}$ para valores futuros, se tiene el valor presente total como la suma de cada uno de los valores presentes correspondientes:

$$P = B\frac{1}{1+i} + B\frac{1+r}{(1+i)^2} + B\frac{(1+i)^2}{(1+i)^3} + \ldots + B\frac{(1+r)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}}$$

$$+ B\frac{(1+r)^{n-1}}{(1+i)^n} \Longrightarrow$$

$$P = B\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+r}{(1+i)^2} + \frac{(1+r)^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{(1+r)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1+r)^{n-1}}{(1+i)^n}\right] \quad (1)$$

Operando a ambos misembros la Ec1 por $\frac{(1+r)}{1+i}$, se tiene:

$$P\frac{(1+r)}{1+i} = B\left[\frac{1+r}{(1+i)^2} + \frac{(1+r)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+r)^3}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{(1+r)^n}{(1+i)^{n+1}}\right] \quad (2)$$

Al restar Ec 2-Ec1 miembro a miembro queda:

$$P\ \frac{(1+r)}{1+i} - P = B\left[-\frac{1}{(1+i)^{1}} + \frac{(1+r)^{n}}{(1+i)^{n+1}}\right]$$ operando y

simplificando por $(1+i)$, se obtiene:

$$P(1+r) - P(1+i) = B\left[\frac{(1+r)^{n}}{(1+i)^{n}} - 1\right] \Rightarrow P(r-i) =$$

$$= B\left[\frac{(1+r)^{n}-(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}\right] \Rightarrow$$

$$P = B\left[\frac{(1+i)^{n}-(1+r)^{n}}{(i-r)\quad(1+i)^{n}}\right] \qquad i \neq r \qquad (3)$$

La Ec 3 determina el valor presente total de los flujos de efectivo, que inician en el período 1, crecen en forma geométrica r%, y son descontados al i%. La determinación del modelo geométrico es útil para: toma de decisiones financieras entre proyectos, constitución de fondos de reserva, etc.

Aparece en Ec 3 $i \neq r$, puesto que si $i = r$ nos resultaría indeterminada y que se interpreta según Ec 1 por:

$$P = B\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+i}{(1+i)^{2}} + \frac{(1+i)^{2}}{(1+i)^{3}} + \ldots + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n}}\right]$$

$$= B\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+i} + \ldots + \frac{1}{1+i}\right] = B\ \frac{n}{1+i} \Rightarrow$$

$$P = \frac{nB}{1+i} \tag{4}$$

La Ec 4 muestra que los crecimientos de efectivo se disminuyen igualmente con los descuentos y de este hecho el problema se reduce a sumar la base B n-veces y solo se necesitaría trasladarla del período 1 al 0 para encontrar P.

La forma convencional para la notación de la Ec 3 sería:

$$\text{Si} \quad P = B\left[\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{(i-r)\quad(1+i)^n}\right] \Leftrightarrow P = B\ (P/B,\ i\% - r\%,\ n),$$

que es similar a la usada en los libros de finanzas, matemáticas financieras e ingeniería económica para otros factores.

Para finalizar es necesario determinar la fórmula para la anualidad correspondiente a los flujos de efectivo con crecimiento geométrico. Se obtiene usando el factor recuperación de capital:

$$A = P\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \quad ; \quad \text{pero si:}$$

P = Ec 3 del modelo geométrico entonces:

$$A = B\left[\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{(i-r)\quad(1+i)^n}\right]\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \Rightarrow$$

$$A = B\left[\frac{(1+i)^{2n}-[(i+r)(1+i)]^n-(1+i)^n+(1+r)^n}{i(i-r)\quad(1+i)^{2n}}\right] \tag{5}$$

La importancia de la Ec 5 radica en la necesidad de establecer costos anuales uniformes equivalentes (Anualidades) para efecto de tomar decisiones sobre los proyectos.

El modelo geométrico expuesto es consistente para valores $i < r$ e $i > r$ sin excepción, por lo que se perfila de gran utilidad en la aplicación de la *Teoría del Interés*.

* * *

BIBLIOGRAFIA

[1] Castillo,M.F., *Matemática Financiera, Enfoque toma de decisiones*, Bogotá, Mimeo (1980)

*