

Revista Colombiana de Matemáticas
N° 3 - 1981

A PROPOSITO DE LOS MODELOS SOBRE CAFE EN COLOMBIA

Francisco Cepeda C.

Profesor Asistente
Universidad Nacional

El café es el producto de mayor importancia para un gran número de naciones en vía de desarrollo. Ocupa uno de los primeros renglones en el comercio internacional de productos agrícolas con una cifra de exportación que sobrepasa los 8.000 millones de dólares en 1976. Para muchos estados de Africa y América Latina los ingresos cafeteros son de crítica importancia para hacerle frente a la crisis energética y para adquirir los bienes de capital necesarios para impulsar el crecimiento económico.

En 1976 en latinoamérica el café generó más del 50% de las exportaciones, en Colombia (58%), El Salvador (56%) y más del 20% en Guatemala (34%), Costa Rica (27%) y el Brasil (24%). En Africa pudieron solventar una crisis financiera de enormes propor-

ciones, gracias al aumento de los precios del café que generaron más del 80% de sus divisas. En términos generales se puede afirmar que para millones de seres humanos el desarrollo de la economía cafetera, su estabilidad, los precios del café y los niveles del mercado internacional son determinantes en su nivel de vida. De ahí la importancia de intentar predecir con métodos científicamente fundamentados el comportamiento de los indicadores principales asociados a la economía cafetera.

En términos muy generales puede decirse que la oferta mundial de café está regida en sus fluctuaciones fundamentalmente por las variaciones de la producción Brasileña. Pero la *tendencia* se determina por el crecimiento de la producción de los países africanos y de algunos países latinoamericanos. Desde luego, el nivel de los precios también influye en los volúmenes de producción y de consumo.

En este sentido los países productores tienen la posibilidad de controlar la oferta con el fin de evitar la saturación del mercado. Pero ante ellos se presenta una contradicción: vender una cantidad mayor cada vez a un precio cada vez más bajo, o pactar la cantidad ofrecida de manera que ésta se adecúe a la demanda y no permita una baja cada vez mayor de los precios de exportación.

Sin embargo, la decisión sobre esta política se ve afectada por varias causas:

1) El control de la oferta se establece mediante pactos de cuotas de exportación entre los países productores, que no siempre han sido cumplidas.

2) Los países compradores (en su mayoría países capitalistas desarrollados) mantienen un gran poder sobre las negociaciones del mercado. Es de destacar que estas políticas teóricamente estudiadas en la práctica, debido a las contradicciones del sistema capitalista mundial, no han conducido a una estabilización del mercado. Así por ejemplo: la crisis de 1929 hizo descender los precios del café en los Estados Unidos de un nivel de 48.2 ctvs. la libra en 1928 a 32.8 ctvs., 29.4 ctvs. 26.4 ctvs. en 1931, 32 y 33 respectivamente. La segunda guerra mundial redujo las importaciones de un nivel de 38 millones de sacos (60 Kgr. c/u) a finales de la década del 30, a un promedio de 23 millones durante la guerra. Brasil, principal productor del grano se vió obligado a quemar la mayor parte de las existencias para contrarrestar la baja de los precios en dicho período. En la presente década el precio en el mercado mundial acusaba bajas, pero las heladas en Brasil en Julio de 1975, unidas a la guerra de liberación de Angola y al terremoto de Guatemala, hacen que las cotizaciones en el mercado mundial se ande más de dos dólares la libra, llegando a 3.30 en los primeros meses de 1977, a partir de los cuales comienzan bajas posteriores.

A pesar de tales fluctuaciones es posible y necesaria la utilización de métodos y modelos económico-matemáticos y económico-estadísticos para pronosticar, a corto, medio y largo plazo, la dinámica de la producción, exportación y consumo de café, con vistas a sustentar los planes de desarrollo económico de los países, para los cuales la producción del grano es determinante. (ver [1]).

En la evaluación del desarrollo de la economía cafetera se vienen manifestando distintas direcciones que toman en cuenta, total o parcialmente, los distintos factores que influyen en el mismo. Entre estas direcciones pueden destacarse como las más fundamentales, las siguientes:

- Pronósticos de la producción por vía del estudio de las características biológicas de las plantas;
- Pronósticos de la producción a partir de la dinámica del área sembrada;
- Pronósticos de la producción a partir de pronósticos del consumo en los principales países exportadores;
- Pronósticos de producción a partir del comportamiento de productos sustitutos;
- Pronósticos de producción a partir de la utilización de funciones de producción.

Los pronósticos de producción basados en la es-

timación de la productividad promedio por árbol, a partir de su relación con los factores que la determinan, toman las formas siguientes:

$$Y = f(T, D) \quad (1)$$

donde:

Y = productividad promedio anual de un cafeto.

T = edad productiva del cafeto.

D = lluvia caída durante el tiempo de floración del cafeto.

En un caso particular se ha empleado exitosamente la siguiente función:

$$Y = 1,67 - \frac{0,285 T}{0,08 D} \quad (\text{ver [2]})$$

Para llegar a un estimativo de la producción en la región o país dado, resulta necesario conocer el número de árboles en producción durante el período en cuestión; información que puede obtenerse a partir de las publicaciones de censos agrícolas o investigaciones por muestreo, [3].

Otras funciones de pronosticación utilizadas en este mismo grupo consideran la productividad media del cafeto en dependencia del número de nudos del tallo principal.

En el segundo grupo de pronósticos puede destacarse el enfoque utilizado para la economía cafete-

ra de Colombia, Brasil y El Salvador. Este está basado en el análisis conjunto de la dinámica de la producción y las nuevas plantaciones, haciendo un estudio de las variantes posibles del desarrollo ulterior a partir de hipótesis sobre las tasas de crecimiento de la población, los ingresos disponibles de la población y los precios de compra al cultivador.

En el caso de Colombia [4] se pronosticaron los promedios bi-anales entre los años 1956/57 y 1955/56. En la Tabla 1 se presentan los valores pronosticados y los reales.

Como se aprecia, los estimados obtenidos difieren bastante de los valores reales, por lo cual el uso del método es limitado. Ello era de esperar, toda vez que sólo toma en consideración como factores decisivos aquellos de carácter extensivo, asumiendo condiciones constantes o casi constantes en otros factores influyentes de carácter intensivo.

TABLA 1

PRODUCCION DE CAFE VERDE EN COLOMBIA - 100 ton.

ANOS	Valores Estimados	Valores reales	Error relativo %
1956/57	3735,0	3501,5	6.7
1957/58	3813,4	4168,0	(8,5)
1958/59	3893,5	4574,5	(14,9)
1959/60	3975,2	4632,5	(14,2)

Al analizar el grupo de modelos de consumo para países importadores se destacan los trabajos de los economistas norteamericanos. Teniendo en cuenta el peso del mercado norteamericano en el mercado mundial cafetero y en particular para Colombia, nos restringiremos a presentar un modelo para el consumo en USA.

En este caso, se considera el consumo per cápita de café (C) como función del ingreso per cápita disponible (I), el tiempo (t) y la relación entre los precios del café y el índice general de precios al consumidor (a esta razón la designaremos como p). El modelo obtenido fué [5].

$$C = \frac{5,57 I^{0,223} (1,007)^t}{p^{0,156}} \quad (2)$$

Los modelos que toman en cuenta el comportamiento de los sustitutos del café representan una tendencia relativamente nueva en la modelación del consumo y la producción. Entre los trabajos más destacados se encuentra el que plantea un modelo multi-ecuacional (aplicable a distintos países o grupos de países) de la forma [6]:

$$Q_p = Q_c (1 + e_1 r_1 + e_2 r_2 + e_3 r_3 + e_4 r_4 + r_5 + r_6)^t \quad (3)$$

donde

Q_p : consumo proyectado

Q_c : consumo en el período actual

- e_1 : elasticidad respecto al precio del café
- r_1 : tasa de crecimiento proyectada de los precios del café
- e_2, e_3, e_4 : elasticidades respecto al precio del primero, segundo y tercer sustituto del café (respectivamente).
- r_2, r_3, r_4 : tasas de crecimiento proyectadas de los precios del primero, segundo y tercer sustituto del café, respectivamente.
- r_5 : tasa de crecimiento (tendencia) del consumo en el período observado.
- r_6 : tasa de crecimiento proyectada para la población
- t : período de pronóstico (años).

Evidentemente, este tipo de modelo requiere de la estimación preliminar de muchas características, lo cual es una posible limitante en su uso.

La aplicación de las ecuaciones (2) y (3) para los principales países importadores permite -después de ciertas agregaciones- llegar a una estimación de la demanda en el mercado mundial, a partir de la cual se pueden conocer los requerimientos mundiales de exportación y por consiguiente las cuotas de exportación de los principales países exportadores.

Es conocida la relación de causalidad que existe (especialmente cuando son válidos los mecanismos de mercado) entre los requerimientos de exportación (demanda) y la producción (oferta), por lo cual estos

métodos de estimación del consumo a nivel multinacional son una vía para la pronosticación de la producción.

Finalmente, están los pronósticos a partir de funciones de producción. Estos son los que hasta ahora ofrecen mayor confiabilidad, toda vez que consideran la interacción conjunta de los principales factores influyentes en el proceso productivo.

El enfoque más general, considera un modelo de la forma [7]:

$$Y(t) = A(t) \{ [L(t), M(t), S(t), C(t), W(t)]$$

donde:

t : tiempo

$Y(t)$: función de producción

$A(t)$: progreso científico técnico

$L(t)$: laboreo y trabajo humano

$M(t)$: maquinaria e implementos

$S(t)$: áreas de cultivo

$C(t)$: gastos en abonos e insecticidas

$W(t)$: otros.

Frecuentemente se emplean para el pronóstico, funciones del tipo:

$$Y(t) = A(t) L(t)^{\alpha} M(t)^{\beta} S(t)^{\gamma} C(t)^{\delta} W(t)^{\eta}$$

donde α , β , γ , δ y η son parámetros fijos.

Este enfoque también ha encontrado generalizaciones en los modelos complejos multinacionales en los cuales se toman en cuenta no sólo factores económicos sino meteorológicos, lo cual representa un aumento sensible en la eficiencia de los métodos de pronosticación de la producción agrícola.

* * *

BIBLIOGRAFIA

- [1] Vinietsky, G., Kildishev, G.S., *Teoría de probabilidades y estadística matemática*, Moscú, pág. 3, (1975).
- [2] Machado Alberto, S., *Pronósticos de las cosechas del café*, Medellín, págs. 441-469 (1952).
- [3] Méndez, I., y otros, *Diseño de muestras para estimación de cosecha del café en México*, Vol.6 N°91, págs. 1-17 (1975).
- [4] El café en América Latina. Problemas de la productividad y perspectivas. Colombia y El Salvador. México D.F., Cap. 9 FAO.CEPAL. (1960).
- [5] Coffee consumption in the United States, 1920-1965. Washington, Cap. 7-15 (1960).
- [6] Timms D. World demand prospects for coffee in 1980 with emphasis on trade by less developed countries, W., D.C. (1973).
- [7] Bishnev, S.M. *Bases de la pronosticación*. Moscú, pags. 153-154, (1977).

Revista Colombiana de Estadística
N° 3 - 1981

MODELOS MATEMATICOS ELEMENTALES EN PROYECCIONES DE POBLACION

David Ospina Botero

Profesor Asistente
Universidad Nacional

Introducción. Uno de los más importantes problemas que los países tiene que enfrentar es el crecimiento poblacional. Las tasas de incremento que prevalecieron durante la temprana historia humana solo tuvieron ligeras desviaciones. Sin embargo, a partir del siglo XIX las tasas de población han estado creciendo hasta tal punto que todos los gobiernos en el mundo están preocupados. El control natal no es suficientemente conocido y las tasas de mortalidad han venido decreciendo en toda parte [1]. Este problema ha motivado el estudio científico del número de seres humanos. En el siglo XIII Thomas Malthus fué la primera persona en proponer un modelo matemático [2], pero no fué hasta después de 1946 que este modelo alcanzó completo desarrollo [3]. En este corto estudio serán examinados los modelos más sim-

ples en las proyecciones poblacionales, como un todo. El propósito de este artículo es ayudar a aquellos estudiantes interesados en el problema del crecimiento poblacional y que no estén familiarizados con él.

Inicialmente los métodos aritméticos, geométricos, exponencial y exponencial modificado serán explicados. Más adelante, estos métodos serán aplicados a un caso concreto: *Colombia*.

Se ha seleccionado nuestro país porque él es representativo de una nación en desarrollo. Además, su situación demográfica muestra características muy especiales que serán discutidas en éste artículo. No es útil considerar un país desarrollado porque tales países no tienen tasas de crecimiento tan inestables como las de los países en desarrollo. Finalmente, algunas recomendaciones serán hechas basadas en el caso analizado.

CAPITULO I

MÉTODOS:

El medio más exacto para estimar población, demanda la existencia de datos relacionados con cada variable involucrada: Número de nacimiento, muertes y migraciones. Sin embargo, esto no es posible siempre y la falta de tales datos obliga a los demógra-

fos a utilizar diferentes métodos de proyección. En estos casos los datos de los censos con usualmente asequibles y los métodos aritmético y geométrico casi siempre dan buenos resultados [4], [5]. No obstante, el modelo que se ajusta mejor a los cambios reales del crecimiento poblacional es el exponencial, cuando se hacen supuestos adecuados.

1.1 Método aritmético.

El método aritmético asume que el cambio poblacional anual (o por unidad de tiempo considerada), en un área o región específica, es constante. Si la población en el tiempo 0 es P_0 y la población, en la misma área, n años después es P_n . Entonces, la fórmula para obtener el incremento anual (R_A) está dada por

$$R_A = \frac{P_n - P_0}{n}$$

(ver [4] p.81), [6] y [7].

Las estimaciones de la población en el tiempo t , P_t serán:

$$P_t = P_0 + t R_A \quad (t > n)$$

$$P_t = P_n + (t-n) R_A$$

(t y n son números positivos).

A través de este método pueden obtenerse proyecciones lógicas cuando la tasa de crecimiento es decreciente (por ejemplo, Estados Unidos durante la década de los 60) (Ver [5] pp.553-554), y las predicciones son he-

chas para períodos no mayores de 5 años, ya que el error de estimación es directamente proporcional a la cantidad de tiempo.

1.2 Método geométrico.

El método geométrico asume un porcentaje constante de cambio por unidad de tiempo. Por tanto, si la población en el tiempo n ha aumentado a P_n ,

$$P_n = P_0(1+R_G)^n$$

donde R_G es la tasa geométrica (ver [7] p.35).

R_G puede ser hallada en la última fórmula tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad.

$$\log P_n = \log P_0 + n \log(1+R_G)$$

$$y \quad R_G = \text{antilog} \left\{ \frac{\log P_n - \log P_0}{n} \right\} - 1$$

Sin embargo, se ha podido mostrar que esta tasa no es adecuada cuando son necesarias estimaciones por largos períodos de tiempo. Además, se han logrado pobres resultados cuando la tasa de crecimiento es decreciente, o en casos cuando la densidad de población en una región dada es tan alta que es de esperarse una tasa decreciente de cambio a largo plazo (ver [4] p.82)

Por otra parte, cuando las proyecciones se hacen para un período corto, esta tasa es preferida a la aritmética. La tasa geométrica debe ser escogida cuando el incremento poblacional es directamente pro

porcional al número de habitantes en un momento dado.

1.3 Método exponencial (Modelo de Malthus).

Ya se ha dicho que Malthus fué la primera persona en desarrollar un modelo matemático adecuado de crecimiento poblacional. Su preocupación respecto de la limitación de los recursos económicos y del excesivo incremento de la población humana lo motivó suficientemente para desarrollarlo.

Su modelo puede ser expresado como una ecuación diferencial de primer orden, así:

$$\frac{dP}{dt} = R_E P$$

donde $\frac{dP}{dt}$ es la derivada de la población con respecto al tiempo, y R_E es el incremento poblacional (ver [3] p.23).

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$P_t = P_0 e^{Rt}$$

donde P_0 = Población en el tiempo 0

P_t = Población en el tiempo t

e = Constante matemática (aprox. 2,7183) [8].

Para un período fijo n , esta ecuación puede ser expresada como:

$$P_n = P_0 e^{R_E n}$$

El valor de R_E será entonces:

$$R_E = \frac{\ln P_n - \ln P_0}{n} \quad (\text{ver [6] p.379})$$

donde \ln = Logaritmo Neperiano.

Puede demostrarse que la tasa exponencial es el límite de la tasa geométrica constante cuando la última expresión se aplica a cada infinitesimal de tiempo.

1.4 Un caso Especial de Exponencial Modificada:

En aquellos casos cuando el número de habitantes en un país determinado (o ciudad) depende únicamente del número de nacimientos y muertes, es muy útil modificar el último modelo de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = (a + bt)P$$

donde $(a+bt)$ es una ecuación de primer orden que expresa las tasas geométricas como una función del tiempo. Muy a menudo esta ecuación se ajusta por el principio de los mínimos cuadrados [9]

La solución de la ecuación anterior es:

$$P_t = P_0 e^{(at+bt^2)}$$

Una gran desventaja de este método es que el error en la predicción aumenta de una manera desorbitante

cuando el período de tiempo es muy largo.

CAPITULO II

EL CASO COLOMBIANO.

La importancia de considerar el caso de Colombia obedece a que nuestro país tiene características demográficas similares a la mayoría de los países latinoamericanos. Por otra parte, es conveniente recalcar que Colombia es una de las pocas naciones en desarrollo donde el incremento en la tasa de población ha disminuído.

El impacto de la tecnología ha causado:

- a) Más nacimientos debido al mejoramiento en la distribución del servicio médico,
- b) menos nacimientos debido al cambio en las actividades sociales (mayor control natal),
- c) más muertes debido a la existencia de más pesticidas y a las actitudes de la clase media (más trabajo y, por tanto, más enfermedades del corazón por ejemplo),
- d) menos muertes infantiles debido a una mejor distribución del cuidado médico.

Las últimas consecuencias han dado como resultado un menor número de nacimientos y una mortalidad

fija [10].

Más aún, el demorado proceso para registrar las variables concernientes al crecimiento poblacional (número de nacimientos, muertes y migraciones) no permite predicciones diferentes de aquellas que consideran la población globalmente.

Las estimaciones serán hechas para los años 1980, 1990 y 2000. En todos los casos, menos para el último (Exponencial Modificada), los dos últimos censos serán utilizados.

TABLA DE DATOS

Año	Población a mediados del año (De acuerdo a los censos) [11] [12]	
1951	11'548.172	
1964	17'484.508	
1973	23'004.499	

TABLA DE ESTIMACIONES DE POBLACION

Método	1980	1990	2000
Aritmético	27'297.823	33'431.143	39'564.463
Geométrico	28'485.472	38'655.393	52'456.191
Exponencial	28'479.650	38'636.205	52'414.841
Exp.Modificado	28'193.042	36'454.876	45'653.269

TASAS ESTIMADAS

(Período 1964-1973)

Método Aritmético:	$R_A = 613.332$
Método Geométrico:	$R_G = 0,0310$
Método Exponencial:	$R_E = 0,0305$
Método Exp.Modificado:	$R_t = 0,03242-0.00016t$

*

CONCLUSIONES.

De acuerdo con el ejemplo, todos los métodos dan resultados similares cuando las estimaciones son hechas para períodos menores de 5 años. Por otro lado, para períodos largos, puede observarse que los métodos exponencial y geométrico dan valores que difieren sólo ligeramente y los cuales son bastante diferentes a aquellos obtenidos a través de los métodos aritmético y exponencial modificado. Los últimos dos producen resultados bastante similares cuando las proyecciones son hechas a largo plazo.

Sin embargo, los métodos aritmético y geométrico deberían ser seleccionados debido a su simplicidad. En aquellos casos cuando la tasa de crecimiento está disminuyendo es más adecuado el método aritmético. En otros casos, cuando la tasa está creciendo, el método geométrico debería utilizarse. Es bueno recordar que estos métodos deberían ser usados so-

lamente cuando no existen suficientes datos acerca de muertes, nacimientos y migraciones. Cuando estos están disponibles, el estudiante debe hacer uso de ellos. Otros métodos, naturalmente, deberían ser empleados en tales circunstancias.

* * *

BIBLIOGRAFIA

- [1] Freedman, R. y Bevelson, B., *The human population*, Scientific American, 231 (Sep. 1974), pag. 31.
- [2] Malthus, T.R., *An essay on the principle of population* London, Reeves and Turner, (1878) pag. 21.
- [3] Pollard, J.H., *Mathematical Models for the growth of human populations*, Cambridge, Great Britain: Cambridge at the University Press, (1973), p. 60.
- [4] Wolfenden, H.H., *Population Statistics and their compilation*, Chicago: The Univ. of Chicago Press, (1954), pag. 80.
- [5] Smith, T.L. and Zopf, P.E. Jr., *Demography, principles and methods*, Philadelphia, F.A. Davis Company, (1970), pag. 550-552.
- [6] Bureau of the Census, U.S. *The Methods and Materials of Demography*, Vol. 2, "Population Change", By Henry S. Shryock, Jacob S. Siegel and Associates, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, (1975), pp. 377-378.
- [7] Bogue, D.J., *Principles of Demography*, New York, John Wiley and Sons. Inc. (1969), pp. 32-33.

- [8] Boyce, W.E., and Diprima, R.C., *Elementary differential Equations and boundary value problems*, New York, John Wiley and Sons, Inc., (1965), pp.51-52.
- [9] Johnston, S.J., *Econometric Methods*, Tokyo, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd., (1972), pp.14-17.
- [10] "Situación Demográfica y movimiento de la Población", *América en Cifras*, Washington; Secretaría General de la O.E.A., (1974), pp.86-105.
- [11] "National Population Census-Series", *Statistical Abstracts of Latin America*, Los Angeles: James W. Wilkie, UCLA Latin American Center Publications, (1976), p.66.
- [12] "Ajuste del Censo de 1973", *Boletín Mensual de Estadística*, N° 308, Bogotá: Departamento Administrativo Nacional de Estadística, Marzo (1977), p.9.

* * *

REVISTA COLOMBIANA DE ESTADISTICA

I N D I C E

N° 1 - 1978	Pág.
Editorial.	1
Como nació la Carrera de Estadístico en la Universidad Nacional, por <i>Luis Thorín Casas</i> ..	3
El Estadístico. Su formación en Latinoamérica, por <i>Germán Ardila Cuellar</i>	8
La Inversa de Penrose, por <i>Antonio Velasco M.</i>	21
El Método BLS para la determinación de la estacionalidad en las series de tiempo, por <i>Lilia Cortés de Olarte</i>	27
N° 2 - 1980	
Nota Editorial.	i
Estimaciones de los Cambios de Inventarios cuando se desconoce el consumo, por <i>Luciano Mora Osejo</i>	1
Interpretación económica de los problemas lineales, primal y dual, por <i>Gladys Beltran de Rodríguez</i> ,.....	17
La mujer en la fuerza de trabajo, por <i>Roberto Pinilla P.</i>	26
Modelo de Análisis del desarrollo financiero y administrativo de un intermediario financiero, por <i>José Francisco Parra G.</i>	33
Presentación de una ecuación de Regresión, por <i>Adolfo Cortés R.</i>	43
Multicolinealidad, por <i>Alberto Vargas N. e Ismael Rodríguez G.</i>	49
Comparación de tratamiento con un control, por <i>Harmin Parra C.</i>	59