REVISTA COLOMBIANA DE ESTADISTICA Nº 2 1980

INTERPRETACION ECONOMICA DE LOS PROBLEMAS LINEALES, PRIMAL Y DUAL

POR : GLADYS BELTRAN DE RODRIGUEZ
Profesora Asociada U. N.

Muchos y muy variados son los problemas económicos que con suficiente aproximación son susceptibles de expresarse matemáticamente en forma de problemas lineales tales como los de transporte, inversión y producción. En estos problemas es frecuente preguntarse por el valor máximo o mínimo de una función cuyas variables están sujetas a ciertas desigualdades. En muchos de ellos la función que se quiere maximizar es una función lineal y las desigualdades a que están sujetas sus variables también. Se dice entonces, por este motivo que se está frente a un problema de programación lineal.

Pretendemos describir y plantear aquí, en la forma más general posible algunos problemas de programación lineal que se presentan en la empresa, haciendo especial énfasis en las hipótesis que se aceptan y en la interpretación de la dualidad.

Veamos pues, cómo la programación lineal puede ayudar a abordar algunos problemas económicos de la empresa. Para ello, será obligado simplificar la compleja realidad empresarial. Así, resumiremos y formalizaremos conceptos tales como :

- Recursos o factores de producción,
- Bienes o productos,
- Procesos productivos, etc.

y haremos hipótesis sobre los objetivos de la empresa y el mercado en que actúa.

RECURSOS O FACTORES DE PRODUCCION

Distinguiremos dos tipos de factores :

Fijos y Variables

Llamaremos así a los primeros, porque supondremos que por una u otra razón no podrán incrementarse en un período de tiempo determinado. Ejemplo de ellos son los equipos. Los segundos, los llamaremos variables por cuanto los supondremos disponibles en cantidad variable e ilimitada, sea porque ellos existen ya en stock, sea porque es fácil comprarlos o alquilarlos sin demora en su puesta en uso.

Supondremos que la empresa dispone de m recursos fijos y que el vector

$$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$$

representa la cantidad de cada uno de estos factores utilizados en un determinado programa de fabricación.

PRODUCTOS

A los productos fabricados los nominaremos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y se obtendrán como resultado de n procesos productivos o actividades $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Las cantidades producidas de cada uno de ellos, vendrán representadas por el vector columna :

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

siendo x_j la cantidad de producto P_j producido, medida en las unidades correspondientes por la actividad A_j.

PROCESO PRODUCTIVO O ACTIVIDAD

Todo proceso que permita transfomar los recursos i en producto P_j lo llamaremos proceso productivo A_j.

Las actividades A_j, A_k diremos que son equivalentes si consumiendo las mismas cantidades de recursos i, dan como resultado, igual cantidad de producto P_j.

Admitimos la hipótesis de linealidad entre recursos y productos, que puede sintetizarse así : "La cantidad a_{ij} de recurso fijo i consumido para producir una unidad del producto P_j es constante para un mismo proceso productivo".

Admitida tal hipótesis el vector columna :

$$A_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}]$$

determina la actividad o factor de producción A_j. El elemento a_{ij} es conocido comúnmente como coeficiente de insumo.

Suponiendo que la Empresa cuenta con n procesos de fabricación, la matriz :

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

determina sus n factores de producción, razón por la cual se le llama : Matriz de producción.

Ahora bien, cada actividad puede trabajar a distintos niveles. La cantidad x_j medida en las correspondientes unidades físicas representará el nivel de Actividad A_j producida por el producto P_j en un período de tiempo determinado.

Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el resultado de un determinado programa de producción e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ recursos fijos empleados podremos escribir :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \begin{array}{l}(i = 1, 2, \ldots, m)\\(j = 1, 2, \ldots, n)\end{array}$$

siendo a_{ij} coeficiente de insumo, o bien :

$$Y = AX$$

CONSIDERACIONES SOBRE LA EMPRESA Y SU MERCADO

Supondremos que :

a - El objetivo de la Empresa es maximizar beneficios (aún cuando éste no sea su único objetivo, para la Empresa siempre será interesante conocer el programa óptimo para saber cuánto se paga por renunciar a él en favor de otro u otros objetivos).

b - El mercado puede absorber toda la producción sin que para ello se modifiquen los precios de venta de sus productos

Tampoco los precios de los recursos variables son influídos por ajustes de la empresa a distintos niveles de la producción. Es decir, el tamaño de la Empresa es tal, que su compra de recursos variables y su venta de productos no influyen sobre sus precios.

c - Los recursos fijos puede utilizarce de formas distintas, Unicamente de ellas dependerán los ingresos, gastos y beneficios de la Empresa.

La limitación de los recursos fijos hará "que todo vector y de recursos posibles,asociado a un programa de fabricación venga limitado por el vector :

$$b = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

que determina las cantidades disponibles de cada recurso, en la forma :

$$0 \leq y_i \leq b_i \qquad i \quad 1, 2, \ldots, m$$

siendo b_i cantidad disponible de recurso i.

RESUMEN DE LAS HIPOTESIS DE BASE DE LA PROGRAMACION LINEAL

Las hipótesis de base son :

1 - *De finitud* - Algunos de los factores de fabricación disponibles por parte de la Empresa son limitados.

También el número de procesos de fabricación disponibles..La Empresa debe escoger entre los distintos procesos que convierten los recursos en productos.

2 - *De máximo beneficio* - El objetivo de la Empresa es maximizar beneficios (o el dado por la función objetivo que debe ser lineal en función de los niveles productivos).

3 - *De divisibilidad* - Los procesos productivos pueden emplearse a cualquie nivel compatible con la cantidad de recursos disponibles.

4 - *De precios dados* - El mercado, al menos durante el tiempo en que se considere válida la programación planteada, tiene precios fijos, tanto los de compra de recursos variables como los de venta de productos.

5 - *De linealidad o rendimiento constante* - La cantidad de recurso i consumido o utilizado para producir una unidad de producto P_j es constante para un mismo proceso productivo.

6 - *De aditividad* - Varios procesos productivos pueden emplearse simultáneamente.

El consumo de cada recurso será la suma de los recursos consumidos por cada proceso productivo (actuando solo) y, análogamente, la producción total será la suma de las producciones de cada proceso (considerado aislado).

En la medida que la realidad cumpla estas hipótesis los resultados obtenidos por el programa lineal, se acercarán más o menos a los reales.

FORMULACION DEL PROGRAMA LINEAL PRIMAL (PL1)

Si suponemos que la Empresa busca el maximizar el margen bruto total, podemos formalizar :

$$\max \; z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j \qquad (1)$$

en donde

$$c_j = v_j - p_j$$

es el margen bruto por unidad de producto dado por la actividad j.

v_j : precio de venta unitario de producto obtenido por la actividad j.

p_j : costos directos de producción por unidad de P_j.

Con las restricciones·

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j \leq b_i \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$x_j \geq o$$

o matricialmente

$$\max Z = CX$$

$$A X \leq B$$

$$X \geq o$$

FORMULACION DEL PROGRAMA LINEAL DUAL (PL2)

Sabemos que a cada programa lineal primal, (PL1) queda asociada de forma automática otro programa lineal (PL2), que llamaremos su dual. En realidad, la dualidad es un concepto simétrico, también al (PL1) le llamaremos dual del (PL2).

Así pues, el programa lineal primal (PL 1) expresado como :

$$
\text{PL1} \begin{cases} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \; x_j & i = 1, 2, \ldots, m \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \leq b_i & j = 1, 2, \ldots, n \\ x_j \geq 0 \end{cases} \qquad [1]
$$

la dualidad le asocia el programa lineal PL 2 expresado en los siguientes términos:

$$
\text{PL2} \begin{cases} \min \; y = \sum_{i=1}^{m} u_i \; b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ \\ \sum_{i=1}^{m} u_i \; a_{ij} \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\ u_i \geq o \end{cases} \qquad [2]
$$

en donde u_i : es el margen bruto por unidad de recurso i . El programa lineal dual KPL2) se puede expresar matricialmente en la forma :

$$
\begin{aligned} \min \; Y &= UB \\ UA &\geq C \\ U &\geq 0 \end{aligned}
$$

A (1) y (2) se les llama, formas canónicas.

La forma canónica de los programas lineales duales es notable por su simetría y se puede simbolizar por el esquema.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
u_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$					$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_n
	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$\{max\}$ $\{min\}$

En forma estandar estos programas lineales PL1 y PL2 se pueden escribir como :

$$PL_1 \left\{ \begin{array}{ll} \text{Max} \sum^{n} c_j \, x_j & \\ \sum^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i & i = 1, 2, \ldots, n \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{n+i} \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right.$$

$$PL_2 \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} \sum^{m} u_i \, b_i & \\ \sum^{m} u_i \, a_{ij} - u_{m+j} = c_j & j = 1, 2, \ldots\ldots, n \\ u_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\ u_{m+j} \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right.$$

En estas condiciones, se trata de determinar los valores x_j y u_i que verifiquen las formas canónicas (1) y (2). Hechas estas consideraciones, podremos pues, enunciar ahora los programas lineales primales y los programas lineales duales de la siguiente manera :

PROGRAMA LINEAL PRIMAL

Dado un margen bruto (c_j) por unidad de producto P_j y dada la cantidad b_i disponible de cada recurso i ¿qué cantidad x_j de cada producto P_j deben ser producidas con objeto de maximizar el margen bruto total?

PROGRAMA LINEAL DUAL

Dada una disponibilidad b_i de cada recurso i y un margen bruto c_j por unidad de producto P_j ¿qué margen bruto por unidad de recurso i debemos tener para obtener como mínimo el mismo margen bruto total?

El programa lineal dual, nos dice que si la empresa que fabricaba los productos P_j, ya no los fabrica por su cuenta, sino que se está proveyendo de otra empresa, si desea obtener como mínimo el mismo margen bruto total que antes, debe hacer pagar por cada unidad de recurso i una cantidad tal que le proporcione un margen bruto u_i.