LA INVERSA DE PENROSE

Por: Antonio Velasco Muñoz

Se sabe que dada una matriz A_{pxq} se define una inversa generalizada de A como una matriz G_{qxp} tal que A G A = A

Sin embargo sabemos que existen muchas inversas generalizadas para una matriz A dada. Lo que trata de obtenerse en la inversa de Penrose es elegir una matriz inversa generalizada de A única, que tenga unas propiedades provechosas en las aplicaciones prácticas.

Se define la inversa generalizada de Penrose de la matriz A como la matriz k tal que:

(1) $A\ K\ A = A$

(2) $K\ A\ K = K$

(3) $(K\ A)' = K\ A$

(4) $(A\ K)' = A\ K$

La propiedad (1) nos garantiza que K es una in-

versa generalizada de la matriz A.
La propiedad (2) establece que A es una inversa generalizada de K o sea que la inversa generalizada de la inversa generalizada es la misma matriz.
Las propiedades 3) y 4) nos dan simetría en las matrices KA y AK respectivamente.
Se va a demostrar que K existe y es única.

Resultados previos

A) G A es idempotente, el rango de G A es el rango de A y el rango de (I - GA) es q-rango de A donde A_{pxq}

$p \geq q$.

La demostración de este resultado es fácil y por tal motivo se omite

b) $X'X = 0 \Rightarrow X = 0$ para cualquier matriz X considere los elementos diagonales de la matriz X'X. y obtiene el resultado.

c) Si $PX'X = QX'X$ entonces $PX' = QX'$

<u>Demostración</u> $(PX' - QX')(PX' - QX')' =$

$$= (PX'X - QX'X)(P - Q)'$$

Esta igualdad implica que si $PX'X = QX'X$ entonces el resultado es cero y por tanto usamos b) se tiene $PX' - QX' = 0 \Leftrightarrow PX' = QX'$

Para simplificar la demostración de existencia y unicidad consideremos:

d) α) Las propiedades 1) y 3) implican $AA'K'=A$

En efecto

$(KA)'= KA \Longleftrightarrow A'K'= KA \Rightarrow AA'K'=AKA = A$

β) Reciprocamente $AA'K'= A \Rightarrow$ 1) y 3).

$(KA)(KA)'= KAA'K'= KA$

Entonces $KA = (KA)(KA)' \Longrightarrow$

$(KA)'= \left[(KA)(KA)'\right]'= (KA)(KA)'= KA$

con lo cual se tiene la propiedad 3).

Por otra parte $AA'K'=A \quad A(KA)'= A$

como KA es simétrica entonces $A(KA)'= A \Longrightarrow$

$AKA =A$ y se tiene la propiedad 1).

En resumen

1) y 3) $\quad AA'K'= A$

Similarmente se tiene que

e) ii) y iv) $\Longleftrightarrow KK'A'= K$

f) Como consecuencia de d) y e) se tiene que si K satisface

$AA'K'= A$, y $KK'A'= K$ entonces se satisface 1), 2), 3) y 4) y recíprocamente.

Antes de mostrar la existencia de K demostraremos que si existe K entonces dicha matriz

es única.
Si M es una matriz que satisface

$AA'M' = A$ y $MM'A' = M$. Entonces

$K = K\,K'A' = KK'(AA'M')' = KK'MAA' =$

$= KK'(MA)'A' = K\,K'A'M'A' = KM'A' = K(AM)' =$

$KAM = K(AA'M')M = KAA'M'M = (AA'K')'M'M =$

$= A'M'M = \quad (MA)'M = MAM = M$

Con lo cual se tiene la unicidad de la matriz K.

g) Para la existencia supongamos que

$K = TA'$ (Más adelante se determina la obtención de T).

Entonces

α) $A = AA'K' = AA'(TA')' = AA'AT = A$

Por lo tanto

β) $K = TA' = T(AKA)' = TA'K'A' = K$

y $KK'A' = TA'K'A' = K = TA'AT'A' = TA'$

Similarmente

$AA'K' = AA'AT = A$

Con lo cual se satisfacen las condiciones f) y por tanto se tiene las condiciones de Penrose: 1), 2), 3) y 4).

Para la obtención de la matriz T.
Consideremos A'A y usemos el teorema de Cayley-Hamilton.
Esto nos implica que existen escalares
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ no todas cero tales que
$\lambda_1(A'A) + \lambda_2(A'A)^2 + \ldots + \lambda_t(A'A)^t = 0$ para algún entero t.

Definimos entonces r como el primer entero tal que λ_r sea distinto de cero

y sea $T = (-\frac{1}{\lambda_r})\left[\lambda_{r+1} I + \lambda_{r+2}(A'A) + \ldots + \lambda_t(A'A)^{t-r-1}\right]$

Debemos mostrar que la T así definida satisface α) y β) en g).

Obsérvese que

$$T(A'A)^{r+1} = (-\frac{1}{\lambda_r})\left[\lambda_{r+1} I + \lambda_{r+2}(A'A) + \ldots + \lambda_t(A'A)^{t-r-1}\right].(A'A)^{r+1} =$$

$$= (-\frac{1}{\lambda_r})\left[\lambda_{r+1}(A'A)^{r+1} + \lambda_{r+2}(A'A)^{r+2} + \ldots + \lambda_t(A'A)^t\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_r}\left[-\lambda\ (A'A) - \lambda_2 (A'A)^2 - \ldots . - \ \lambda_r (A'A)^r \right] =$$

$= \ (A'A)^r$ por la definición del λ_r.

o sea que

$$T(A'A)^{r+1} = (A'A)^r$$

Obsérvese que si r=1 entonces

TA'AA'A= A'A por la parte c) haciendo

P= TA'A y Q=I entonces se tiene

$TA'AA' = A' \Leftrightarrow A\ A'AT = A$ condición α.

Este resultado nos conduce a que la matriz T así definida sirve para obtener la inversa de Penrose con lo cual se elige una inversa generalizada de A de tal manera que es única dada la matriz A y se utiliza en modelos lineales de rango incompleto.

BIBLIOGRAFIA

1) Graybill F.A. An Introduction To linear Statistical Models Vol. I McGraw-Hill New York. 1961.

2) Searle S.R. Linear Models John Wiley & Sons, Inc New York. 1971.