

## Propuesta de una prueba de rachas recortada para hipótesis de simetría

### A Proposed Runs Trimming Test for the Hypothesis of Symmetry

GIOVANY BABATIVA<sup>a</sup>, JIMMY A. CORZO<sup>b</sup>

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

#### Resumen

Combinando la teoría de rachas desarrollada por Corzo (1989) y la idea de Modarres & Gastwirth (1996), que utilizan el número de rachas que quedan después de recortar la sucesión dicotomizada, se proponen tres pruebas de rachas para la hipótesis de simetría. Utilizando la técnica de linealización de Taylor se aproxima el valor esperado y la varianza, y se realiza un estudio de aproximación de la distribución del estadístico por la distribución normal. Las pruebas propuestas son comparadas en términos de su potencia con algunas de las pruebas no paramétricas más recientes y comunes para dicho problema en tamaños de muestra  $n = 10(1)25$ ,  $n = 30$ ,  $n = 50(50)250$  y  $n = 500$ . Para la comparación se utilizaron métodos de Monte Carlo, y las muestras fueron generadas de nueve distribuciones pertenecientes a la familia lambda generalizada (DLG). Las simulaciones indican que para una gran variedad de alternativas asimétricas las pruebas propuestas son más potentes que las pruebas existentes en la literatura.

**Palabras clave:** distribución lambda generalizada, potencia, pruebas de rachas, pruebas para simetría.

#### Abstract

Combining the runs theory developed by Corzo (1989) and the idea of Modarres & Gastwirth (1996), which uses the number of runs left after cutting the dichotomized succession, three families of statistics based on runs and three tests for the hypothesis of symmetry are proposed. Using the linearization Taylor's technique, the expected value and variance of two from the three proposed families is approximated. A study to approximate the distribution of the statistics through the normal distribution for the studied sample sizes is realized. The proposed tests are compared in terms of their

<sup>a</sup>Egresado de maestría en estadística. E-mail: jgbativam@unal.edu.co

<sup>b</sup>Profesor asociado. E-mail: jacorzos@unal.edu.co

power with some other recent and common nonparametric tests for Symmetry, for the sample sizes  $n = 10(1)25$ ,  $n = 30$ ,  $n = 50(50)250$  and  $n = 500$ . For this comparison, Monte Carlo methods were used and the samples were generated from nine distributions obtained from the generalized lambda distribution. The simulations indicate that, for a wide variety of asymmetric alternatives in the generalized lambda distribution, the tests proposed are more powerful than the existing tests in literature.

**Key words:** Lambda distribution, Power, Runs test, Symmetry test.

## 1. Introducción

Entre los métodos no paramétricos existen pruebas que exigen simetría de la distribución, de la cual provienen las observaciones; este es el caso de las pruebas para la alternativa de localización en una muestra, basadas en estadísticos lineales de rangos, uno de cuyos casos particulares es la prueba del rango designado de Wilcoxon, ampliamente utilizada en diferentes áreas del conocimiento. Si este supuesto se cumple, dicha prueba es localmente más potente para la alternativa de localización. Otro caso es el análisis de regresión basada en rangos donde la simetría desempeña un papel importante en la estimación de la matriz de covarianzas de la distribución asintótica normal multivariada, a la cual converge la distribución del estimador por rangos del vector de parámetros (ver Hettmansperger 1984, pp. 241-243). En ambos casos, si el supuesto de simetría de la distribución muestreada no se cumple, las pruebas tienden a no conservar su tamaño.

Son varias las pruebas que se han propuesto para este problema bajo el supuesto de que se conoce alguna medida de localización. Lehmann (1986), Randles & Wolfe (1979) y Gibbons & Chakraborti (1992) son algunos de los autores que mencionan las pruebas de rangos más conocidas para juzgar la hipótesis de simetría de una distribución. En los últimos 20 años, varios investigadores han propuesto pruebas para determinar si la distribución muestreada es simétrica alrededor de un centro conocido. Algunos de ellos son Cohen & Menjoge (1988), McWilliams (1990), Castillo (1993), Modarres & Gastwirth (1996), Corzo & Rojas (1999) y Baklizi (2003, 2007), quienes han desarrollado pruebas de rachas; por otra parte, Tajuddin (1994) y Baklizi (2008) utilizan pruebas de rangos; Cheng & Balakrishnan (2004) emplean la información de los signos; Mira (1999) usa la medida de sesgo de Bonferroni, mientras que Modarres & Gastwirth (1998) y Thas, Rayner & Best (2005) usan información mixta combinando los signos y los rangos.

La hipótesis de simetría puede formularse como sigue: sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una función de distribución continua  $F$  con función de densidad  $f$  con mediana conocida, la cual, sin pérdida de generalidad, se puede asumir igual a cero. Se considera el problema de testear la siguiente hipótesis:

$$H_0 : F_X(x) = 1 - F_X(-x)$$

frente a la alternativa:

$$K_1 : F_X(x) \neq 1 - F_X(-x)$$

La hipótesis nula indica que la función de distribución  $F$  es simétrica alrededor de cero; en otras palabras, el interés se centra en probar si  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  o si  $f$  se aparta de la hipótesis de simetría.

En la siguiente sección, presentamos tres pruebas de rachas. El procedimiento combina la teoría desarrollada por Corzo (1989) y la idea de Modarres & Gastwirth (1996) de utilizar como criterio de información el número de rachas que quedan después de hacer un recorte en la sucesión dicotomizada. Bajo la hipótesis nula de simetría se dan aproximaciones del valor esperado y de la varianza de los estadísticos de prueba utilizando la técnica de linealización de Taylor. En la sección 3, se presenta un estudio de Monte Carlo que muestra que las pruebas propuestas son más potentes que las pruebas de la literatura con las que se realizó la comparación, y por ende más potentes que las pruebas con las que los demás autores habían hecho sus comparaciones.

## 2. Pruebas propuestas

Sea  $|X|_{(1)}, \dots, |X|_{(n)}$  la sucesión de los valores absolutos ordenados. Definimos  $|X_{D_j}| = |X|_{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), donde  $D_j$  es el antirango de  $|X|_{(j)}$ ; esto es,  $D_j$  es el subíndice que tenía originalmente  $|X|_{(j)}$  en la sucesión de valores absolutos  $|X_1|, \dots, |X_n|$ . La sucesión  $\eta_1, \dots, \eta_n$  se denomina la sucesión dicotomizada, y en ella se representan las observaciones positivas por unos y las negativas por ceros, de la siguiente manera:

$$\eta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{D_j} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

Para contar el número de cambios que hay en la sucesión dicotomizada se definen las siguientes indicadores:

$$I_1 = 1$$

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_{j-1} \neq \eta_j \\ 0 & \text{si } \eta_{j-1} = \eta_j \end{cases} \quad j = 2, \dots, n$$

A partir de estas, el número de rachas hasta la  $j$ -ésima observación en la sucesión dicotomizada se calcula como:

$$r_j = \sum_{k=1}^j I_k, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

A la sucesión  $r_1, \dots, r_n$  se le denominará la sucesión de rachas. El estadístico que cuenta el número de rachas en la sucesión dicotomizada es:

$$R^+ = r_n = \sum_{k=1}^n I_k$$

bajo la hipótesis alternativa, muchas observaciones negativas o muchas observaciones positivas tienden a generar agrupaciones y resultarán pocas rachas; esto significa que la hipótesis nula será rechazada para valores pequeños de  $R^+ - 1$ . Bajo  $H_0$ , la distribución exacta de  $R^+ - 1$ , dada en McWilliams (1990), es binomial con parámetros  $n - 1$  y  $1/2$ .

Como lo mencionan Modarres & Gastwirth (1996), “bajo la hipótesis nula se cumple  $P(I_k = 1) = P(I_k = 0) = 1/2$ , mientras que bajo la alternativa  $P(I_k = 1) \neq P(I_k = 0)$  y depende de  $k$ , para  $k = 2, \dots, n$ . Esto sugiere que una prueba basada en la posición relativa,  $k$ , de las rachas podría ser más potente que  $R^+$ . Teniendo en cuenta que para alternativas sesgadas, las rachas deberían aparecer en las colas, se propone modificar la prueba  $R^+ - 1$  dando un mayor peso a estas rachas”.

Entonces, siguiendo la metodología propuesta por Corzo (1989) y tomando la idea de recortar observaciones de la muestra presentada por Modarres & Gastwirth (1996), y Modarres & Gastwirth (1998) se proponen los siguientes tres estadísticos de prueba:

$$R_p = \frac{1}{r_n} \sum_{i=[np]+1}^n \phi(r_i, i) \delta_i \quad (2)$$

$$R_p^* = \frac{1}{r_n^*} \sum_{i=[np]+1}^n \phi(r_i, i) \delta_i \quad (3)$$

$$C_p^* = \frac{1}{r_n} \sum_{i=[np]+1}^n \phi(r_i, i) \delta_i^* \quad (4)$$

donde

$$\phi(r_i, i) = \begin{cases} r_i - pr_n & \text{si } i > np \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{D_i} > 0 \\ -1 & \text{si } X_{D_i} < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\delta_i^* = \begin{cases} 1/n_1^* & \text{si } X_{D_i} > 0 \\ -1/n_0^* & \text{si } X_{D_i} < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

$p$  es una proporción de recorte;  $[np]$  es la parte entera de  $np$ ;  $n_0^*$  y  $n_1^*$  son el número de ceros y el número de unos en la sucesión dicotomizada después de hacer el recorte;  $r_n$  es el número total de rachas en la sucesión dicotomizada, mientras que  $r_n^*$  es el número total de rachas después de recortar la sucesión dicotomizada. En el caso de  $R_p$  y  $R_p^*$ , si  $p = 0$  se obtiene el estadístico estudiado por Castillo (1993); y en el caso de  $C_p^*$ , si  $p = 0$  se obtiene el estadístico estudiado en Corzo & Rojas (1999).

Los argumentos para la construcción de la región crítica son los mismos que los utilizados por McWilliams (1990). Si la hipótesis nula de simetría es cierta, entonces para  $b > a \geq 0$  se cumple que  $P(a < X < b) = P(-b < X < -a)$ , luego en la sucesión dicotomizada  $P(\eta = 0) = P(\eta = 1)$ , lo cual equivale a que  $P(X_{D_j} >$

$0) = P(X_{D_j} < 0) = 1/2$ , y por tanto se espera que se alternen los valores positivos y negativos de los sumandos de cualquiera de los estadísticos propuestos, haciendo que tomen valores cercanos a cero. Bajo la hipótesis alternativa de asimetría  $P(a < X < b) \neq P(-b < X < -a)$ ; por consiguiente tanto, se espera que en las colas aparezcan agrupamientos de unos o de ceros y como consecuencia de esto los valores de los estadísticos  $R_p$ ,  $R_p^*$  y  $C_p^*$  estarán lejos de cero, apoyando la hipótesis alternativa.

Del análisis anterior y teniendo en cuenta que, por construcción, bajo  $H_0$  la distribución de  $R_p$  es simétrica alrededor de cero, se concluye que la prueba rechaza la hipótesis nula de simetría a favor de la alternativa de asimetría cuando  $|R_p| \geq r_{1-\alpha/2}$ , donde  $r_{1-\alpha/2}$  corresponde al  $100(1-\alpha/2)$ -ésimo percentil de la distribución de  $R_p$ ; de igual manera ocurre para las pruebas  $R_p^*$  y  $C_p^*$ .

Para calcular la distribución exacta de  $R_p$ ,  $R_p^*$  o  $C_p^*$  en un tamaño de muestra  $n$ , se deben considerar los  $2^n$  arreglos distinguibles de unos y ceros para incluir todas las posibilidades de la sucesión dicotomizada. A partir de estos se calculan los valores de los mismos y se construye la distribución de frecuencias. El programa que hace los cálculos de la distribución exacta para cualquiera de los estadísticos propuestos se encuentra en [www.docentes.unal.edu.co/jacorzos/docs/PruebaSimetria/](http://www.docentes.unal.edu.co/jacorzos/docs/PruebaSimetria/)

A continuación se enuncian dos teoremas que fueron demostrados utilizando la técnica de linealización de Taylor. Todas las demostraciones se pueden encontrar en [www.docentes.unal.edu.co/jacorzos/docs/PruebaSimetria/](http://www.docentes.unal.edu.co/jacorzos/docs/PruebaSimetria/)

**Teorema 1.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con función de distribución continua y simétrica  $F$ , función de densidad  $f$  y mediana cero, entonces:

$$\mathbb{E}(R_p) \doteq 0$$

y

$$\mathbb{E}(R_p^*) \doteq 0$$

**Teorema 2.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con función de distribución continua y simétrica  $F$ , función de densidad  $f$  y mediana cero;  $p$  un número real en el intervalo  $(0, 1)$ ;  $r_n$  el total de rachas en la sucesión dicotomizada;  $\phi(r_i, i)$  y  $\delta_i$  como se definieron en (2), entonces la varianza aproximada (VA) es:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_A(R_p) = & \frac{1}{3(n+1)^2} \{n(n^2 + 3n + 2) - [np]([np]^2 + 3[np] - 4) \\ & + 3p^2(n-1)(n^2 - n[np] + 4) \\ & - 3p(n^3 + n^2 + 2n - n[np]^2 - n[np] + 4[np]) + 6\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_A(R_p^*) = & \frac{1}{3(n-[np]+1)^2} \{n(n^2 + 3n + 2) - [np]([np]^2 + 3[np] - 4) \\ & + 3p^2(n-1)(n^2 - n[np] + 4) \\ & - 3p(n^3 + n^2 + 2n - n[np]^2 - n[np] + 4[np]) + 6\} \end{aligned}$$

### 3. Estudio de Monte Carlo

En esta sección se presentan los resultados de una simulación por métodos de Monte Carlo donde se compara la potencia de las pruebas propuestas frente a otras ocho pruebas de la literatura. Las pruebas con las que se realizó la comparación son:

1. La prueba del rango signado de Wilcoxon referenciada para hipótesis de simetría por Gibbons & Chakraborti (1992):

$$W = \sum_{k=1}^n k\eta_k$$

2. La prueba propuesta por McWilliams (1990), basada en:

$$R^+ = \sum_{k=1}^n I_k$$

3. La prueba condicional de Tajuddin (1994), basada en la prueba de localización de Wilcoxon para dos muestras:

$$W_n = \sum_{k=1}^n k\eta_k = \sum_{k=1}^{n_1} R_k$$

donde  $n_1$  es el número de observaciones positivas y  $R_k$  corresponde al rango de  $X_k$  en la sucesión de valores absolutos ordenados.

4. La prueba  $M_p$  propuesta por Modarres & Gastwirth (1996) que utiliza:

$$M_p = \sum_{k=[np]+2}^n \varphi(k)I_k$$

donde

$$\varphi(k) = \begin{cases} k - [np] & \text{si } k > np \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $[np]$  corresponde a la parte entera de  $np$ <sup>1</sup>.

5. La prueba híbrida en dos etapas propuesta por Modarres & Gastwirth (1998), la cual usa en la primera etapa la prueba del signo y en la segunda etapa una modificación de la prueba de Tajuddin (1994):

---

<sup>1</sup>Modarres & Gastwirth (1996) tratan a  $np$  como un entero para evitar la notación de parte entera.

**Etapla I:** Utilizar la prueba del signo para decidir si hay evidencias de simetría<sup>2</sup>:

$$Z_s = \frac{S - n/2}{\sqrt{n/4}}$$

**Etapla II:** Si en la etapa I se concluye que hay evidencias de simetría, utilizar la siguiente modificación de la prueba de Tajuddin (1994):

$$W_p = \sum_{k=[np]+1}^n \varphi(k)\eta_k$$

donde  $\eta_k$  es definido como en (1).

6. La prueba de Mira (1999) que detecta la asimetría de una función de distribución con media  $\mu_F$  y mediana  $\tilde{\mu}_F$  desconocidas, mediante la medida de asimetría de Bonferroni. Sean  $\bar{X}_n$  y  $\hat{X}_n$  la media y la mediana de una muestra de tamaño  $n$ , respectivamente. La prueba de Mira utiliza el siguiente estadístico:

$$\gamma_1(F_n) = 2 \left( \bar{X}_n - \hat{X}_n \right)$$

7. La prueba de Baklizi (2003) basada en la distribución condicional de  $R^+$  dado el número de unos y de ceros en la sucesión dicotomizada,  $n_1$  y  $n_0$ , respectivamente. Dicha distribución está dada en Gibbons & Chakraborti (1992) y corresponde a:

$$f_{R^+}(r_n/n_0, n_1) = \begin{cases} \frac{2 \binom{n_1-1}{r_n/2-1} \binom{n_0-1}{r_n/2-1}}{\binom{n_1+n_0}{n_0}} & \text{si } r_n > 1 \text{ y par} \\ \frac{\binom{n_1-1}{(r_n-1)/2} \binom{n_0-1}{(r_n-3)/2} + \binom{n_1-1}{(r_n-3)/2} \binom{n_0-1}{(r_n-1)/2}}{\binom{n_1+n_0}{n_0}} & \text{si } r_n > 1 \text{ e impar} \end{cases}$$

si  $n_1 = 0$  o  $n_0 = 0$  entonces  $P(r_n = 1) = 1$ .

8. La prueba propuesta por Cheng & Balakrishnan (2004) que usa la información de los signos, donde el estadístico de prueba es:

$$C_6 = \eta_{n-5} + \dots + \eta_n \quad (5)$$

Se seleccionaron nueve casos de la DLG,<sup>3</sup> que son los más utilizados en la literatura, ver por ejemplo: McWilliams (1990), Tajuddin (1994), Modarres & Gastwirth (1996); Modarres & Gastwirth (1998), Baklizi (2003), Cheng & Balakrishnan (2004) y Thas et al. (2005). El caso 1 representa la aproximación de la distribución normal (caso simétrico) para el cual la hipótesis nula es verdadera, mientras

<sup>2</sup>El artículo original de Modarres & Gastwirth (1998) se utiliza  $n^{1/2}/4$  en el denominador de  $Z_s$ . Sin embargo, en el párrafo anterior es claro que  $S$  tiene una distribución binomial  $(n, p)$ ,  $E(S) = n/2$  y  $V(S) = n/4$ .

<sup>3</sup>En el ordenamiento de los casos difiere de los utilizados por otros autores, debido a que en este trabajo se ordenaron por grupos según el coeficiente de asimetría.

que los otros ocho casos varían en su grado de asimetría y permiten comparar la potencia de las pruebas.

Las nueve funciones de densidad de la DLG seleccionadas se pueden apreciar en la figura 1. En la tabla 1 se muestran los valores de los parámetros de los nueve casos de la DLG utilizados, los coeficientes de asimetría y curtosis. Nótese que los casos 1, 2 y 3 conforman un grupo de tres densidades muy cercanas a la hipótesis nula de simetría, los casos 4 y 5 son dos densidades en las que ya se nota cierto grado de asimetría y los casos 6 al 9 son densidades que tienen un grado tal de asimetría que toda la probabilidad está acumulada en la cola del lado derecho. En los tres grupos aumentan simultáneamente los coeficientes de asimetría y curtosis.

TABLA 1: Valores de los parámetros de la DLG de los nueve casos seleccionados para el estudio de potencia.

Caso	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1 (Nula)	0,000000	0,197454	0,134915	0,134915	0,0000	3,0000
2	-0,116734	-0,351663	-0,130000	-0,160000	0,8000	11,4000
3	0,000000	-1,000000	-0,100000	-0,180000	2,0000	21,2000
4	3,586508	0,043060	0,025213	0,094029	0,9000	4,2000
5	0,000000	-1,000000	-0,007500	-0,030000	1,5000	7,5000
6	0,000000	1,000000	1,400000	0,250000	0,5000	2,2000
7	0,000000	1,000000	0,000070	0,100000	1,5000	5,8000
8	0,000000	-1,000000	-0,001000	-0,130000	3,1600	23,8000
9	0,000000	-1,000000	-0,000100	-0,170000	3,8800	40,7000

Para estimar la potencia de las diferentes pruebas se realizó un programa en SAS IML. El algoritmo utilizado es el siguiente:

1. Seleccionar una muestra aleatoria  $u_1, \dots, u_n$  de tamaño  $n$  de la distribución  $U(0, 1)$ .
2. Transformar la muestra  $u_1, \dots, u_n$  en la sucesión  $x_1^*, \dots, x_n^*$ ; utilizando la función percentil de la DLG, que se define por:

$$x_i^* = \lambda_1 + \frac{u_i^{\lambda_3} - (1 - u_i)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

con lo que se consigue que la sucesión  $x_1^*, \dots, x_n^*$  sea una muestra aleatoria de una DLG con parámetros  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$ .

3. Transformar  $x_i = x_i^* - \theta$  para que la distribución de  $x_1^*, \dots, x_n^*$  tenga mediana cero, donde

$$\theta = \lambda_1 + \frac{0,5^{\lambda_3} - 0,5^{\lambda_4}}{\lambda_2} \quad (7)$$

4. Calcular los valores de los estadísticos que se van a comparar usando las observaciones de la muestra  $x_1, \dots, x_n$ .



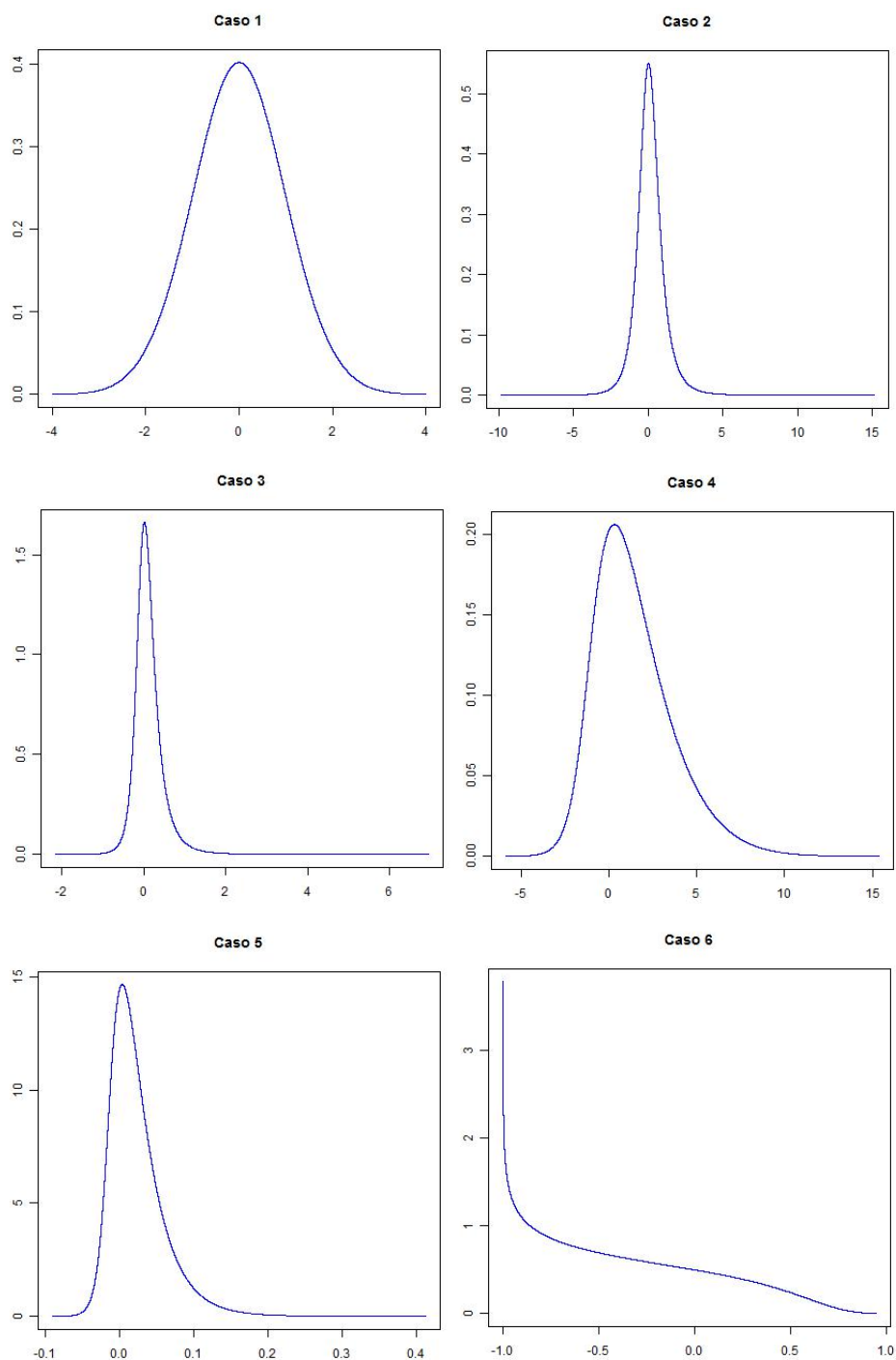


FIGURA 1: Funciones de densidad de los casos seleccionados de la DLG. Continuación

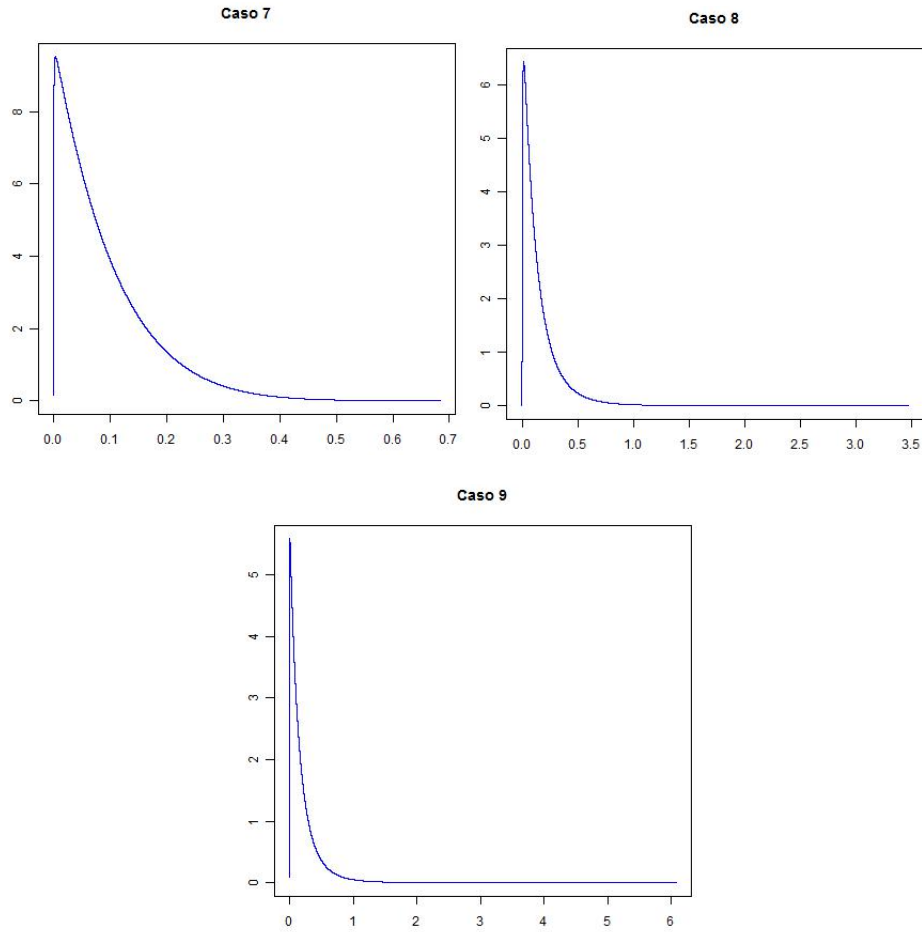


FIGURA 1: Funciones de densidad de los casos seleccionados de la DLG.

5. Realizar las respectivas pruebas de hipótesis, y para cada una determinar si se rechaza la hipótesis nula, aleatorizando la prueba.
6. Aplicar el anterior proceso  $m$  veces, y estimar la potencia de cada una de las pruebas, así:

$$\hat{\pi} = \frac{\text{Número de rechazos en las } m \text{ réplicas}}{m}$$

Para este trabajo se estimó la potencia de todas las pruebas usando  $m = 25.000$  réplicas. El máximo número de réplicas usado en los artículos consultados para este trabajo fue de 10.000 (Thas et al. 2005, Cheng & Balakrishnan 2004).

### 3.1. Estudio de potencia para $n \leq 25$

Para  $n < 30$  las pruebas  $T$  y  $W_p$  no fueron incluidas porque están basadas en estadísticos condicionados al número de unos y ceros en la sucesión dicotomizada; esto hace que se requieran unos cálculos distintos a los hechos en este trabajo para llegar a la distribución exacta de las pruebas, lo cual implicaría programas con otros algoritmos. Por ejemplo, para calcular la distribución exacta de los estadísticos propuestos para un tamaño de muestra  $n = 15$  es necesario generar  $2^{15}$  arreglos de unos y ceros, mientras que para  $T$  y  $W_p$  es necesario generar  $\binom{n}{k}$  arreglos para  $k = 0, 1, \dots, 7$ , lo que implica muchos más cálculos que no estaban planeados desde el comienzo. Para  $n \geq 30$  se utilizó la distribución asintótica de estas.

Por otra parte, las pruebas de Butler (1969), Rothman & Woodrooffe (1972) y Hill & Rao (1977) fueron superadas ampliamente por la prueba propuesta por McWilliams (1990), razón por la que no fueron incluidas en este trabajo.

En las tablas 2 a 10 se presentan los resultados del estudio de Monte Carlo. A partir de las tablas se extraen las siguientes conclusiones:

Bajo la hipótesis nula, caso 1 (tabla 2), el tamaño de todas las pruebas está alrededor del nivel de significación  $\alpha = 5\%$  a excepción de la prueba  $\gamma_1(F_n)$  de Mira (1999) que resultó ser una prueba conservativa, para la cual se observó que su error de tipo I aún no alcanzaba el 5% para  $n = 500$ . Por lo anterior, dicha prueba no fue incluida en las comparaciones de las potencias.

Para el caso 2 (tabla 3), ninguna prueba supera ampliamente a las demás. Sin embargo, la prueba  $C_{.20}^*$  en general tiene las mayores potencias. Por ejemplo, para  $n = 19$ , las tres pruebas con las potencias más altas son  $C_{.20}^*$ ,  $C_{.10}^*$  y  $R^+$  con el 5,6%, 5,5% y 5,46%, respectivamente.

En el caso 3 (tabla 4), la prueba  $C_{.20}^*$  es la que tiene las mayores potencias para  $n \leq 20$ , y para los demás tamaños de muestra estudiados las pruebas  $R_{.80}$ ,  $R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  son las que tienen ventajas, es decir, en este caso las pruebas propuestas resultan más potentes que todas las pruebas con las que se comparó.

Con muestras provenientes del caso 4 (tabla 5), nuevamente la prueba  $C_{.20}^*$  es la que tiene las mayores potencias cuando  $n < 20$ , para  $n = 20$ ; la prueba  $R_{.80}^*$  es la que obtiene el mejor resultado y desde  $n = 21$  hasta  $n = 25$ , las mayores potencias las tienen las pruebas  $R_{.80}$ ,  $R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$ . Por ejemplo, para  $n = 21$  la

potencia de las pruebas  $R_{.80}, R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  está alrededor del 14,5% seguidas por  $C_{.20}^*$  con el 13,3% y posteriormente por  $M_{.25}$  con el 12,6%; es decir que para este caso las pruebas propuestas resultan más potentes que las pruebas consultadas en la literatura.

Para el caso 5 (tabla 6), la prueba  $C_{.20}^*$  es la que presenta las mayores potencias cuando  $n < 17$ ; para  $n = 17$  la prueba  $M_{.25}$  logra ligeras ventajas sobre las demás pruebas, mientras que para  $18 \leq n \leq 20$  la prueba con las mayores potencias es  $R_{.80}^*$ , y para los demás tamaños de muestra (hasta  $n = 25$ ) las pruebas  $R_{.80}, R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  son las más potentes, lo cual reafirma que las pruebas propuestas son las que tienen las mayores potencias en los tamaños de muestra estudiados, logrando para  $n = 25$  grandes diferencias con respecto a las competidoras de la literatura;  $R_{.80}^*$  es la mejor prueba de las propuestas en el tamaño de muestra mencionado con una potencia del 26,8%, mientras que la mejor prueba de las competidoras es  $C_6$  Cheng & Balakrishnan (2004) con una potencia del 23%.

En el caso 6 (tabla 7), las pruebas con el mejor desempeño para  $n \leq 21$  son  $M_p, p = 0, 10\%, 20\%$  y  $25\%$ , aunque con  $n = 22$  las pruebas  $R_{.80}$  y  $C_{.80}^*$  tienen potencias del 38,6% y 38,3%, respectivamente, alcanzando a estar en segundo y tercer lugar después de  $M_{.25}$ , que tiene una potencia del 39%. Si  $n = 24$  o  $n = 25$  las pruebas  $R_{.80}, R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  son las que logran las mayores potencias.

TABLA 2: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 1.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	4,97	5,08	4,71	4,92	5,13	4,90	4,94	4,90	5,09	4,89	4,95	5,04	5,18	5,00	5,06	4,85
$R_{.80}$	4,99	5,02	4,95	4,93	5,08	5,01	5,06	4,95	4,95	4,87	4,94	5,10	5,02	4,96	4,97	5,06
$C_{.10}^*$	5,14	5,12	5,17	4,78	5,05	5,30	5,10	5,18	4,97	4,88	5,20	4,97	5,23	5,02	5,06	4,98
$C_{.20}^*$	5,24	5,15	5,31	4,94	4,84	4,94	5,18	4,90	5,00	4,86	4,98	5,07	5,21	5,00	5,20	5,06
$C_{.60}^*$	5,05	5,00	4,70	4,94	5,07	5,11	5,24	4,93	4,91	4,99	4,96	5,04	4,98	5,04	5,30	5,09
$R_{.80}^*$	5,03	4,96	5,04	4,91	5,06	4,94	5,01	4,94	4,94	4,92	4,92	5,14	5,04	4,96	4,96	5,07
$R_{.60}^*$	4,90	5,12	4,72	4,94	4,84	5,18	5,08	5,33	5,11	4,72	4,86	5,09	5,05	5,08	4,91	5,06
$R_{.80}^*$	5,03	5,12	4,97	4,99	4,91	5,10	5,00	4,84	4,97	4,84	4,81	5,10	5,07	5,03	5,04	5,04
$W$	5,05	5,25	4,83	4,84	5,28	5,23	4,86	4,90	5,01	4,81	4,95	4,94	5,05	5,08	5,21	4,66
$R^+$	5,09	4,97	4,90	4,79	5,01	4,95	4,96	4,88	5,11	4,93	5,07	5,12	5,02	4,99	5,08	5,08
$R$	5,25	4,99	4,91	4,88	4,86	4,98	5,01	5,06	5,17	4,95	5,11	5,09	5,01	5,09	5,00	5,26
$C_6$	4,93	5,22	4,85	4,87	4,99	5,21	5,02	4,81	5,06	4,79	4,88	5,13	4,98	5,03	5,08	5,07
$M_0$	5,15	5,01	4,77	4,68	4,93	5,12	4,96	4,85	5,06	5,03	5,05	4,93	5,08	4,95	4,81	5,00
$M_{.10}$	5,13	5,04	4,76	4,78	4,94	5,31	5,03	4,88	5,05	5,07	5,08	5,00	5,08	4,87	5,00	5,00
$M_{.20}$	5,00	5,10	4,81	4,76	5,02	5,23	5,05	4,72	5,12	5,04	5,17	5,10	4,92	4,80	4,78	5,28
$M_{.25}$	4,99	5,10	4,82	4,88	5,04	5,23	5,14	4,76	5,10	5,06	5,09	5,24	5,06	4,91	4,97	5,20
$\gamma_1(F_n)$	0,25	4,70	1,21	2,65	0,54	4,54	1,87	2,67	0,90	4,10	2,09	2,48	3,22	3,67	2,04	2,14

TABLA 3: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 2.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	5,12	5,30	5,29	5,10	5,23	5,05	5,36	5,22	5,17	5,33	5,15	5,65	5,33	5,87	5,26	5,57
$R_{.80}$	5,15	5,16	5,08	5,23	5,26	5,27	5,25	5,30	5,32	5,26	5,41	5,65	5,47	5,89	5,54	5,91
$C_{.10}^*$	5,34	5,33	6,01	4,98	4,99	5,34	5,39	5,25	5,34	5,50	5,52	5,46	5,60	5,88	5,35	5,81
$C_{.20}^*$	5,37	5,78	5,78	5,17	5,37	5,52	5,42	5,36	5,69	5,61	5,57	5,57	5,60	5,93	5,55	5,75
$C_{.60}^*$	5,22	5,30	5,28	5,14	5,13	5,21	5,47	5,17	5,39	5,24	5,27	5,41	5,19	5,48	5,73	5,55
$R_{.80}^*$	5,08	5,27	5,19	5,08	5,17	5,17	5,23	5,24	5,29	5,24	5,40	5,64	5,43	5,87	5,53	5,93
$R_{.60}^*$	5,06	5,35	5,32	5,08	5,10	5,23	5,23	5,78	5,34	5,14	5,18	5,66	5,18	5,66	5,32	5,47
$R_{.80}^*$	5,12	5,41	5,13	5,00	5,00	5,21	5,25	5,30	5,27	5,17	5,59	5,72	5,32	5,96	5,56	5,88
$W$	5,00	5,05	5,03	5,09	4,97	5,05	5,29	4,78	4,96	5,26	5,12	5,33	5,07	5,13	5,11	5,01
$R^+$	5,24	5,44	5,29	5,03	5,18	5,22	5,18	5,31	5,28	5,46	5,21	5,13	5,20	5,17	5,11	5,28
$R$	5,37	5,50	5,28	5,12	5,23	5,17	5,15	5,34	5,35	5,36	5,25	5,17	5,16	5,18	5,24	5,30
$C_6$	5,07	5,18	5,18	5,07	5,24	5,19	5,26	5,26	5,24	5,34	5,29	5,56	5,23	5,68	5,43	5,61
$M_0$	5,30	5,46	5,33	5,16	5,29	5,19	5,31	5,19	5,25	5,36	5,29	5,37	5,47	5,51	5,22	5,29
$M_{.10}$	5,21	5,38	5,33	5,13	5,37	5,17	5,42	5,24	5,23	5,41	5,26	5,40	5,44	5,39	5,31	5,26
$M_{.20}$	5,16	5,35	5,38	5,02	5,47	5,15	5,53	5,25	5,25	5,33	5,35	5,45	5,32	5,38	5,07	5,40
$M_{.25}$	5,18	5,35	5,36	5,18	5,50	5,14	5,55	5,27	5,24	5,25	5,40	5,53	5,34	5,58	5,29	5,32

TABLA 4: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 3.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	5,69	5,89	6,09	5,96	6,28	6,46	6,74	7,77	7,52	8,09	8,08	8,19	9,00	8,62	9,54	9,81
$R_{.80}$	5,55	5,96	6,18	6,32	6,43	6,60	7,25	7,62	7,76	8,14	8,13	9,14	9,93	9,98	10,72	11,22
$C_{.10}^*$	6,29	6,84	7,94	6,96	7,22	7,45	7,65	7,59	7,42	7,86	8,32	8,40	9,00	8,84	9,23	9,40
$C_{.20}^*$	6,27	6,82	7,58	6,96	7,39	7,86	7,82	8,05	8,07	8,69	8,87	8,78	9,53	9,81	10,07	10,49
$C_{.60}^*$	5,90	6,04	6,21	5,84	6,63	6,65	6,88	7,21	7,54	7,36	7,24	7,92	7,24	8,23	8,68	8,68
$C_{.80}^*$	5,70	5,31	5,23	5,58	5,86	6,26	6,84	7,41	7,58	7,98	8,05	9,01	9,82	9,95	10,67	11,20
$R_{.60}^*$	5,48	5,76	6,02	6,16	6,24	6,82	6,64	8,24	7,16	7,57	7,25	7,90	8,45	8,43	8,91	8,81
$R_{.80}^*$	5,57	5,85	6,52	6,38	6,45	6,78	7,13	7,71	7,90	8,36	8,28	9,04	9,95	9,93	10,51	11,09
$W$	5,21	5,41	5,45	5,20	5,03	5,31	5,43	5,46	5,34	5,58	5,32	5,42	5,71	5,50	5,74	5,47
$R^+$	5,75	6,08	6,10	6,18	6,35	6,27	6,05	6,76	6,52	6,98	6,79	6,86	6,95	7,21	7,15	7,28
$R$	6,06	6,26	6,32	6,52	6,59	6,57	6,36	6,81	6,78	7,17	7,05	7,17	7,20	7,46	7,37	7,57
$C_6$	5,28	5,51	5,61	5,84	6,14	6,14	6,38	7,17	7,00	7,60	7,69	8,19	8,83	8,97	9,61	9,78
$M_0$	5,95	6,46	6,66	6,79	6,84	6,93	6,86	7,55	7,28	7,68	7,54	8,01	8,15	8,39	8,15	8,48
$M_{.10}$	5,86	6,39	6,54	6,71	6,88	7,01	6,89	7,68	7,44	7,68	7,67	8,14	8,22	8,39	8,45	8,62
$M_{.20}$	5,76	6,24	6,72	6,72	6,88	7,00	6,95	7,76	7,57	7,65	7,67	8,38	8,16	8,36	8,23	9,04
$M_{.25}$	5,70	6,24	6,72	6,90	6,93	7,04	6,95	7,78	7,61	7,65	7,66	8,11	8,36	8,70	8,60	8,95

TABLA 5: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 4.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	6,51	6,67	7,00	7,48	8,36	9,22	9,48	10,82	11,12	11,82	13,30	12,54	13,31	14,24	14,56	15,60
$R_{.80}$	6,19	7,08	7,53	7,92	8,24	8,58	9,66	10,68	10,97	12,11	12,72	14,71	15,89	16,90	18,02	19,08
$C_{.10}^*$	7,49	7,98	9,94	8,94	9,17	9,64	9,51	10,64	10,49	10,89	12,08	12,39	12,89	13,13	13,53	14,38
$C_{.20}^*$	7,46	9,13	9,42	9,50	9,57	10,55	10,64	11,60	11,76	12,58	13,31	13,35	13,71	14,12	14,60	16,25
$C_{.60}^*$	6,92	7,05	7,29	7,28	8,33	9,41	9,05	9,41	10,53	10,46	9,97	11,08	10,41	11,88	13,30	13,16
$C_{.80}^*$	6,48	5,54	5,64	6,48	7,17	7,78	9,01	10,19	10,52	11,79	12,54	14,46	15,68	16,76	17,96	19,05
$R_{.60}^*$	6,17	6,74	6,67	7,65	8,23	9,34	9,30	11,08	9,99	10,68	11,50	11,51	12,24	13,02	13,34	14,00
$R_{.80}^*$	6,43	6,90	7,53	7,93	8,43	8,88	9,79	11,14	11,38	12,47	13,69	14,41	15,57	16,81	18,03	19,15
$W$	5,58	5,47	5,13	5,69	5,48	5,87	5,69	6,19	6,01	5,78	6,24	6,48	6,10	6,47	6,40	6,44
$R^+$	6,73	6,88	7,08	7,74	8,27	8,30	8,17	8,70	8,79	9,31	9,17	9,36	9,50	9,71	10,12	10,27
$R$	7,53	7,49	7,79	8,16	8,53	8,84	8,69	9,29	9,30	9,55	9,73	9,85	10,00	10,16	10,19	10,83
$C_6$	5,40	5,75	6,00	6,61	7,12	8,00	8,30	9,33	9,84	10,66	11,81	12,44	13,25	14,42	15,42	16,38
$M_0$	7,08	7,88	8,17	8,69	9,13	9,57	9,74	10,59	10,58	11,04	11,52	11,37	12,39	12,65	12,60	13,16
$M_{.10}$	6,99	7,89	8,07	8,81	9,20	9,93	9,83	10,77	10,83	11,41	11,73	11,80	12,59	12,83	13,28	13,44
$M_{.20}$	6,57	7,77	8,27	8,87	9,35	10,14	10,34	11,16	11,10	11,64	12,00	12,24	12,72	12,94	13,29	14,22
$M_{.25}$	6,47	7,77	8,44	9,20	9,58	10,29	10,35	11,32	11,30	11,78	12,20	12,67	13,06	13,61	13,84	14,34

TABLA 6: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 5.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	7,37	7,38	8,57	9,34	10,34	11,36	12,50	14,04	14,74	15,82	17,39	16,96	18,59	18,91	19,96	21,88
$R_{.80}$	6,51	7,93	8,46	9,06	9,30	9,85	12,41	13,34	14,12	15,07	15,87	20,14	22,01	22,68	24,52	26,35
$C_{.10}^*$	8,90	9,96	12,02	10,96	11,56	11,84	12,37	12,65	13,43	13,78	15,62	16,13	16,93	17,05	17,65	18,70
$C_{.20}^*$	8,67	10,96	11,78	11,65	12,21	13,05	13,72	14,20	14,68	15,47	17,00	17,69	18,49	18,62	19,26	21,38
$C_{.60}^*$	7,84	8,04	8,93	9,00	10,20	11,24	11,58	11,56	12,38	12,76	13,14	13,98	13,41	14,44	15,79	16,38
$C_{.80}^*$	7,21	5,90	6,14	7,05	7,89	8,68	11,15	12,39	13,45	14,58	15,63	19,64	21,70	22,50	24,40	26,30
$R_{.60}^*$	7,07	7,29	8,03	9,40	9,82	11,27	12,00	14,19	13,25	13,76	14,72	15,33	16,70	16,92	17,68	19,41
$R_{.80}^*$	6,68	7,87	8,28	9,25	9,43	10,24	12,60	14,00	15,08	16,35	17,86	19,68	21,83	22,63	24,73	26,79
$W$	5,63	5,61	5,86	6,01	5,81	6,21	6,16	6,48	6,72	6,61	6,73	6,86	7,36	7,18	7,15	7,26
$R^+$	7,54	7,95	8,22	9,11	9,80	9,72	9,86	10,34	10,42	10,97	11,43	11,54	11,80	12,19	12,52	13,23
$R$	8,63	8,76	9,25	9,98	10,12	10,74	10,80	11,09	11,13	11,48	12,28	12,24	12,65	12,84	12,97	14,09
$C_6$	5,91	6,22	6,89	7,69	8,47	9,22	10,36	11,92	12,91	14,08	15,60	16,77	18,32	19,32	21,06	22,95
$M_0$	8,53	9,13	9,84	10,87	11,20	11,93	12,56	13,37	13,55	14,02	14,86	15,16	16,28	16,56	16,66	17,67
$M_{.10}$	8,60	9,24	9,85	11,15	11,49	12,32	12,72	13,72	13,87	14,39	15,19	15,62	16,76	16,66	17,45	18,15
$M_{.20}$	8,09	9,12	10,29	11,16	11,72	12,74	13,20	14,22	14,39	14,73	15,60	16,46	16,94	16,98	17,66	19,14
$M_{.25}$	7,90	9,12	10,42	11,57	11,98	13,02	13,19	14,52	14,87	15,05	15,84	16,53	17,37	17,77	18,49	19,28

Para los casos 7 a 9 (tablas 8 a 10), donde la asimetría es evidente, la prueba  $M_{.25}$  siempre tiene las potencias más altas. Sin embargo, para  $n$  cerca de 25 las diferencias con las pruebas  $R_{.80}$ ,  $R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  no son grandes. Por ejemplo, en el caso 9 para  $n = 25$  la mayor potencia la tiene  $M_{.25}$  con el 76,4 %, mientras que las pruebas  $R_{.80}^*$ ,  $R_{.80}$  y  $C_{.80}^*$  tienen potencias del 71 %, 70 % y 69 %, respectivamente, estando por encima de pruebas como  $R$  (Baklizi 2003),  $R^+$  (McWilliams 1990) y  $W$  (Wilcoxon) que obtuvieron potencias del 52,6 %, 49,5 % y 13 %, respectivamente.

Para examinar si la potencia de las pruebas  $R_p$ ,  $R_p^*$  y  $C_p^*$  sigue mejorando cuando  $n$  crece, se realizaron también simulaciones para  $n = 30, 50, 100, 150, 200, 250$  y 500 con  $p = 60\%$  y  $80\%$ . Además se agregaron las pruebas  $T$  y  $W_p$  propuestas

TABLA 7: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 6.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	8,54	8,96	10,60	12,18	13,24	17,64	17,56	20,18	22,11	24,75	26,91	24,36	26,42	28,06	30,56	32,80
$R_{.80}$	7,55	10,26	11,01	11,59	12,40	13,24	18,40	20,24	21,71	23,37	24,82	35,50	38,63	41,83	45,08	47,86
$C_{.10}^*$	10,22	11,25	13,52	12,66	13,05	13,13	13,70	14,76	14,94	15,70	17,10	17,91	17,86	18,82	19,43	19,59
$C_{.20}^*$	9,84	13,39	14,10	13,88	14,16	14,52	15,04	16,05	16,52	17,54	18,93	19,50	19,82	20,52	21,55	22,90
$C_{.60}^*$	9,54	10,27	11,44	11,90	14,12	16,65	15,37	15,36	17,43	17,38	16,97	16,89	16,03	17,21	19,90	19,40
$C_{.80}^*$	7,36	6,88	7,34	8,87	10,28	11,47	16,81	18,91	20,78	22,78	24,40	34,98	38,29	41,62	44,93	47,73
$R_{.60}^*$	7,62	8,72	9,73	12,04	14,10	17,05	17,59	21,49	20,80	22,79	25,15	24,96	27,83	28,47	30,26	34,01
$R_{.80}^*$	7,43	9,38	10,41	11,32	12,43	13,04	18,35	20,88	23,22	26,28	28,18	33,88	37,65	40,99	44,68	48,33
$W$	5,55	5,83	5,99	6,15	6,53	6,32	6,55	6,74	6,94	7,70	7,50	7,54	7,73	7,83	7,90	8,09
$R^+$	9,57	10,83	11,66	13,09	14,73	14,94	16,18	17,28	18,11	19,71	20,26	21,79	22,35	23,72	25,23	26,04
$R$	11,72	12,48	13,31	14,65	15,66	17,02	18,05	18,75	19,71	20,62	22,30	23,47	23,87	25,40	26,36	28,12
$C_6$	5,87	6,78	7,58	8,76	10,37	12,34	14,59	17,02	19,64	23,02	25,82	28,90	32,32	35,99	39,69	43,48
$M_0$	10,43	12,83	14,66	16,64	18,76	20,48	23,03	24,95	26,73	28,70	31,09	33,14	35,08	37,23	39,08	41,18
$M_{.10}$	10,23	12,82	14,64	17,04	19,39	21,21	23,74	25,66	27,62	29,84	32,42	34,46	36,42	38,50	41,13	43,01
$M_{.20}$	9,25	12,54	15,09	17,26	19,64	21,96	24,93	27,03	28,74	31,08	34,13	36,63	37,66	39,80	42,34	45,72
$M_{.25}$	8,94	12,54	15,34	17,75	20,18	22,60	25,12	27,53	29,43	31,83	34,77	36,64	39,01	41,56	44,19	46,41

TABLA 8: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 7.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	11,88	12,97	16,30	20,02	22,22	29,00	28,84	32,34	35,09	39,28	42,24	38,90	41,85	43,84	47,20	51,37
$R_{.80}$	8,40	12,59	13,35	14,26	14,89	15,58	24,48	26,43	27,84	29,68	30,74	50,59	53,90	56,30	59,48	62,27
$C_{.10}^*$	14,65	15,77	20,19	18,62	19,00	19,83	20,26	21,55	22,73	23,95	25,70	27,35	28,04	28,49	28,95	30,82
$C_{.20}^*$	13,92	20,67	21,33	20,46	20,75	21,61	21,77	23,68	24,85	26,99	27,86	29,47	30,21	31,26	32,00	34,43
$C_{.60}^*$	13,78	15,37	17,79	18,77	22,29	27,29	23,98	24,39	25,73	26,45	26,24	24,25	23,04	23,14	28,00	26,78
$C_{.80}^*$	7,70	7,20	7,47	9,40	11,45	13,27	21,55	23,99	26,40	28,73	30,18	49,40	53,32	55,90	59,28	62,11
$R_{.60}^*$	10,01	11,62	14,15	17,93	21,70	26,19	27,23	32,68	32,17	34,84	37,97	39,40	43,17	44,00	45,85	51,54
$R_{.80}^*$	7,94	10,93	11,98	13,41	13,68	14,17	25,36	28,34	30,25	33,51	35,43	48,92	53,81	56,24	59,33	64,70
$W$	5,80	6,67	7,00	7,49	7,47	8,05	8,36	8,26	8,71	9,41	9,51	10,01	10,32	10,41	11,16	11,06
$R^+$	13,86	15,53	17,18	19,08	21,87	22,43	24,27	25,77	27,15	30,04	30,02	32,82	33,75	35,09	37,97	38,51
$R$	17,44	18,12	19,90	21,98	23,28	25,62	26,91	28,15	29,94	31,55	32,81	35,16	35,87	37,73	39,48	41,35
$C_6$	7,11	9,00	11,21	13,56	16,58	20,38	24,00	28,15	32,40	37,38	41,16	46,34	50,85	54,36	58,89	63,70
$M_0$	16,60	19,82	22,89	25,57	28,65	31,81	34,98	37,56	40,28	43,54	45,83	48,32	51,94	53,27	55,79	58,48
$M_{.10}$	16,52	20,09	23,23	26,29	29,64	32,61	36,04	38,95	41,71	45,19	47,70	50,06	53,64	54,74	58,18	60,50
$M_{.20}$	14,52	20,10	24,35	27,01	30,44	33,67	37,71	40,72	43,19	46,59	49,61	52,51	55,18	56,26	59,67	63,30
$M_{.25}$	13,89	20,10	24,84	27,97	31,19	34,51	37,82	41,30	44,21	47,50	50,53	53,85	56,64	58,19	61,42	63,97

TABLA 9: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 8.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	13,42	15,78	19,85	25,38	28,23	35,05	35,44	39,52	43,09	46,60	50,97	46,32	49,69	52,53	56,06	59,59
$R_{.80}$	8,60	13,58	14,48	15,38	15,91	16,62	27,50	29,14	30,70	31,98	33,23	56,51	59,94	62,43	64,90	67,24
$C_{.10}^*$	17,12	17,90	23,20	22,19	22,41	24,08	23,45	25,36	26,87	27,41	30,27	31,55	32,68	33,82	35,07	35,51
$C_{.20}^*$	16,08	24,73	24,72	24,48	24,04	25,56	25,50	27,18	28,77	30,69	33,60	33,68	35,49	36,82	37,70	39,78
$C_{.60}^*$	15,64	18,73	21,77	23,26	27,69	33,36	28,96	29,49	30,83	31,98	32,49	28,21	28,25	27,73	32,71	31,88
$C_{.80}^*$	8,40	7,30	8,34	9,85	11,97	14,01	23,55	26,35	28,89	30,82	32,61	55,20	59,12	62,00	64,60	67,07
$R_{.60}^*$	11,55	13,50	16,32	21,73	25,62	30,86	32,77	39,30	38,96	41,33	45,39	46,17	50,70	52,38	54,01	59,49
$R_{.80}^*$	8,14	11,73	12,55	13,94	13,85	14,20	28,17	31,70	33,02	35,03	36,47	54,73	59,83	62,88	65,47	69,55
$W$	6,70	7,31	7,77	8,65	9,06	8,71	9,21	9,26	10,48	10,63	10,89	11,28	12,23	12,60	12,70	12,88
$R^+$	16,21	18,92	20,38	23,17	26,20	27,57	28,75	30,77	33,18	36,23	37,34	38,88	40,39	42,04	45,16	46,06
$R$	20,24	21,78	23,75	26,48	27,67	31,19	31,68	33,71	36,65	37,52	40,62	41,47	42,92	45,03	46,61	49,14
$C_6$	8,40	10,62	13,39	17,13	20,87	24,82	29,79	35,04	40,39	44,65	49,72	54,33	59,27	63,66	67,74	71,75
$M_0$	20,07	24,44	27,93	31,65	34,82	38,66	41,93	45,11	48,82	51,22	54,90	57,09	60,16	61,88	64,23	67,07
$M_{.10}$	20,34	24,99	28,50	32,36	36,11	39,73	43,13	46,33	50,28	52,87	56,72	58,84	61,94	63,68	66,56	69,16
$M_{.20}$	18,24	24,86	29,87	33,30	37,02	40,60	45,04	48,29	51,91	54,53	58,53	61,06	63,59	65,28	68,02	71,83
$M_{.25}$	17,47	24,86	30,51	34,78	37,84	41,61	45,25	49,09	52,89	55,32	59,31	61,94	65,07	66,92	69,74	72,66

por Tajuddin (1994) y Modares & Gastwirth (1998), respectivamente, para la comparación.

### 3.2. Estudio de potencia para $n = 30, 50, 100, 150, 200, 250$ y $500$

Con base en las tablas 11 a 17, se concluye que:

Para tamaños de muestra  $n \geq 150$ , la prueba  $C_p^*$  no fue incluida porque su desempeño desmejoró frente a las pruebas  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$ , sin que necesariamente la potencia de la prueba  $C_{.80}^*$  estuviera por debajo de algunas de las competidoras de la literatura.

TABLA 10: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 9.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	14,17	16,32	21,13	27,37	30,50	38,19	37,74	41,54	44,73	49,18	53,39	48,45	51,35	54,73	59,11	61,72
$R_{.80}$	8,70	13,99	14,85	15,68	16,34	16,86	28,29	30,00	31,44	32,91	33,99	59,23	61,69	64,46	67,00	68,97
$C_{.10}^*$	18,09	18,39	24,20	23,11	23,97	25,23	24,64	25,89	27,14	28,09	31,00	31,91	33,22	34,68	35,71	36,69
$C_{.20}^*$	16,95	25,35	25,98	25,10	25,39	26,37	26,76	27,56	29,21	31,54	34,26	34,33	35,74	36,74	38,39	40,04
$C_{.60}^*$	16,47	19,53	23,03	24,75	29,84	36,08	31,59	31,92	33,08	33,85	34,03	29,92	29,86	29,96	34,90	32,86
$C_{.80}^*$	8,52	7,26	8,45	9,77	12,11	14,15	24,43	27,20	29,50	31,65	33,28	57,79	60,92	63,98	66,75	68,84
$R_{.60}^*$	11,90	14,21	17,74	22,84	27,68	33,55	34,33	40,97	40,36	43,56	48,27	49,56	53,11	54,88	57,40	62,00
$R_{.80}^*$	8,34	12,38	13,28	13,97	13,64	13,74	28,31	32,16	34,84	36,62	37,48	56,80	61,31	64,09	66,75	70,99
$W$	6,69	7,47	7,83	8,78	9,02	9,06	9,71	9,82	10,78	10,93	11,61	11,92	12,02	12,77	13,29	12,98
$R^+$	17,60	19,47	21,54	23,95	28,21	29,51	31,56	33,42	35,49	39,15	39,57	42,24	43,67	45,94	49,23	49,55
$R$	21,99	22,59	25,10	27,71	29,88	33,19	34,62	36,30	39,07	40,62	42,90	44,86	46,24	49,15	50,81	52,62
$C_6$	8,67	11,12	14,33	18,07	22,63	27,31	31,94	36,87	42,20	47,74	52,58	57,93	62,06	66,67	70,99	74,49
$M_0$	21,65	25,43	29,54	32,94	37,58	41,58	45,30	48,85	51,53	55,25	57,86	60,80	64,18	66,74	69,11	71,41
$M_{.10}$	21,98	26,13	30,25	33,91	38,83	42,94	46,61	50,35	53,23	56,98	59,78	62,76	65,84	68,38	71,42	73,36
$M_{.20}$	19,68	26,27	31,75	35,06	39,88	44,30	48,26	52,30	54,88	58,57	61,92	65,04	67,56	69,88	73,05	75,94
$M_{.25}$	18,85	26,27	32,50	36,57	40,72	45,28	48,72	53,01	56,21	59,46	62,79	66,70	68,83	71,63	74,47	76,46

La prueba  $W$ , referenciada para la hipótesis de simetría por Gibbons & Chakraborti (1992), es la que tiene el desempeño más bajo de todas las pruebas que se compararon.

Existen grandes diferencias entre las potencias de las pruebas  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$  con respecto a algunas de sus competidoras. Por ejemplo, para  $n = 200$  con muestras provenientes del caso 4, la potencia de las pruebas  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$  es del 98,3% y 97,9%, respectivamente, mientras que las pruebas  $R^+$ ,  $R$ ,  $T$  y  $W$  tienen potencias del 33,2%, 34,1%, 64,9% y 21,4%, respectivamente, las pruebas  $M_0$ ,  $M_{.10}$ ,  $M_{.20}$  y  $M_{.25}$  tienen potencias del 56%, 58%, 61% y 62%, respectivamente, y la potencia de la prueba  $C_6$  es del 93%, notándose claramente el dominio de las pruebas propuestas sobre las competidoras mencionadas.

Se podría decir que las pruebas  $W_{70}$  y  $W_{80}$  son las competidoras más directas que se tienen, pues siguiendo con el ejemplo de  $n = 200$ , estas tuvieron potencias del 98% y 99%, respectivamente. Sin embargo, no existe una diferencia clara entre las pruebas propuestas y estas; es más, en la tabla 11 (potencia para  $n = 30$ ) se puede observar que las diferencias son mínimas para los casos 1 al 5 donde las potencias de  $W_{70}$  son muy similares a las de  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$ , y que para los demás casos (6 al 9) las pruebas propuestas tienen las mayores potencias. Además, recordemos que la prueba  $W_p$  utiliza dos estadísticos por ser una prueba híbrida, lo que hace un poco más complicado usarla.

## 4. Conclusiones y discusión

En general, para los tamaños de muestra menores o iguales a 25 se concluye:

En los casos 2, 3, 4 y 5 de la DLG y para  $n < 20$ , la potencia de la prueba  $C_{.20}^*$  es mayor que la potencia de las pruebas  $M_p$ ,  $R$ ,  $R^+$ ,  $C_6$  y  $W$ .

En los casos 2 al 6 y para  $20 < n \leq 25$ , se observa que la potencia de las pruebas  $R_{.80}$ ,  $R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  es mayor que la potencia de las pruebas  $M_p$ ,  $R$ ,  $R^+$ ,  $C_6$  y  $W$  consultadas en la literatura.

Para los casos 7 al 9, las potencias de las pruebas propuestas  $R_{.80}$ ,  $R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  son mayores que las potencias de las pruebas  $R$  (Baklizi 2003),  $R^+$  (McWilliams

TABLA 11: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 30$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5,13	5,61	10,99	18,47	25,48	36,86	54,93	64,70	66,67
$R_{.80}$	5,19	6,02	13,23	25,65	36,17	71,07	86,86	91,43	93,53
$R_{.60}^*$	4,97	5,46	10,00	16,89	22,86	41,51	59,94	68,57	71,62
$R_{.80}^*$	5,22	5,92	12,87	24,77	34,34	69,57	84,01	88,43	90,20
$C_{.60}^*$	5,21	5,74	9,89	15,91	20,23	21,46	28,25	33,28	34,28
$C_{.80}^*$	5,32	6,49	12,05	21,52	30,08	62,24	80,71	87,08	89,90
$R^+$	5,16	5,28	7,68	11,49	14,40	30,17	45,30	54,33	57,78
$R$	5,31	5,33	8,08	12,19	15,48	33,03	48,45	57,37	61,00
$W$	4,93	5,06	5,98	6,93	7,63	9,04	12,72	15,03	15,69
$T$	4,68	5,51	9,55	13,91	18,72	23,30	39,10	48,56	50,91
$C_6$	5,17	5,81	11,64	21,65	30,42	60,96	79,37	85,74	88,43
$M_0$	5,15	5,54	9,36	15,53	20,89	50,62	68,66	77,15	80,84
$M_{.10}$	5,11	5,53	9,61	15,79	21,55	53,28	71,11	79,01	82,81
$M_{.20}$	4,89	5,21	9,39	15,79	21,62	54,63	72,53	80,18	84,19
$M_{.25}$	4,95	5,27	9,41	16,05	22,17	55,97	73,63	81,06	84,89
$W_{.70}$	4,18	5,31	12,93	25,45	36,45	60,58	82,10	88,18	90,39
$W_{.80}$	3,70	4,81	11,94	24,07	34,03	60,94	74,38	77,77	78,90

TABLA 12: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 50$ .

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	4,85	6,54	16,91	31,66	43,87	54,19	75,11	82,54	83,19
$R_{.80}$	4,87	7,07	22,10	45,91	62,68	88,90	97,34	98,77	99,18
$R_{.60}^*$	4,93	6,32	15,54	29,81	41,55	63,69	83,84	89,66	90,72
$R_{.80}^*$	4,87	6,98	20,39	42,24	57,95	91,46	97,84	98,87	99,29
$C_{.80}^*$	4,97	5,96	9,17	16,43	22,39	57,50	81,71	89,38	91,48
$R^+$	4,86	5,34	8,86	14,48	20,22	49,04	67,22	76,62	81,24
$R$	5,23	5,64	9,47	15,61	21,66	51,54	69,73	78,76	82,88
$W$	4,88	5,08	6,81	8,92	10,65	12,22	18,61	23,31	24,23
$T$	4,76	5,92	12,76	21,72	29,85	37,15	60,23	70,65	73,29
$C_6$	4,81	6,81	19,89	43,10	59,30	95,13	98,99	99,58	99,73
$M_0$	4,79	5,54	11,20	21,96	31,13	76,14	90,32	94,75	96,55
$M_{.10}$	4,76	5,67	11,55	22,79	32,42	78,70	91,88	95,82	97,34
$M_{.20}$	4,75	5,84	12,04	23,92	33,99	81,35	93,34	96,77	97,81
$M_{.25}$	4,64	5,68	12,14	24,19	34,49	82,33	93,88	97,09	98,01
$W_{.70}$	4,45	6,66	22,15	46,12	63,67	87,16	97,47	99,06	99,37
$W_{.80}$	4,09	6,33	21,67	48,77	67,02	94,52	99,21	99,77	99,86

1990) y  $W$  (Wilcoxon), y se mantienen cerca de las potencias obtenidas por la prueba  $M_{.25}$  que fue la que alcanzó los mejores resultados.

Para los casos 7 al 9 de la DLG, donde las pruebas  $C_{.20}^*$ ,  $R_{.80}$ ,  $R_{.80}^*$  y  $C_{.80}^*$  no tienen las mayores potencias (aunque están por encima de pruebas reconocidas) es más fácil, por su forma distribucional, hacer un análisis descriptivo y detectar la asimetría; es decir que la asimetría se puede detectar de forma sencilla para los casos donde las pruebas propuestas no tienen su mejor desempeño, mientras que para los casos donde la asimetría no es tan severa y se requiere una prueba, la mayor potencia se obtiene usando las pruebas propuestas.

En general, para los tamaños de muestra mayores que 25 se concluye:



TABLA 13: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 100$ .

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5,16	8,40	32,15	58,21	73,70	77,87	93,67	96,49	97,01
$R_{.80}$	5,12	10,53	45,62	80,79	92,40	98,97	99,95	99,99	99,99
$R_{.60}^*$	5,07	8,13	30,60	57,44	74,12	87,81	97,77	99,01	99,29
$R_{.80}^*$	5,06	9,66	41,50	76,86	90,34	99,70	99,99	100,00	100,00
$C_{.80}^*$	4,94	6,58	13,57	22,00	23,60	54,44	85,82	93,50	96,08
$R^+$	4,73	5,87	11,27	21,28	31,72	78,60	92,96	96,63	98,00
$R$	4,50	5,58	10,91	20,64	31,36	78,37	92,97	96,54	97,94
$W$	4,82	5,34	9,19	13,00	16,80	20,46	35,34	42,29	43,99
$T$	4,84	7,10	21,75	38,32	52,38	63,24	88,32	94,30	95,24
$C_6$	4,89	8,82	37,15	74,99	88,72	99,98	100,00	100,00	100,00
$M_0$	4,84	6,47	15,55	35,27	51,37	97,34	99,67	99,94	99,99
$M_{.10}$	4,86	6,51	16,24	36,81	53,56	98,00	99,81	99,97	99,99
$M_{.20}$	4,83	6,66	16,92	38,54	55,62	98,62	99,87	99,98	100,00
$M_{.25}$	4,91	6,63	17,33	39,36	56,72	98,84	99,89	99,99	100,00
$W_{.70}$	5,08	10,31	46,12	79,97	92,77	99,28	99,99	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,99	10,88	49,53	85,63	95,70	99,92	100,00	100,00	100,00

TABLA 14: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 150$ .

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	4,82	9,94	45,42	75,58	88,96	88,82	98,24	99,49	99,58
$R_{.80}$	4,77	12,76	62,72	93,84	98,74	99,89	100,00	100,00	100,00
$R_{.60}^*$	4,90	9,89	44,62	76,64	90,21	95,16	99,55	99,88	99,94
$R_{.80}^*$	4,46	11,62	58,39	92,13	98,34	99,99	100,00	100,00	100,00
$R^+$	4,96	5,82	12,99	28,28	41,34	92,01	98,80	99,53	99,81
$R$	4,73	5,42	12,43	27,47	40,56	91,80	98,77	99,53	99,81
$W$	4,86	5,69	11,19	17,18	23,82	28,93	48,31	57,73	60,57
$T$	5,10	8,01	30,21	53,49	70,29	80,31	97,05	99,09	99,48
$C_6$	4,64	10,38	47,63	87,75	96,31	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_0$	5,24	6,61	19,53	46,97	67,04	99,76	99,99	100,00	100,00
$M_{.10}$	5,34	6,73	20,40	49,07	69,53	99,85	100,00	100,00	100,00
$M_{.20}$	5,33	6,72	21,26	51,52	71,83	99,93	100,00	100,00	100,00
$M_{.25}$	5,28	6,66	21,74	52,77	73,16	99,95	100,00	100,00	100,00
$W_{.70}$	5,04	12,57	64,02	93,70	98,78	99,97	100,00	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,91	13,27	68,15	96,47	99,54	100,00	100,00	100,00	100,00

La prueba  $W$ , referenciada para la hipótesis de simetría por Gibbons & Chakraborti (1992), es la que tiene el desempeño más bajo de todas las pruebas que se compararon.

Las pruebas  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$  tienen las mayores potencias en vecindades de la hipótesis nula, lo que permite conjeturar que las pruebas propuestas son localmente más potentes.

Para  $n \geq 30$ , como se sospechaba, la potencia de las pruebas  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$  mejoró para los casos 7 al 9, tanto así que para  $n = 30$  resultan ser las pruebas con el mejor desempeño en cualquiera de los casos de la DLG seleccionados, es decir, que la potencia de las pruebas  $R_{.80}$  y  $R_{.80}^*$  es siempre mayor que la potencia de todas sus competidoras de la literatura en el tamaño de muestra mencionado.

TABLA 15: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 200$ .

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5,30	12,46	58,51	87,10	95,86	94,28	99,54	99,91	99,92
$R_{.80}$	5,17	16,05	76,59	98,27	99,83	99,99	100,00	100,00	100,00
$R_{.60}^*$	5,16	11,89	57,42	87,72	96,49	98,07	99,91	99,98	99,99
$R_{.80}^*$	5,15	15,09	73,47	97,94	99,80	100,00	100,00	100,00	100,00
$R^+$	5,31	6,17	14,79	33,25	50,46	97,08	99,77	99,96	99,99
$R$	5,52	6,41	15,22	34,12	51,27	97,27	99,80	99,97	99,99
$W$	5,10	6,09	13,09	21,40	29,85	36,67	60,37	71,11	72,85
$T$	5,01	9,47	39,36	64,87	82,23	90,16	99,35	99,93	99,94
$C_6$	5,03	11,85	54,85	93,03	98,34	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_0$	5,20	6,91	22,66	56,14	77,68	99,98	100,00	100,00	100,00
$M_{.10}$	5,12	7,06	23,54	58,38	79,85	99,99	100,00	100,00	100,00
$M_{.20}$	5,05	7,10	24,64	60,96	82,11	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.25}$	5,08	7,09	25,49	62,50	83,29	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.70}$	4,86	15,78	77,18	98,03	99,83	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,89	16,53	80,80	99,12	99,98	100,00	100,00	100,00	100,00

TABLA 16: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 250$ .

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5,04	14,08	67,21	92,36	98,23	98,25	99,90	100,00	100,00
$R_{.80}$	4,66	18,85	84,36	99,55	99,96	100,00	100,00	100,00	100,00
$R_{.60}^*$	5,03	13,66	66,93	93,16	98,67	99,20	99,99	100,00	100,00
$R_{.80}^*$	4,71	17,78	82,17	99,39	99,96	100,00	100,00	100,00	100,00
$R^+$	4,85	6,40	16,59	38,83	57,82	99,07	99,97	100,00	100,00
$R$	4,72	6,29	16,37	38,48	57,58	99,06	99,97	100,00	100,00
$W$	5,11	6,43	15,69	25,76	36,41	44,10	70,09	80,04	81,97
$T$	4,90	10,48	47,40	74,31	89,63	95,42	99,88	99,97	99,99
$C_6$	4,85	12,78	60,36	95,56	99,14	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_0$	4,96	7,05	26,71	64,76	84,84	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.10}$	4,92	7,10	28,23	67,27	86,68	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.20}$	4,97	7,23	29,54	70,07	88,57	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.25}$	4,97	7,25	30,23	71,46	89,60	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.70}$	4,75	18,90	85,47	99,47	99,98	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,66	19,98	88,95	99,88	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Recientemente, Baklizi (2007) sugiere el uso de la longitud de la racha más larga en la cola derecha de la sucesión dicotomizada, y en su trabajo de 2008 propone eliminar la primera etapa de la prueba de Modarres & Gastwirth (1998), con lo cual se logra incrementar su potencia. En la tabla 18 (Apéndice A), se incluyen los valores de las potencias de las pruebas propuestas en los dos artículos mencionados anteriormente y las potencias de las pruebas propuestas. Comparando con las pruebas  $L^*$ ,  $L_{n,0,8}^*$  y  $L$  propuestas en Baklizi (2007), se observa que:

- Para  $n = 20$ , las pruebas propuestas tienen un mejor desempeño en algunos casos.
- Para  $n = 30$ , las pruebas propuestas tienen las mayores potencias en todos los casos.

TABLA 17: Potencias para los nueve casos de la DLG y  $n = 500$ .

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	4,74	23,81	92,40	99,74	99,99	99,92	100,00	100,00	100,00
$R_{.80}$	4,86	34,09	98,96	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
$R^*_{.60}$	4,78	23,60	92,60	99,82	100,00	99,98	100,00	100,00	100,00
$R^*_{.80}$	5,02	32,94	98,76	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
$R^+$	5,12	6,72	24,41	61,40	83,08	100,00	100,00	100,00	100,00
$R$	5,10	6,81	24,48	61,70	83,24	100,00	100,00	100,00	100,00
$W$	4,95	8,00	26,54	46,09	62,11	72,76	93,85	97,56	98,16
$T$	4,91	16,66	76,19	95,97	99,53	99,90	100,00	100,00	100,00
$C_6$	4,91	16,39	74,95	99,09	99,93	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_0$	5,25	7,68	41,58	89,33	98,40	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.10}$	5,21	7,73	43,63	91,16	98,85	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.20}$	5,16	7,95	45,78	92,77	99,18	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.25}$	5,16	8,15	46,91	93,45	99,35	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.70}$	5,06	33,94	99,22	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,98	36,41	99,58	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

- Para  $n = 50$  y  $n = 100$ , las pruebas propuestas superan las pruebas de Baklizi en los casos 2 al 5, y en los casos 6 al 9 coincide la potencia de las pruebas comparadas.

[Recibido: marzo de 2009 — Aceptado: octubre de 2010]

## Referencias

- Baklizi, A. (2003), 'A Conditional Distribution Runs Test for Symmetry', *Journal of Nonparametric Statistics* **15**(6), 713–718.
- Baklizi, A. (2007), 'Testing Symmetry Using A Trimmed Longest Run Statistic', *Australian & New Zealand Journal of Statistics* **49**(4), 339–347.
- Baklizi, A. (2008), 'Improving the Power of the Hybrid Test of Symmetry', *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* **3**(10), 497–499.
- Butler, C. (1969), 'A test for symmetry using the sample distribution function', *The Annals of Mathematical Statistics* **40**, 2209–2210.
- Castillo, O. (1993), Una prueba de rachas para simetría, Tesis de maestría, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Cheng, W. H. & Balakrishnan, N. (2004), 'A Modified Sign Test for Symmetry', *Communications in Statistics Simulation and Computation* **33**, 703–709.
- Cohen, J. & Menjoge, S. (1988), 'One-sample runs test of symmetry', *Journal of Statistical Planning and Inference* **18**(1), 93–100.
- Corzo, J. (1989), Verallgemeinerte Runtests für Lage- und Skalenalternativen, Tesis de doctorado, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Alemani.

- Corzo, J. & Rojas, A. (1999), 'Una prueba basada en rachas para simetría alrededor de una mediana específica', *Revista Colombiana de Estadística* **22**(2), 39–53.
- Gibbons, J. D. & Chakraborti, S. (1992), *Nonparametric Statistical Inference*, CRC Press, New York.
- Hettmansperger, T. (1984), *Statistical Inference Based on Ranks*, John Wiley & Sons, New York.
- Hill, D. & Rao, P. (1977), 'Test of Symmetry Based on Cramér-Von Mises', *Biometrika* **64**, 489–494.
- Lehmann, E. L. (1986), *Testing Statistical Hypotheses*, second edn, John Wiley.
- McWilliams, P. (1990), 'A Distribution-Free Test for Symmetry Based on a Runs Statistic', *Journal of the American Statistical Association* **85**(412), 1130–1133.
- Mira, A. (1999), 'Distribution-Free Test for Symmetry Based on Bonferroni's Measure', *Journal of Applied Statistics* **26**(8), 959–972.
- Modarres, R. & Gastwirth (1996), 'A modified runs tes for symmetry', *Statistics and probability* **25**(5), 575–585.
- Modarres, R. & Gastwirth, J. L. (1998), 'Hybrid Test for the Hypothesis of Symmetry', *Journal of Applied Statistics* **25**(6), 777–783.
- Randles, R. & Wolfe, D. (1979), *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Rothman, E. & Woodroffe, M. (1972), 'A Cramér-Von Mises Type Statistic for Testing Symmetry', *The Annals of Mathematical Statistics* **43**, 2035–2038.
- Tajuddin, I. (1994), 'Distribution-Free Test for Symmetry Based on the Wilcoxon Two-Sample Test', *Journal of Applied Statistics* **21**(5), 409–414.
- Thas, O., Rayner, J. C. W. & Best, D. J. (2005), 'Tests for Symmetry Based on the One-Sample Wilcoxon Signed Rank Statistic', *Communications in Statistics - Simulation and Computation* **34**, 957–973.

## Apéndice A. Desempeño de las pruebas propuestas con las pruebas de Baklizi (2007, 2008)

TABLA 18: Potencia de las pruebas recientemente sugeridas por Baklizi y de las pruebas propuestas.

Caso	$n$	$L^*$	$L_{n,0.8}^*$	$L$	$R_{2008}$	$R_{80}^*$	$R_{80}$
1	20	5	5,5	5,5	4,5	4,8	4,9
1	30	5,1	5,4	4,8	4,5	5,2	5,2
1	50	4,9	5	5,8	5	4,9	4,9
1	100	5,5	5,4	4,9	5,1	5,1	5,1
2	20	5,7	6,2	4,6	5,8	5,6	5,4
2	30	5	6,3	5,8	6,2	5,9	6,0
2	50	5,8	6,2	5,3	7,5	7,0	7,1
2	100	5,3	6,6	6,5	10,6	9,7	10,5
3	20	5,7	8,8	7	11,4	8,3	8,1
3	30	6,9	12,8	8,8	15,6	12,9	13,2
3	50	7,5	14,5	14,1	25,3	20,4	22,1
3	100	12,2	22,8	23,3	48,6	41,5	45,6
4	20	7,2	13,8	8,7	18,7	13,7	12,7
4	30	10	22,9	14,2	28,7	24,8	25,7
4	50	14,4	30,3	31,4	49,9	42,2	45,9
4	100	33,3	57,2	59,5	81,8	76,9	80,8
5	20	9,5	16,5	12	25,4	17,9	15,9
5	30	13,1	33,3	21,9	40,4	34,3	36,2
5	50	23	45,7	45,5	66,8	58,0	62,7
5	100	55,6	76,9	78,4	93,9	90,3	92,4
6	20	13,6	26,7	19,1	42	28,2	24,8
6	30	25,6	64,9	46,9	65,3	69,6	71,1
6	50	64,2	90,8	91,4	89,4	91,5	88,9
6	100	99,5	100	100	99,4	99,7	99,0
7	20	22,6	33	31,4	59,3	35,4	30,7
7	30	44,4	82,3	68,9	85,4	84,0	86,9
7	50	86	97,8	98	98	97,8	97,3
7	100	100	100	100	100	100,0	100,0
8	20	29,5	36,6	38,9	66,6	32,6	33,2
8	30	55,5	87,6	79	91,3	88,4	91,4
8	50	93	99,1	99,1	99,3	98,9	98,8
8	100	100	100	100	100	100,0	100,0
9	20	32,2	35,9	42,8	69,2	37,5	34,0
9	30	60,8	89,8	82,1	92,4	90,2	93,5
9	50	95,3	99,3	99,5	99,5	99,3	99,2
9	100	100	100	100	100	100,0	100,0