Revista Colombiana de Estadística
Nº28

UN PROCEDIMIENTO PARA OBTENER UNA TRANSFORMACION QUE SIMETRICE UN CONJUNTO DE DATOS EMPLEANDO LA FAMILIA DE TRANSFORMACIONES POTENCIALES

ELKIN CASTAÑO VELEZ

CENTRO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS
DE LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

RESUMEN. Con frecuencia la simetría en un conjunto de datos es una propiedad deseable, puesto que muchos de los estimadores de localización trabajan mejor y pueden ser mejor comprendidos si los datos proceden de una distribución simétrica. El **gráfico de transformación para simetría** (Emerson, (1983)) proporciona una herramienta para obtener una transformación en la escala de potencias que simetriza la distribución del conjunto de datos. Sin embargo dicho procedimiento tiene algunos inconvenientes en su aplicación entre los que se encuentran: i) si el gráfico tiene alejamientos sistemáticos de la linealidad el procedimiento puede fracasar, no implicando necesariamente que no exista una transformación que simetrice los datos; ii) en muestras pequeñas y moderadas el método utiliza muy poca información; iii) la escogencia del método de ajuste apropiado para obtener la pendiente de la recta que pasa por el origen la cual está directamente relacionada con el valor de la transformación.

Este documento presenta un método alternativo simple que hace uso, como el método anterior, de la mediana y de los valores letra de la distribución del conjunto de datos pero a diferencia de aquel, obtiene como transformación simetrizante la potencia en la familia de transformaciones potenciales que minimiza la suma de las desviaciones absolutas entre la mediana y los resúmenes medios de los datos transformados. El comportamiento de la transformación obtenida es estudiado a través de simulación y se presenta un ejemplo con datos reales en el que se compara el funcionamiento de los dos métodos.

1.INTRODUCCION

Las dificultades en el análisis de los datos pueden surgir por diferentes causas tales como: fuerte asimetría, muchos valores atípicos en una cola, conjuntos de datos en diferentes niveles y con dispersiones marcadamente diferentes, y residuales grandes y sistemáticos producidos por el ajuste de algún modelo a los datos. En estos casos puede ser necesario cambiar la escala básica de medida para que los datos puedan producir diagramas informativos, resúmenes efectivos y análisis menos complicados. El

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX cambio de la forma del conjunto de datos puede lograrse transformando los datos por medio de la aplicación de una función matemática simple. Ahora bien, las transformaciones lineales cambian el origen y la escala pero no la forma del conjunto de datos. Las transformaciones potenciales permiten cambiar la forma y por tanto reexpresiones de esta clase son útiles para tratar de producir simetría en los datos.

Una familia de transformaciones potenciales de mucha utilidad en la reexpresión de los datos es la familia de transformaciones de Box y Cox (1964) dada por:

$$T_p(x) = \begin{cases} (x^p - 1)/p & \text{si } p \neq 0 \\ ln(x) & \text{si } p = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Esta transformación tiene, entre otras, la propiedad de que permite comparar el efecto de las transformaciones realizadas sobre los datos, lo cual nos permite emplear ayudas gráficas para seleccionar la transformación más adecuada en el contexto de los datos. El objetivo de este documento es presentar un procedimiento que proporcione una transformación en esta familia de forma tal que simetrice el conjunto de datos.

El plan de este artículo es el siguiente: la sección 2 presenta de manera breve algunos elementos del análisis exploratorio de datos y el gráfico de transformación para simetría; la sección 3 discute el método propuesto; algunos resultados de simulación sobre el comportamiento de la transformación son mostrados en la sección 4; la sección 5 presenta un ejemplo y finalmente se presentan las conclusiones.

2. ALGUNOS ELEMENTOS DEL ANALISIS EXPLORATORIO DE DATOS Y EL GRAFICO DE TRANSFORMACION PARA SIMETRIA

Antes de presentar el gráfico de transformación para simetría describiremos brevemente algunos de los elementos del análisis exploratorio de datos que son necesarios para su definición. Suponga que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constituyen un conjunto de datos y que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ son sus valores ordenados. A cada dato podemos asignar un **rango** desde cada uno de extremos de los datos ordenados. La **profundidad** del dato es el más pequeño de estos dos rangos. Generalmente estas profundidades son presentadas junto con los datos ordenados. Ellas tienen gran utilidad en la definición de un grupo de medidas de resumen que nos permiten describir en detalle el conjunto de datos. Entre estas medidas se encuentran:

i) La mediana, denotada por M y cuya profundidad es (n+1)/2. Si n es par (n+1)/2 posee la fracción 1/2. Por convención interpolamos cuando la profundidad no es entera. Si n es par, por ejemplo n=2k, entonces la mediana cae a mitad de camino entre $x_{(k)}$ y $x_{(k+1)}$:

$$M = (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2$$

ii) los cuartos, denotados por F (del inglés Fourths) y cuya profundidad es igual a

$$([\text{profundidad de la mediana}] + 1)/2$$

donde [z] indica la operación de encontrar el mayor entero que no exceda a z. Existen dos cuartos, el inferior y el superior denotados por F_Ly F_U, respectivamente.

iii) los octavos, denotados por E (del inglés Eights) y cuya profundidad es

$$([\text{profundidad del cuarto}] + 1)/2$$

E_L y E_U indican los octavos superior e inferior, respectivamente.

Así podemos continuar definiendo los diesciseisavos, los treintaidosavos, los sesentaicuatroavos, los cientoventiochoavos, los doscientoscincuentaisciesavos, etc., hasta los extremos del conjunto de datos, cuya profundidad es 1.

Sus notaciones, respectivamente, son D, C, B, A, Z, etc., (continuando con el abecedario al revés) y sus respectivas profundidades son

$$([\text{profundidad anterior}] + 1)/2.$$

Estas cantidades son llamadas **valores letra**. Hoaglin (1983) hace una presentación más detallada de estas medidas resúmenes. En adelante mencionaremos estos valores en forma general como X_Ly $X_U$donde $X = F, E, D, C, A, Z, Y, \ldots$

En la búsqueda de una transformación potencial que simetrice el conjunto de datos, los valores letra juegan un papel determinante. En particular, el **gráfico de transformación para simetría** consiste en un diagrama de dispersión en el cual $((X_L + X_U)/2) - M$ va en el eje vertical y $((X_U - M)^2 + (M - X_L)^2)/4M$ en el eje horizontal.

Si el gráfico resultante es **aproximadamente lineal**, entonces su forma aproximada será

$$((X_U + X_L)/2) - M = (1 - p)((X_U - M)^2 + (X_L - M)^2)/4M$$

y uno menos la pendiente $(1-p)$ es la potencia indicada para la transformación que simetriza el conjunto de datos. Esta transformación tiene la forma

$$T_p(x) = \begin{cases} x^p & \text{si } p > 0 \\ log(x) & \text{si } p = 0 \\ -x^p & \text{si } p < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Emerson (1983) presenta un desarrollo teórico del procedimiento. Ahora bien, una pregunta que surge al aplicar este método es la siguiente: si el gráfico presenta alejamientos sistemáticos de la linealidad, es que no existe una transformación potencial que sea capaz de simetrizar aproximadamente el conjunto de datos?

Para dar respuesta a esta pregunta supongamos que los datos son generados por la distribución lognormal. Para este caso el gráfico de transformación simétrica sigue, en general, un patrón curvo como el presentado por el gráfico 4 de la sección 5. Como veremos el valor de la transformación que proporciona el procedimiento, ni valores en su entorno, simetrizan el conjunto de datos.

Sinembargo, es claro que para los datos lognormales la transformación logarítmica natural (la transformación 0 en la familia de transformaciones (1)) los simetriza, al menos teóricamente. En consecuencia, un múltiplo de ella, el logarítmo en base 10 (o valores en su entorno) de la transformación en la escala de potencias (2), deberían ser señalados por el procedimiento gráfico.

Para verificar la falla del procedimiento en este caso se generaron 200 muestras lognormales, para cada uno de los tamaños muestrales de 30, 75 y 150, y se aplicó el gráfico de simetría. Los resultados se presentan a continuación:

200 SIMULACIONES PARA DIFERENTES TAMAÑOS MUESTRALES DE UNA LOGNORMAL(3,2)

	MEDIAN	*TRMEAN*	*MIN*	*MAX*	*Q1*	*Q3*
$n = 30$	0.82439	0.82517	0.62593	0.97982	0.76595	0.88563
$n = 75$	0.89559	0.89239	0.75870	0.97102	0.86374	0.92451
$n = 150$	0.92539	0.92307	0.85031	0.96333	0.90849	0.94041

Una mirada a estos resultados nos muestra el fracaso total del método gráfico para el caso de esta distribución lognormal, pues no existe un sólo caso en las 600 simulaciones realizadas donde se señale que la transformación logarítmica ($p = 0$ en la familia (2)) es adecuada para simetrizar los datos: el mínimo valor obtenido para p en todas las simulaciones fue 0.62593. Atrae también la atención que a medida que se aumenta el tamaño muestral la transformación tiende a alejarse más de la transformación logarítmica. Este efecto puede ser producido por las observaciones 'outliers' que genera la distribución lognormal.

Parece ser, entonces, que tipos de asimetrías como la exhibida por las muestras de la distribución lognormal alteran el adecuado funcionamiento del método.

Otros inconvenientes del procedimiento se presentan cuando los tamaños muestrales son pequeños o moderados pues el número de valores letra que podemos calcular es reducido y entonces el gráfico anterior contará con poca información. Además queda el problema de selecionar el procedimiento adecuado para ajustar la recta y poder calcular la transformación. Debido a la posible existencia de puntos que pueden tener gran influencia y que muestran una desviación considerable del patrón lineal del gráfico, es recomendable emplear un método de ajuste resistente para obtener la pendiente. Pero la escogencia del método resistente se ve determinada por el poco número de puntos disponibles para el ajuste. Para estos casos puede complicarse el cálculo de la transformación adecuada.

3. UN PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO

Un método alternativo para obtener una transformación que simetrice el conjunto de datos se basa en la propiedad de que en una distribución simétrica $M_{pob} = (X_{U_{pob}} + X_{L_{pob}})/2$, es decir la mediana poblacional M_{pob} es igual a los resúmenes promedios poblacionales $(X_{U_{pob}} + X_{L_{pob}})/2$.

Entonces, dado el conjunto de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, una transformación p que lo simetrice debería ser tal que, para todo X

$$T_p(M) \approx (T_p(X_L) + T_p(X_U))/2$$

donde $T_p(M), T_p(X_L)$ y $T_p(X_U)$ indican la mediana y los valores letra de los datos transformados por medio de una potencia p en la familia de transformaciones (1). El procedimiento para la obtención de p es el siguiente:

(i) Para cada p transforme los datos y encuentre el valor de $T_p(M), T_p(X_L)$ y $T_p(X_U)$.

(ii) Obtenga

$$SA(p) = \sum |T_p(M) - (T_p(X_U) + T_p(X_L))/2)|, \tag{2}$$

es decir, para los datos transformados, obtenga la suma de las desviaciones absolutas de los resúmenes medios con respecto a la mediana.

(iii) Obtenga el mínimo $SA(p)$. En o alrededor de este valor se encuentra el valor de p en la familia (1) que puede simetrizar el conjunto de datos.

Un gráfico de $SA(p)$ contra p ayuda a determinar una transformación alrededor de p que pueda tener más sentido en el contexto del análisis de los datos (por ejemplo, un valor de p=.55, puede sugerir que es más adecuado emplear la transformación raíz cuadrada). El empleo del criterio de minimizar la suma de desviaciones absolutas (2) enfatiza la utilidad de transformaciones alrededor de p, mostrando un gráfico que alcanza un mínimo en forma suave. Un criterio tal como minimizar la suma de las desviaciones cuadráticas genera un gráfico en el cual las desviaciones de los resúmenes medios con respecto a la mediana son tenidas en cuenta más severamente.

En general, una buena elección inicial es usar valores de p entre -2 y 2 con incrementos de .1.

4. COMPORTAMIENTO DEL PROCEDIMIENTO

El procedimiento anterior fue empleado para obtener las transformaciones que simetrizaran los datos en dos casos teóricos: muestras de una distribución lognormal(3,2) y de una distribución normal(4,2), de una distribución t(10), y para tres distribuciones beta con parámetros (3,3), (2,6) y (7,3).

En el primer caso, la transformación $p = 0$ en (1) simetriza exactamente la distribución teórica, pues produce una distribución normal. En el segundo, tercero y cuarto $p = 1$ es la adecuada, ya que la distribución normal es simétrica. En el quinto caso debería ocurrir que $p > 1$, puesto que la distribución es asimétrica a la izquierda, y en el último caso, $p < 1$ sería la transformación adecuada.

Se realizó un experimento de 200 simulaciones para cada una de las distribuciones mencionadas y diferentes tamaños muestrales. Los resultados se presentan a continuación:

Distribución Lognormal(3,2).

	MEDIANA	*MIN*	*MAX*	*Q1*	*Q3*
$n = 30$	0.000	−0.350	0.250	−0.050	0.050
$n = 75$	0.000	−0.200	0.150	−0.050	0.050
$n = 150$	0.000	−0.100	0.100	−0.050	0.000

De los resultados anteriores podemos concluír que:

i) aunque para tamaños muestrales pequeños la distribución de las transformaciones tiene mayor dispersión (de -.25 a .25), la necesidad de la transformación p=0 es reflejada por la gran mayoría de simulaciones.

ii) A medida que se aumenta el tamaño muestral las distribuciones tienden a cerrarse alrededor de 0. Esto refleja la propiedad de consistencia del procedimiento. Para n=150 la distribución concentra todos sus valores, dado el incremento elegido, entre -.1 y .1, loque indica que el método propuesto siempre sugiere la transformación logarítmica como la transformación que simetriza el conjunto de datos.

Distribución Normal(4,2).

	$MEDIANA$	MIN	MAX	$Q1$	$Q3$
$n = 30$	0.925	0.400	1.950	0.800	1.150
$n = 75$	1.000	0.500	1.500	0.850	1.150
$n = 150$	1.000	0.650	0.400	0.900	1.050

Los resultados son similares a los anteriores aunque en este caso las distribuciones tienden a centrarse en valores alrededor de uno.

Distribución t(10).

	$MEDIANA$	MIN	MAX	$Q1$	$Q3$
$n = 30$	0.950	0.350	1.900	0.800	1.200
$n = 75$	0.950	0.500	1.800	0.800	1.150
$n = 150$	0.950	0.550	1.500	0.850	1.130

Distribución beta (3,3).

	$MEDIANA$	MIN	MAX	$Q1$	$Q3$
$n = 30$	1.050	0.500	1.800	0.850	1.230
$n = 75$	1.050	0.600	1.650	0.900	1.150
$n = 150$	1.000	0.700	1.450	0.900	1.100

Para estos casos los resultados son similares, mostrando que se centran alrededor de uno e indicando la simetría de las distribuciones que generaron los datos.

Por último, para el caso de las distribuciones beta asimétricas, los resultados para muestras de tamaño 150 (para el cual las características de la asimetría de la distribución ya son claros), señalan que cuando hay asimetría a la izquierda la transformación es mayor que uno y que es menor que uno cuando los datos exhiben asimetría a la derecha.

Distribución beta (2,6).

	MEDIANA	*MIN*	*MAX*	*Q1*	*Q3*
$n = 150$	1.500	1.000	1.800	1.350	1.700

Distribución beta (7,3).

	MEDIANA	*MIN*	*MAX*	*Q1*	*Q3*
$n = 150$	0.550	0.400	0.800	0.500	0.650

5. UN EJEMPLO

De los datos sobre ingreso per cápita obtenidos en la Encuesta Nacional de Hogares se seleccionó una muestra aleatoria de 250 hogares. Sus valores se presentan en el Apéndice. Para tener una idea de que tan simétrico es el conjunto de datos podemos obtener sus valores letra. Usando el comando LVALS de MINITAB obtenemos:

	DEPTH	*LOWER*	*UPPER*	*MID*	*SPREAD*
$N =$	250				
M	125.5	2.240	2.240	2.240	
H	63.0	1.367	4.000	2.683	2.633
E	32.0	1.000	5.750	3.375	4.750
D	16.5	0.780	8.542	4.661	7.762
C	8.5	0.613	11.975	6.294	11.362
B	4.5	0.478	15.300	7.889	14.822
A	2.5	0.342	20.142	10.242	19.800
Z	1.5	0.183	28.850	14.517	28.667
	1	0.100	35.750	17.925	35.650

Si el conjunto de datos fuera aproximadamente simétrico los resúmenes medios (MID) deberían ser similares a la mediana 2.240. Sin embargo, observamos que a medida que la profundidad de los valores letra se aleja de la profundidad de la mediana los valores letra van creciendo monótnamente. Esto es indicativo de que el conjunto de datos tiene una gran cola a la derecha y por tanto es asimétrico.

Para este conjunto de datos vamos a emplear las metodologías discutidas en las secciones anteriores.

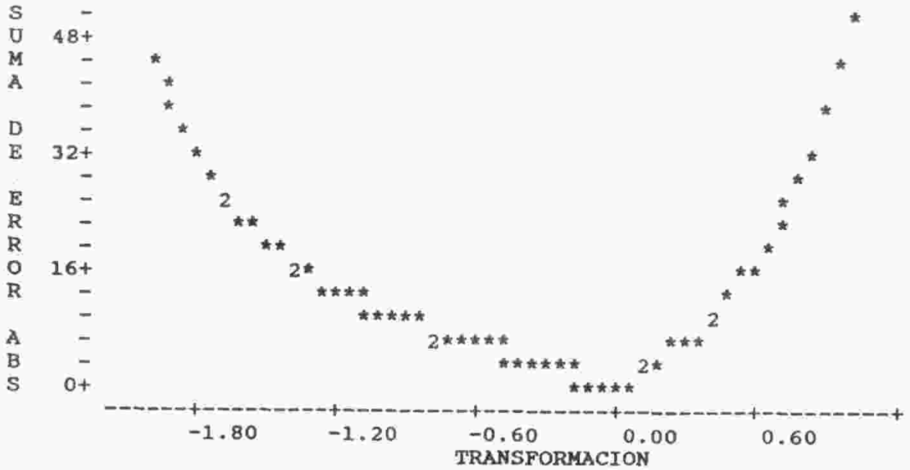
En primer lugar, usando el procedimiento propuesto en la sección 3 implementado en MINITAB (el programa implementado puede obtenerse en la dirección del autor) podemos tratar de buscar si existe alguna transformación en la familia (1) que logre simetrizar aproximadamente los datos.

Los resultados obtenidos al aplicar el programa para un rango de transformaciones entre -2 y 2 con un incremento .05 se encuentran a continuación (se analizan 61 transformaciones lo cual puede ser muy extenso en la práctica, pero aquí lo hacemos con fines de ilustración):

TRANSFORMACIONES Y SUMA DE ERRORES ABSOLUTOS

ROW	*TRANSF*	*ERRABS*
.	.	.
.	.	.
.	.	.
27	−0.70000	6.7651
28	−0.65000	6.2759
29	−0.60000	5.7984
30	−0.55000	5.3288
31	−0.50000	4.8631
32	−0.45000	4.3972
33	−0.40000	3.9270
34	−0.35000	3.4484
35	−0.30000	2.9568
36	−0.25000	2.4589
37	−0.20000	1.9395
38	−0.15000	1.5176
39	−0.10000	1.2128
40	−0.05000	1.0363
41	0.00000	0.9889
42	0.05000	1.2965
43	0.10000	2.1004
44	0.15000	2.9790
45	0.20000	3.9438
46	0.25000	5.0072
47	0.30000	6.1836
.	.	.
.	.	.
.	.	.

GRAFICO 1. SUMAS DE ERRORES ABSOLUTOS vs TRANSFORMACION



TRANSFORMACION

VALORES LETRA DE LOS DATOS TRANSFORMADOS

	DEPTH	*LOWER*	*UPPER*	*MID*	*SPREAD*
$N =$	250				
M	125.5	0.806	0.806	0.806	
H	63.0	0.312	1.386	0.849	1.074
E	32.0	0.000	1.749	0.875	1.749
D	16.5	−0.249	2.145	0.948	2.393
C	8.5	−0.491	2.483	0.996	2.973
B	4.5	−0.740	2.728	0.994	3.467
A	2.5	−1.099	2.999	0.950	4.097
Z	1.5	−1.812	3.333	0.760	5.145
	1	−2.303	3.577	0.637	5.879

GRAFICO 2. GRAFICO DE PUNTOS PARA LOS DATOS ORIGINALES

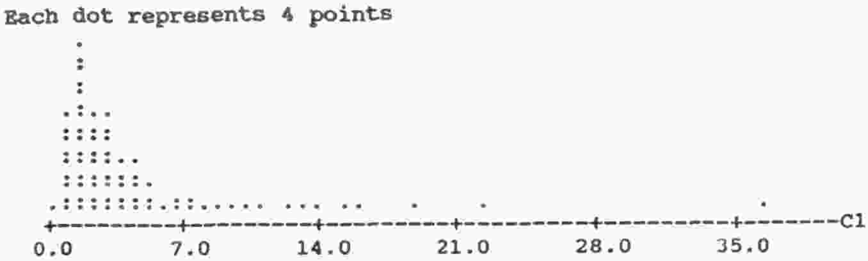
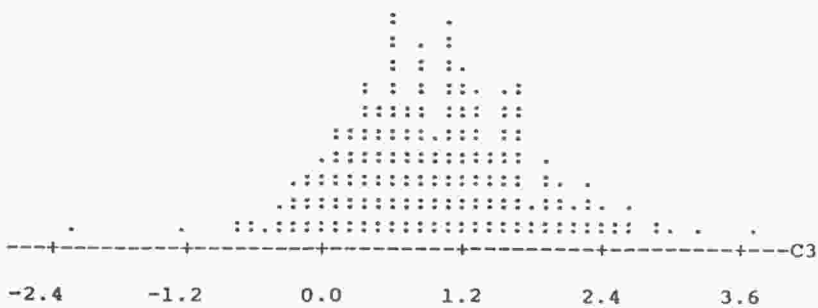


GRAFICO 3. GRAFICO DE PUNTOS
PARA LOS DATOS TRANSFORMADOS



TRANSFORMACION PARA SIMETRIA

ROW	*TRANSF*	*ERROR*
1	0	0.988854

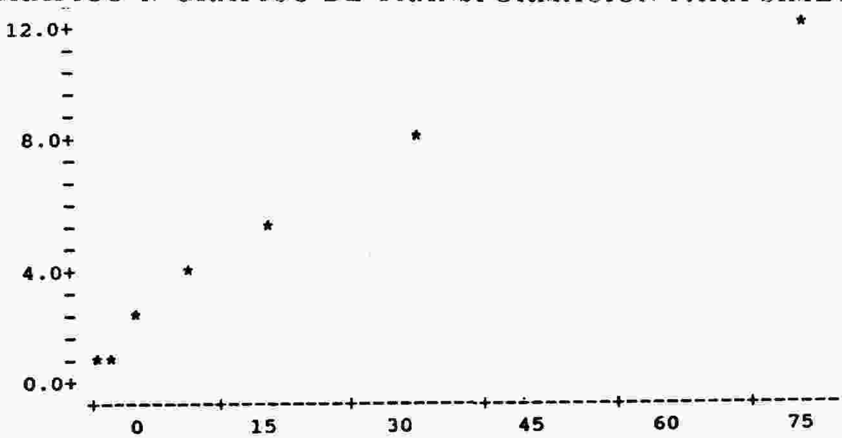
Parece ser, entonces, que la transformación basada en el logaritmo natural permite simetrizar los datos del ingreso per cápita para esta muestra. Esto está de acuerdo con las expectativas de los economistas que generalmente suponen que los ingresos siguen aproximadamente una distribución lognormal.

Ahora bien, el empleo del gráfico de transformación para simetría presentado en la sección 2 presenta los siguientes resultados:

XL	XU	$(XL+XU)/2-M$	$((XL-M)2+(XU-M)2)/4M$	P
1.36670	4.0000	0.4434	0.43080	−0.029056
1.00000	5.7500	1.1350	1.54660	0.266141
0.78000	8.5416	2.4208	4.66990	0.481612
0.61285	11.9750	4.0539	10.8725	0.627140
0.47780	15.3000	5.6489	19.3827	0.708560
0.34170	20.1417	8.0017	36.1688	0.778769
0.18335	28.8500	12.2767	79.5002	0.845577

donde P es un estimador de la transformación basado en la pendiente para cada par de puntos.

GRAFICO 4. GRAFICO DE TRANSFORMACION PARA SIMETRIA



donde el eje Y es igual a (XL+XU)/2-M, y el eje x es ((XL-M)2+(M-XU)2)/4M

El cálculo de la pendiente del diagrama de dispersión se basa en obtener la mediana de las pendientes de todas las líneas que pasan por el origen y cada cada uno de los puntos del gráfico. El resultado obtenido es 0.63. Esto nos sugiere que la transformación raíz cuadrada (p=0.5) o quizás la transformación raíz cuarta (p=0.25) puedan ser útiles para simetrizar los datos. Los resúmenes medios de los datos transformados considerando las potencias anteriores son:

$p = 0.5$	$p = 0.25$
149.666	12.234
158.453	12.477
169.896	12.743
190.275	13.246
212.146	13.724
230.119	14.045
253.219	14.390
287.422	14.727
314.768	15.038

De los resultados anteriores podemos observar que ninguna de las transformaciones aproxima el conjunto de datos a simetría, puesto que después de transformados los datos sus resúmenes medios crecen monótonamente indicando que aún persiste la asimetría a la derecha.

Por último, cuando trabajamos con datos en forma de totales o conteos es importante tener en cuenta cuándo una transformación puede cambiar la forma del conjunto de datos y ser útil. Como regla general una transformación cambiará mucho la forma si el cociente:

$$(\text{máximo valor de los datos})/(\text{mínimo valor de los datos})$$

es grande, por ejemplo mayor que 20, y no lo hará cuando es pequeño, por ejemplo menor que 2. En nuestro ejemplo dicho cociente es de 357.5 y la transformación es importante.

CONCLUSION

De acuerdo con los resultados obtenidos, el procedimiento gráfico parece no funcionar bien en todos los casos: en muestras lognormales la transformación sugerida generalmente se encuentra lejos de la transformación logarítmica. El método propuesto, sin embargo, muestra un comportamiento adecuado para los casos teóricos estudiados y la aplicación.

Bibliografía

Emerson, J. D. (1983), *"Mathematical Aspects of Transformation, en Understanding Robust and Exploratory Data Analysis"*, ed. D.C. Hoaglin y F. Mosteller, John Wiley & Sons, New York.

Hoaglin, D. C.(1983), *"Letters Values: a set of Selected Order Statistics"*, *en Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, ed. D. C. Hoaglin y F. Mosteller, John Wiley & Sons, New York..

MINITAB reference manual, Release 7, 1989.

APENDICE

INGRESO PER CAPITA PARA 250 HOGARES DE MEDELLIN. Unidad=1000.

2.5000	10.3000	0.8333	2.8000	1.3125
0.5000	2.2500	3.2500	1.2600	1.0625
1.6000	3.4000	3.3333	1.6000	6.8583
4.3575	2.0200	2.8333	5.0000	9.0625
8.7500	2.1000	2.8333	1.9000	3.0000
1.5556	1.7633	5.1200	4.3750	2.0833
1.3667	1.2000	7.2000	5.7500	10.6667
0.8125	2.0167	1.6000	7.3000	1.2311
1.1000	2.3400	3.7500	2.7350	1.8000
1.7500	8.3333	1.6500	8.8000	4.6667
0.9583	1.0000	2.5286	3.1667	1.6500
2.8750	2.6400	3.0000	2.0000	12.2500
3.3500	2.8000	0.9600	2.3333	1.6000
1.4000	15.0000	2.2778	12.5000	2.0000
1.6500	1.6875	0.7000	0.6400	7.5000
1.3000	1.0000	5.0000	3.4067	4.0000
4.2333	1.4500	4.5625	0.6667	1.2500
2.0000	1.5000	3.3333	0.9000	2.5000
4.5000	2.5000	5.7500	1.8000	0.4556
3.2500	0.9222	3.8000	1.2500	3.9000
4.8429	1.0250	1.2750	0.8400	2.4129
5.9800	5.5900	2.5000	6.0667	5.0000
0.7600	2.1667	1.7500	10.0000	21.9500
1.0000	2.5000	0.5000	9.8333	1.6600
3.3400	2.5500	1.4000	1.4667	4.0000
4.5000	4.2500	3.7500	1.0625	3.0000
4.0000	1.6418	2.0000	2.5500	1.8720
0.5857	3.1000	4.7000	0.8000	1.7333
2.6667	3.0000	4.0000	2.5250	4.0000
1.7000	1.4722	1.1000	3.8800	4.8000
1.0000	4.9000	6.5000	1.1250	1.3286
2.0000	1.5000	2.5000	13.0667	0.9000
0.7000	2.0000	4.9250	2.5020	1.9333
3.0000	5.0000	4.1500	3.8400	1.1429
0.4167	2.2300	1.0333	1.6000	6.0000

0.7000	3.9600	1.1250	6.7500	1.0880
1.5667	0.6500	1.6250	18.3333	0.1000
8.2750	1.0625	0.8250	1.7000	5.6000
2.3333	1.7429	1.2000	0.2667	1.5000
3.0000	1.5200	7.5000	1.2093	2.4667
1.6000	0.8200	2.4000	1.5000	6.0000
4.0000	0.9000	2.8000	3.3333	4.0000
3.0625	0.8833	7.0000	2.0000	15.6000
3.0000	1.0000	2.0000	3.3000	2.0000
2.5667	2.2000	2.6667	0.7143	1.1667
1.6667	4.0000	3.7500	6.0000	1.6667
1.6286	1.2000	4.5000	2.5250	2.0000
1.2667	0.8000	11.7000	1.3800	1.8000
0.9000	3.3333	2.1613	1.0000	3.3333
1.9600	1.2717	35.7500	2.5000	0.5333