

EXPRESION ANALITICA EXACTA DE LA
FUNCION DE AUTOCORRELACION SIMPLE DE
UN PROCESO ESTACIONARIO $ARMA(1,0) \times (1,0)_{12}$.

ELIANA R. GONZALEZ.

Estudiante carrera de Estadística Universidad Nacional de Colombia.

FABIO H. NIETO.

Profesor Asociado Universidad Nacional de Colombia.

RESUMEN. La forma analítica exacta de la función de autocorrelación simple (fas) de un proceso estocástico estacionario que obedece un modelo ARMA estacional, es complicada de obtener en muchos casos. En la mayoría de textos clásicos sobre análisis de series temporales, solamente se consideran modelos estacionales particulares y para algunos de ellos su función de autocorrelación se calcula solo numéricamente. En este trabajo se obtiene la expresión exacta de los primeros 12 valores de la fas del proceso estacional $ARMA(1,0) \times (1,0)_{12}$, considerada por Peña(1987) en forma numérica.

PALABRAS CLAVES Modelo ARMA estacional, función de autocorrelación simple.

ABSTRACT. The exact analytical expression of the simple autocorrelation function (saf) of a stationary stochastic process which follows a seasonal ARMA model, is very difficult to obtain in many cases. In most classical text-books about time series analysis, particular seasonal models are only considered and in some of them, their saf is computed only in a numerical way.

In this paper, the exact expression for the first 12 values of the saf of the seasonal $ARMA(1,0) \times (1,0)_{12}$ model, which is considered by Peña (1987) in a numerical approach, is obtained.

KEY WORDS Seasonal ARMA model, autocorrelation function.

1. Introducción.

Un modelo multiplicativo estacional $ARMA(p,q) \times (p,q)_s$, para un proceso estocástico estacionario de media cero $\{W_t\}$, es un modelo matemático dado por la expresión

$$\phi_p(B)\phi_p(B^s)W_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\alpha_t \quad (1.1)$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

donde

$$\begin{aligned}\phi_P(B) &= 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_P B^P, \\ \Phi_p(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_p B^{sp}, \\ \theta_q(B) &= 1 - \theta_1 B^q - \dots - \theta_q B^q, \\ \Theta_Q(B^s) &= 1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{sQ},\end{aligned}$$

s es la longitud de la estación, $\phi_1, \dots, \phi_P, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \Theta_1, \dots, \Theta_Q$ son parámetros y $\{\alpha_t\}$ denota un proceso ruido blanco.

Por la complejidad de la forma analítica *exacta*, de la función de autocorrelación simple (fas) del modelo multiplicativo estacional (1.1), la mayoría de autores (si no todos) de textos sobre Análisis de Series Temporales, solo consideran en sus trabajos modelos particulares. Y mas aún, la deducción de las pertinentes funciones de autocorrelación no es presentada o solo se dan ejemplos numéricos. Desde un punto de vista didáctico, la deducción de estas funciones puede ser un ejercicio de *salón de clase* para los estudiantes de un curso regular de series cronológicas.

Uno de los modelos particulares que presenta Peña (1987) es el $ARMA(1,0) \times (1,0)_{12}$. La fas es calculada suponiendo que el valor de los parámetros del modelo está dado por $\phi_1 = \phi = 0.5$ y $\Phi_1 = \Phi = 0.6$, pero su forma analítica no es presentada. Revisando la literatura se encuentra que, entre los autores mas sobresalientes, Box y Jenkins (1976), Abraham y Ledolter (1983), Guerrero (1991) y Brocwkwel y Davis (1991) no consideran este proceso dentro de su banco particular de modelos estacionales. Granger y Newbold (1986) lo consideran como un caso particular del modelo $ARMA(1,1) \times (1,1)_{12}$ y su fas es caracterizada (pero no calculada analíticamente) utilizando dos enfoques. En uno, se propone utilizar la función generadora de autocovarianzas dada por

$$\gamma(z) = \frac{\sigma_\alpha^2}{(1 - \phi z)(1 - \phi z^{12})(1 - \phi z^{-1})(1 - \phi z^{-12})},$$

donde σ_α^2 es la varianza del proceso de ruido blanco. Para conocer las autocovarianzas, $\gamma(z)$ debe escribirse como una combinación lineal de fracciones parciales, pero solo al factor $1 - \Theta Z^{12}$ le corresponden 12 fracciones con denominador lineal. En el otro, se utiliza una caracterización *aproximada* del comportamiento de las sucesiones de razones

$$\left\{ \frac{\rho_{T+1+K}}{\rho_{T+1+K-s}} \right\} \text{ y } \left\{ \frac{\rho_t - \phi \rho_{t-s}}{\rho_{t-1} - \phi \rho_{t-s-1}} \right\}$$

donde T es cierto retardo, $t > T$ y K es "moderadamente" grande. Wei (1990) propone obtener la fas para el modelo $ARMA(1, 1) \times (1, 1)_{12}$ como un ejercicio para el estudiante, pero no incluye la respuesta. Makridakis (1983) cita como ejemplo teórico de modelos estacionales solo al modelo $ARMA(1, 1) \times (1, 1)_4$, sin hacer referencia a su fas.

El propósito del presente trabajo es la obtención de la expresión analítica exacta de la fas del modelo estacional $ARMA(1, 0) \times (1, 0)_{12} = (AR(1) \times AR(1)_{12})$, con el fin de complementar, en un sentido didáctico, los textos usuales sobre Series Temporales que se emplean en cursos regulares sobre la materia.

El artículo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta la deducción matemática de la fas del modelo, en la sección 3 se incluyen algunos ejemplos numéricos y en la 4 se dan algunas conclusiones.

2. Forma analítica de la fas del modelo.

El modelo puede ser reescrito de la siguiente manera

$$(1 - \phi B - \phi B^{12} + \phi \Phi B^{13})W_t = \alpha_t, \quad (2.1)$$

el cual puede considerarse como un proceso $AR(13)$ con parámetros $\phi_2 = \dots = \phi_{11} = 0$ y $\phi_{13} = -\phi\Phi$.

La fas del proceso esta dada por

$$\rho_k = \phi \rho_{k-1} + \Phi \rho_{k-12} - \phi \Phi \rho_{k-13}, \quad (2.2)$$

y las ecuaciones de Yule-Walker por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi + \Phi \rho_{11} - \phi \Phi \rho_{12} \\ \rho_2 &= \phi \rho_1 + \Phi \rho_{10} - \phi \Phi \rho_{11} \\ \rho_3 &= \phi \rho_2 + \Phi \rho_9 - \phi \Phi \rho_{10} \\ &\dots \\ \rho_{12} &= \phi \rho_{11} + \Phi - \phi \Phi \rho_1. \end{aligned}$$

Considerando a θ y Θ conocidos y la fas $\{\rho_k\}$ desconocida, el anterior es un sistema lineal de ecuaciones de tamaño 12×12 , en las incógnitas ρ_1, \dots, ρ_{12} . Se puede observar por ejemplo que ρ_1 depende directamente de ρ_{11} y ρ_{12} y a su vez ρ_{12} de ρ_1

y ρ_{11} . En consecuencia es importante conocer la forma analítica de las 12 primeras autocorrelaciones del proceso, con el fin de conocer toda la función $\{\rho_k\}$.

Para cumplir con el anterior objetivo, se utilizará el método de eliminación Gaussiana. Es conveniente indicar que paquetes de computador tales como Mathematica o Maple, podrían realizar esta misma tarea. La matriz ampliada del sistema y la matriz que resulta después del primer paso de la eliminación, son las siguientes:

Matriz ampliada del sistema:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & \phi \\ -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 \\ 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1-\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & -\phi(1-\Phi) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 \\ \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & \phi \end{array} \right]$$

matriz ampliada después del primer paso de la eliminación:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & 0 & \phi^2\Phi & \phi^2 \\ 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1-\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & -\phi(1-\Phi) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Phi & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & 1-\Phi^2 & \phi\Phi^2 & \phi\Phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi(1-\Phi^2) & 1-\phi^2\Phi^2 & \Phi(1-\phi^2) \end{array} \right]$$

Con un poco de paciencia, suficiente papel y álgebra cuidadosa se obtiene en el último paso de la eliminación a la matriz

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi(1+\Phi\phi^{10})}{d_1} & \left| \frac{\phi(1+\Phi\phi^{10})}{d_1} \right. \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^2(1+\Phi\phi^8)}{d_1} & \left| \frac{\phi^2(1+\Phi\phi^8)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^3(1+\Phi\phi^6)}{d_1} & \left| \frac{\phi^3(1+\Phi\phi^6)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^4(1+\Phi\phi^4)}{d_1} & \left| \frac{\phi^4(1+\Phi\phi^4)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^5(1+\Phi\phi^2)}{d_1} & \left| \frac{\phi^5(1+\Phi\phi^2)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^6}{d_1} & \left| \frac{\phi^6}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^5(\Phi+\phi^2)}{d_1} & \left| \frac{\phi^5(\Phi+\phi^2)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^4(\Phi+\phi^4)}{d_1} & \left| \frac{\phi^4(\Phi+\phi^4)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^3(\Phi+\phi^6)}{d_1} & \left| \frac{\phi^3(\Phi+\phi^6)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\Phi\phi^2(\Phi+\phi^8)}{d_1} & \left| \frac{\phi^2(\Phi+\phi^8)}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\Phi\phi(\Phi+\phi^{12})}{d_1} & \left| \frac{\phi(\Phi+\phi^{12})}{d_1} \right. \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \left| \frac{\Phi+\phi^{12}}{1+\Phi\phi^{12}} \right.
 \end{bmatrix}$$

donde $d_1 = 1 - \Phi^2$. A partir de ella se obtiene que

$$\rho_k = \frac{\phi^k(1 + \Phi\phi^{12-2k})}{d}, \quad k = 1, \dots, 6$$

y

$$\rho_k = \frac{\phi^{12-k}(\Phi + \phi^{2k-12})}{d}, \quad k = 7, \dots, 12,$$

donde $d = 1 + \Phi\phi^{12}$. Se debe observar que para todo ϕ y Φ ($|\phi| < 1, |\Phi| < 1$) se cumple que $d > 0$.

Utilizando la ecuación en diferencias (2.2), se pueden obtener en forma analítica los coeficientes de autocorrelación ρ_k para $k = 13, 14, \dots$. Por ejemplo para $k = 13, \dots, 24$ se tiene que

$$\rho_k = \frac{\phi^k(1 - \Phi^2) + \Phi^2\phi^{24-k} + \Phi\phi^{k-12}}{d}.$$

Con base en estos resultados analíticos se pueden encontrar diferentes formas geométricas para la fas. Ellas estan determinadas por el *signo* y la *ubicación*, en el intervalo $(-1,1)$, de los parámetros ϕ y Φ . Por ejemplo:

(a) $\phi > 0, \Phi > 0$ y $-\Phi > \phi$.

En este caso $\rho_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \dots$ puesto que el numerador en cada coeficiente de autocorrelación es positivo. Además $\{\rho_k\}$ decrece si $k = 7, \dots, 12$ y este comportamiento se repite en cada estación. La figura 3.1, en la siguiente sección, muestra este comportamiento utilizando el ejemplo de Peña (1987).

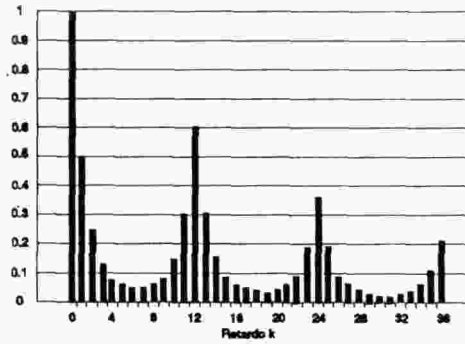
(b) $\phi > 0, \Phi < 0$ y $-\Phi > \phi$.

Aquí $\rho_k > 0$ si $k = 1, \dots, 6$, $\rho_k < 0$ si $k = 7, \dots, 12$, $\rho_k > 0$ si $k = 13, \dots, 18$ y así sucesivamente. Además, $\{\rho_k\}$ decrece desde $k = 1$ hasta $k = 12$, crece desde $k = 13$ hasta $k = 24$ y así periódicamente. La figura 3.2 describe este comportamiento.

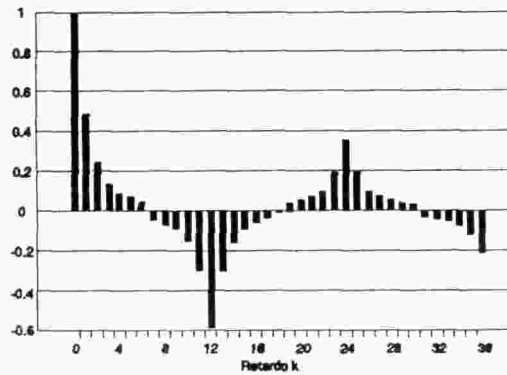
Ejemplos numéricos de las dos formas anteriores y de otras 2 posibilidades se dan en la sección 3.

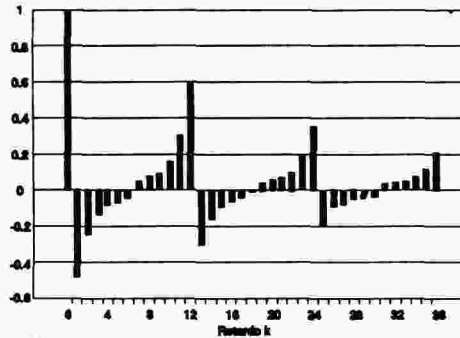
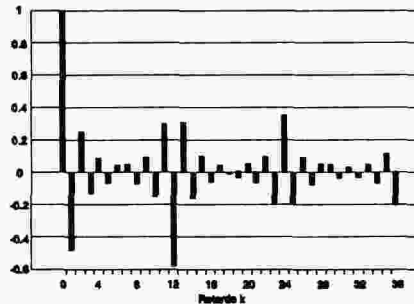
3. Ejemplos numéricos.

(a) Figura 3.1. Fas para $\phi = 0.5, \phi = 0.6$



(b) Figura 3.2. Fas para $\phi = 0.5, \phi = -0.6$



(c) Figura 3.3. Fas cuando $\phi = -0.5, \phi = 0.6$.(d) Figura 3.4. Fas si $\phi = -0.5, \phi = -0.6$ 

4. Conclusiones.

La forma analítica exacta de los 12 primeros valores de la función de autocorrelación simple del proceso estacional $ARMA(1, 0) \times (1, 0)_{12}$ ha sido obtenida y a partir de ella se han explorado algunas formas geométricas particulares entre las que se encuentra la presentada por Peña (1987). Otras formas particulares pueden ser obtenidas haciendo consideraciones especiales sobre los signos y la ubicación en el intervalo $(-1, 1)$ de los parámetros del modelo.

El presente trabajo es un complemento didáctico a los textos sobre análisis de series temporales, que usualmente se siguen en los cursos regulares sobre la materia.

BIBLIOGRAFÍA

Abraham, B. and J. Ledolter (1983), *Statistical Methods for Forecasting*, John Wiley & Sons, New York.

- Box, G.E.P. and G.M. Jenkins (1976), *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, Oakland, California.
- Brockwell, P.J. and R.A. Davis (1991), *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York.
- Granger, C.W.J. and P. Newbold (1986), *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press Inc., New York.
- Guerrero, V.M. (1991), *Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas*, Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F..
- Makridakis, S., S.C. Wheelwright and V.C. McGee (1983), *Forecasting methods and applications*, John Wiley & Sons, New York.
- Peña, D. (1987), *Estadística Modelos y Métodos vol. 2. Modelos Lineales y series temporales*, Alianza Editorial S.A., Madrid.
- Wei, W.W.S. (1990), *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., New York.

SANTAFE DE BOGOTÁ D.C.