ECONOMIC ANALYSIS AND WORKERS' MANAGEMENT, 4, XV (1981), 527—537

EKSISTENCA MOŽNE IN OPTIMALNE REŠITVE ZVEZNO-VARIABILNEGA DINAMIČNEGA LINEARNEGA PROGRAMA V POSPLOŠENI OBLIKI

*Viljem RUPNIK**

1. UVOD

Še v navadnem linearnem programu konstantne vektorje b, c in x nadomestimo z ustreznimi funkcijami b (t), c (t) in x (t), definiranimi na zaprtem intervalu [0,T], $T < +\infty$, kjer naj imajo naslednje lastnosti

$$b(t) \in R_b\,, \qquad b(t) \geqslant 0$$

$$c(t) \in R_c$$

$$x(t) \in X$$

$$A(t) \in R_A$$

kjer sta R_b in R_c razreda enoličnih omejenih zveznih ter vsaj enkrat odvedljivih realnih funkcij, in kjer od razreda R_b zahtevamo še, da vsebuje le ne- negativne furnkcije, potem je rešljiv naslednji problem

$$\begin{aligned} & opt\,[c(t),\, x(t)] \\ & A\,x(t) = b(t) \qquad\qquad (1) \\ & x(t) \geqslant 0 \\ & 0 \leqslant t \leqslant T \end{aligned}$$

Pri tem matrika A zadošča zahtevi $A = (a_{ij})^{m}_{n}$. Zgornji problem ima rešitev v razredu X enoličnih omejenih in vsaj odsekoma zveznih realnih funkcij, definiranih na [0, T] pri pogojih, ki so opisani pod /1/. Ta problem imenujemo c/b — zvezni dinamični linearni program. Eksistenčni izreki v /1/ nam zagotavljajo tudi rešitev obeh specialnih problemov, pri katerih postavimo bodisi $b = _{const}$ bodisi $c = _{const}$. Zgornji

* Ekonomski fakultet, Ljubljana.

problem razširimo tako, da nadomestimo konstantno matriko A z matriko A (t), katere elementi so enolične, omejene zvezne funkcije ter vsaj enkrat zvezno odvedljive; naj spadajo v razred R_A. Odtod je problem

$$
\begin{aligned}
&opt\,[c(t),\ x(t)]\\
&A(t)\,x(t) = b(t) \qquad (2)\\
&x(t) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

v središču naše pozornosti. Zaradi privzema prostorov R_b in R_c veljajo vsi izreki v /1/. Naj bo $t_o \in [0, T]$ in predpostavimo, da eksistira za problem

$$
\begin{aligned}
&opt\,[c(t_o),\ x(t_o)]\\
&A(t_o)\,x(t_o) = b(t_o) \qquad (2')\\
&x(t_o) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

k-ta bazična možna rešitev

$$x^{(k)}(t_o) = [\mathcal{B}^{(k)}(t_o)]^{-1}\, b(t_o)$$

ki se izraža z inverzumom k bazi

$$\mathcal{B}^{(k)}(t_o) = (P_{1_k}(t_o), \ldots P_{m_k}(t_o)) \qquad (3)$$

Problem (2) tedaj pomeni posplošitev zveznega c/b — dinamičnega linearnega programa za primer variabilne matrike $A = A(t)$. V nadaljnjem imenujemo problem (2) in vsako od že v /1/ obravnavano poenostavitev kar *zvezno-variabilni dinamični linearni program.*

2. EKSISTENCA REŠITVE IN OPTIMALNE REŠITVE

Po analogiji z dosedanjimi postopki, ki veljajo za zvezno-variabilni dinamični linearni program s konstantno matriko A, želimo dobljeno bazo uporabiti tudi v neki desni okolici točke t_o, kar pomeni, da moramo zagotoviti konstantnost njene strukture in njeno dopustnost. Definicija dopustnosti je ista, kot v /1/, definicije konstantnosti pa ne moremo več uporabiti.

DEFINICIJA: Baza $\mathcal{B}^{(k)}$ je *strukturno konstantna* na območju $[t_o, \hat{t}]$, če sestoji iz istih baznih vektorjev na tem območju.

Kako je določen $\hat{t} > t_o$? Struktura baze $\mathcal{B}^{(k)}$ se lahko spremeni bodisi zaradi spremembe vstopnega vektorja P_{s_k} bodisi zaradi spremembe izstopnega vektorja P_{r_k}.

Stabilnost indeksa s_k je zagotovljena na intervalu $[t_o, \hat{t}_{s_k}]$, kjer je

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{c}_{s_k}^{(k-1)}(t) < \bar{c}_j^{(k-1)}(t)\\
&\bar{c}_{s_k}^{(k-1)}(t),\ \bar{c}_j^{(k-1)}(t) < 0
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
&\neq s\\
&= m_k + 1, \ldots n_k
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

in je $\hat{t}_{s_k}$ najmanjši lihi koren, ki pripada sistemu

$$\bar{c}_{s_k}^{(k-1)}(t) = \bar{c}_j^{(k-1)}(t), \quad j \neq s,\ j = m_k + 1, \ldots n_k \qquad (5)$$

z lastnostjo $\bar{t}_{s_k} > t_o$. Ker je

$$z_j^{(k-1)}(t) = \sum_i^{m_{k-1}} a_{i_{k-1},j}^{(k-1)}(t)\, c_{i_{k-1}}(t) \qquad (6)$$

lahko pogoj (4) zapišemo

$$c_{s_k}^{(o)}(t) - \sum a_{i_{k-1}s_k}^{(k-1)}(t)\, c_{i_{k-1}}^{(o)}(t) < c_j^{(o)}(t) - \sum_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} a_{i_{k-1}j}^{(k-1)}(t)\, c_{i_{k-1}}^{(o)}(t) \qquad (6')$$

Odtod vidimo, da stabilnost indeksa s_k zavisi tako od elementov matrike A(t) kot tudi od elementov vektorja $c(t) = c^{(o)}(t)$.

Stabilnost indeksa r_k je zagotovljena na intervalu $(t_o, \hat{t}_{r_k})$, kjer je

$$
\left.
\begin{aligned}
&\hat{b}_{r_k}(t) < \bar{b}_{i_k}(t)\\
&\bar{b}_{r_k}(t),\ \bar{b}_{i_k}(t) \geqslant 0
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
&i_k \neq r_k\\
&i_k = 1_k, \ldots m_k
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

in je $\hat{t}_{r_k}$ najmanjši koren, ki pripada sistemu

$$\bar{b}_{r_k}(t) = \bar{b}_{i_k}(t) \quad i \neq r,\ i_k = 1_k, \ldots m_k \qquad (8)$$

z lastnostjo $\bar{t}_{r_k} > t_o$. Ker je

$$\bar{b}_{i_k}(t) = \frac{b_{i_{k-1}}^{(k-1)}(t)}{a_{i_{k-1}s_{k-1}}^{(k-1)}(t)} \qquad (9)$$

lahko pogoj (7) zapišemo

$$\frac{b^{(k-1)}_{r_k}(t)}{a^{(k-1)}_{r_{k-1}\,s_{k-1}}(t)} < \frac{b^{(k-1)}_{i_{k-1}}(t)}{a^{(k-1)}_{i_{k-1}\,s_{k-1}}(t)} \qquad (9')$$

$i_k \neq r_k,\ i_k = 1_k, \dots m_k$

Odtod vidimo, da stabilnost indeksa r_k zavisi od elementov matrike A(t) in od elementov vektorja b(t).

Strukturna konstantnost baze $P^{(k)}$ je zagotovljena na $[t_o, \hat{t}_{s_k}) \cap$

$\cap\ [t_o, \hat{t}_{r_k}) = [t_o, \hat{t})$, ki ga imenujmo *območje strukturne konstantnosti* dane baze. To območje ni prazno, če je neprazno vsaj eno od območij $[t_o, \hat{t}_{s_k})$ in $[t_o, \hat{t}_{r_k})$.

Oglejmo si najprej pogoje za nepraznost območij stabilnosti indeksa s_k. Naj pri kakem j (6') preide v enačbe in naj bo $c_j^{(o)}$ (t) $\in R_c$. Za a_{ij} (t) $\in R_a$ stavsoti na levi in desni strani prav tako funkciji z lastnostm iz R_c oz. R_a, če je le k = 1. Za začetno možno bazično rečitev tedaj velja analogija k, Izreku (12) v /1/ in sicer:

IZREK 1: Za $c_j^{(o)}$ (t) $\in R_c$ in a_{ij} (t) $\in R_a$ je vsako možno efektivno vstopno območje $[t_o, \hat{t}_{s_i}]$ (ali območje stabilnosti indeksa vstopnega vektorja) neprazna množica za prvo iteracijo.

Za k > 1 pa je treba upoštevati izražavo za $a^{(k-1)}_{i_{k-1},j}$(t), ki je ulomljena racionalna funkcija funkcij $a^{(p)}_{ij}$(t) za p < k. Odtod vidimo, da Izrek 1 obdrži veljavo za k > 1, če dodatno zahtevamo regularnost vseh $a^{(k-1)}_{i_{k-1},j}$(t). Naj bo ta pogoj izpoljen; potem je leva stran enačbe, ki pripada (6') funkcija, npr. φ_{s_k}(t), ki spada v R_c, in enako desna stran, npr. φ_j(t), tudi spada v R_c. S tem smo dosegli pogoje za dokaz analogije k Izreku 2 v (1) za primer poljubne iteracije in ga tedaj lahko zapišemo takole:

IZREK 1': Za $c_j^{(o)}$ (t) $\in R_c$ in striktno pozitivne $a^{(p-1)}_{r_{p-1},s_{p-1}}$(t) $\in R_a$,

p = 1, . . . k — 1, je vsako možno efektivno vstopno območje (ali območje stabilnosti indeksa s_k vstopnega vektorja) neprazna množica.

Zahteva po striktni pozitivnosti vseh funkcij $a^{(p-1)}_{i_{p-1},s_p}$(t), p = 1, . . . k — 1, kot se da uvideti, zagotavlja končnost vseh kvocientov na levi v (9'), to je končnost vseh minimalnih modificiranih funkcij $\bar{b}_{r_p}$ (t), p = 1, . . . k. Pri izbranem p pa ni treba, da so vse druge funkcije $a^{(p-1)}_{i_{p-1},s_{p-1}}$ (t) striktno pozitivne.

Poiščimo še pogoje za nepraznost območij stabilnosti indeksa r_k. Naj pri kakšem i_k (9') preide v enakost. Za $b^{(o)}$ (t) $\in R_b$ in $a_{ij}^{(o)}$ (t) $\in R_a$ je $\bar{b}^{(o)}$ (t) $\in R_b$, če je le $a_{ij}^{(o)}$ (t) > 0 za vsaj en i in brez ničle v kaki desni okolici točke t = t_o. Tako dobimo analogijo k Izreku 1:

IZREK 2: Za $b^{(o)}$ (t) $\in R_b$ in $a_{ij}^{(o)}$ (t) $\in R_a$ z lastnostjo, da $a_{ij}^{(o)}$ (t) nima ničle in je pozitivna na [o, T], je vsako možno območje stabilnosti indeksa r_k za k = 1 neprazna množica.

Pri k > 1 je treba kot prej upoštevati, da so $b^{(k-1)}_{i_k}$ (t) (tudi za $i_k = r_k$) ulomljene racionalne funkcije, za katere moramo zahtevati regularnost, če naj ostanejo v R_b. Tako dobimo za k > 1 razširjeni izrek:

IZREK 2': Za $b^{(k-1)}_{i_k}$ (t) $\in R_b$ in $a^{(k-1)}_{i_k s_k}$ (t) $\in R_a$ z lastnostjo, da je na [o, T] $a^{(k-1)}_{r_{k-1},s_{k-1}}$ (t) striktno pozitivna, je vsako možno območje $[t_o, \bar{t}_{r_k})$ stabilnosti indeksa r_k, k > 1, neprazna množica.

Z Izrekom 2' in 1' smo zagotovili nepraznost območja $[t_o, \hat{t})$ strukturne konstantnosti baze $\Phi^{(k)}$.

DEFINICIJA: Bazična rešitev $x^{(k)}$ (t), t $\in [t_o, \hat{t})$, je *strukturno stacionarna*, če ji pripada strukturno konstantna baza $\Phi^{(k)}$.

Na ta način smo zagotovili strukturno stacionarnost bazične rešitve pri k-ti iteraciji. Bazična rešitev je možna, če je pripadajoča baza dopustna, tj. če zagotavlja

$$x^{(k)}(t) = [\Phi^{(k)}(t)]^{-1}\, b(t) \geqslant 0 \qquad t \in [t_o, \tilde{t})$$

oziroma (10)

$$b^{(k)}(t) \geqslant 0 \qquad t \in [t_o, \tilde{t})$$

Pogoj (10) je izpolnjen, če je $a^{(k-1)}_{r_{k-1}, s_{k-1}}(t) > 0$ in brez ničle na *območju dopustnosti* $[t_o, \tilde{t}]$ pri tem pa $a^{(k-1)}_{i_{k-1} s_{k-1}}(t) \in R_a$. Tako imamo k Izreku 2 v /1/ torej naslednjo analogijo:

IZREK 3: Za $b^{(k-1)}_{i_{k-1}}(t) \in R_b$ in $a^{(k-1)}_{r_{k-1} s_{k-1}}(t) \in R_a$ z lastnostjo, da je na $[o, T]$ $a^{(k-1)}_{r_{k-1} s_{k-1}}(t) \in R_a$ striktno pozitivna, je vsako območje dopustnosti za k-to možno rešitev neprazna množica.

V nadaljnjem nimamo več mnogo truda, saj definicija statične in dinamične transformacije ostane takšna kot v /1/; istov velja tudi za statično in dinamično bazo. Odtod pa sledi, da na temelju Izrekov 1', 2' in 3 veljajo Izreki 3, 4 in 14 iz (1) tudi za primer $A = A(t) \in R_A$.

Privzemimo sedaj delitev celotnega intervala $[o, T]$ v smislu (24) iz /1/ za k—1. Pogoj dopustnosti baze je izpolnjen v Izreku 26 iz /1/ na vsakem od teh podintervalov, pogoj strukturne konstantnosti baze pa po Izrekih 1' in 2'. Tej delitvi pripada množica $S_k \cap D_k$ in $\overline{V}_k \cap \overline{\overline{V}}_k$ iz /1/. Pogoji strukturne stacionarnosti so izpolnjeni na $S_k \cap V_k \cap \overline{\overline{V}}_k$, ki je unija podintervalov tipa $[t_o, \hat{t}_{s_k}) \cap [t_o, \hat{t}_{r_k}]$; ti pogoji so (6') in (9') in naj bodo pri (k — 1)-vi delitvi izpolnjeni na $\Delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}} \cap \Delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}} = \delta_{\tau_{k-1}} \subset T_k \neq (S_k \cap D_k) \cap (\overline{V}_k \cap \overline{\overline{V}}_k)$. Strukturno konstantnost baze označimo takole

$$\Phi^{(k-1)}(t) = \Phi^{(k-1)}\left(t;\ t^{k-1}_{\{\tau_{k-1}-1\}}\right), \qquad t \in \delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}} \tag{11}$$

in s tem nadomestimo pogoja (27)-2 oz. (51)-2 iz /1/.

Naj bo izpolnjen še pogoj (10) na $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$; če naj eksistira izboljšana bazična rešitev $x^{(k)}(t)$ na tem podintervalu, moramo zahtevati, da je ta rešitev dopustna in strukturno stacionarna, torej

$$b^{(k)}\left(r_{\{\tau_k\}},\ s_k^{(k)};\ t\right) \geqslant 0, \qquad t \in \delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$$

$$\Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}}(t) = \Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}}\left(t;\ t^{(k)}_{\{\tau_{k-1}\}}\right) \qquad t \in \delta^{(k)}_{\tau_k} \tag{12}$$

$$\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}} = \bigcup_{\tau_k} \delta^{(k)}_{\tau_k}$$

odkoder vidimo, da je možno podobno, kot za Izreka 5 oz. 15 iz /1/, dokazati naslednji

IZREK 4: Če na $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$ eksistira strukturno stacionarna bazična možna rešitev $x^{(k-1)}(t)$ problema (2) tako, da so

1) za $b^{(k-1)}\left(r_{\{\tau_{k-1}\}},\ s^{(k-1)}_{k-1};\ t\right) \geqslant 0$ izpolnjeni pogoji Izrekov 25, in 26 iz /1/

2) $\overline{c_j}^{(k-1)}(t) < 0$ za vsaj en nebazični j

potem na $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$ eksistira rešiteve $x^{(k)}(t)$ kot odsekoma strukturno stacionarna bazična možna rešitev, ki prav tako spada v R_b.

Posledica tega izreka je eksistenca končnega zaporeda baz

$$\Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}}(t) = \Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}}\left(t;\ t^{(k)}_{\{\tau_{k-1}\}}\right) \qquad t \in \delta^{(k)}_{\tau_k} \subset \delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$$

z lastnostjo, da se rešitev $x^{(k)}(t)$ izraža v obliki

$$x^{(k)}(t) = \left[\Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}}(t)\right]^{-1} b(t) \tag{13}$$

$$t \in \delta^{(k)}_{\tau_k} \qquad \tau_k = 1, \dots p_k(\tau_1, \dots \tau_{k-1})$$

Prav tako se ohranjajo vse analogije izrekov, ki vsebujejo zgradbo množice bazičnih možnih rešitev za trivialni in netrivialni primer. Izrek 27 v /1/ omogoča tudi analogno obravnavanje eksistence optimalne rešitve.

Vendar pa pri tem nastopi možnost, da zaradi splošnega značaja funkcij $a_{ij}(t)$ lahko pride do neizpolnitve pogoja nenegativnosti bazične rešitve (bodisi optimalne ali ne). To pomeni, da je pogoj*

$$a^{(k-1)}\left(i_k, s^{(k-1)}_{k-1};\ t\right) > 0 \tag{14}$$

izpolnjen za določeni i_k samo na kakem začetnem delu podintervala $\delta^{(k-1)}_{k-1}$. Če so vse funkcije $a^{(k-1)}(i_k, s^{(k-1)}_{k-1};\ t)$ negativne na tem območju, nastopi primer trivialne rešitve, ki smo ga že obravnavali. Če so nekatere funkcije striktno pozitivne, druge pa striktno negativne na tem območju, nastopi primer, ki smo ga obravnavali z izreki o eksistenci netrivialne rešitve za primer $A = \text{const}$. Če je pogoj (14) izpolnjen n. pr. za indeks $i_k = r_k$, je bila v primeru $a_{ij}(t) = \text{const}_{ij}$ rešitev $x^{(k)}(t)$ zagotovljena kot možna na vsem $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$, vsaj kot odsekoma stacionarna. Za $t = t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}}$ je funkcija na levi v (14) enaka nič, nato pa negativna; s tem postane $\overline{b}^{(k)}\left(r^{(k)}_{\{\tau_k\}}, s_k^{(k)};\ t\right) < 0$ in pripadajoča rešitev $x^{(k)}(t)$, čeprav še bazična in strukturno stacionarna, nemožna. Izboljšana rešitev $x^{(k)}(t)$ je

* Pri tom smo indekse pisali v oklepajih.

možna le na $[t^{(k-1)}_{\{\tau_{k-1}-1\}}, t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}})$; na komplementarnem delu k $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$ pa $x^{(k)}(t)$ ne eksistira, temveč eksistira le $x^{(k-1)}(t)$. Eksistenčno področje netrivialne rešitve $x^{(k)}(t)$ se tedaj skrči, nadaljnih netrivialnih rešitev $x^{(k+1)}(t)$ na komplementarnem delu ni. Optimalna rešitev je na komplementarnem delu kar enaka $x^{(k-1)}(t)$, ne glede na to, ali je morda pri tem $\bar{c}_j(t) < 0$ še za kak j. Po dosedanjem postopku smo zagotavljali nenegativnost rešitve na vsakem podintervalu vsaj delitev z nižjim indeksom kot je k — 1. Zapišimo rešitev $x^{(k)}(t)$ v komponentah

$$x_{i_k}^{(k)}(t) = x_{i_{k-1}}^{(k-1)}(t) - \frac{a^{(k-1)}_{i_{k-1},s_{k-1}}}{a^{k-1}_{r_{k-1},s_{k-1}}(t)}\, x_{r_{k-1}}^{(k-1)}(t), \qquad i_{k-1} \neq r_{k-1}$$

$$x_{r_{k-1}}^{(k)}(t) = \frac{x_{r_{(k-1)}}^{(k-1)}(t)}{a^{(k-1)}_{r_{k-1},s_{k-1}}(t)}$$

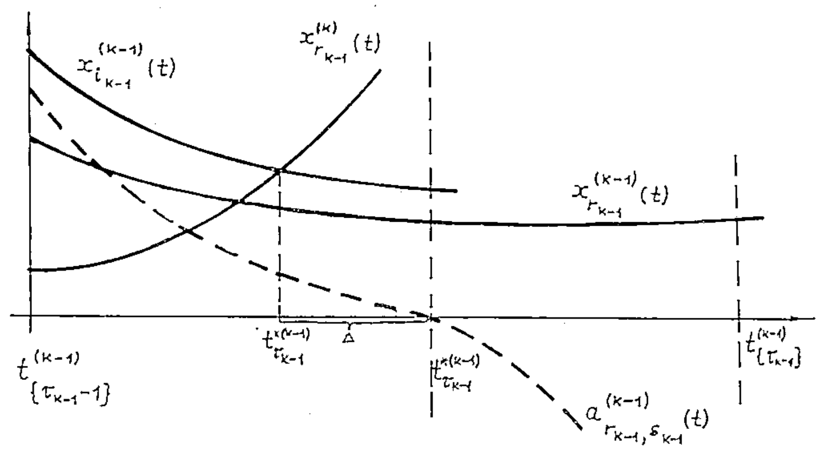
Ker je $x_{r_{k-1}}^{(k-1)}(t) \geqslant 0$ na celem $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$, je $x_{r_{k-1}}^{(k)}(t)$ z lihim polom v $t = t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}}$, za $t > t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}}$ pa striktno negativna. Nastopita dve vprašanji:

1) ali je rešitev $x_{r_{k-1}}^{(k)}(t)$ v levi okolici točke $t^{*(k-1)}$ takšna, da eksistira kot strukturno stacionarna z bazo, kot v levem krajišču intervala $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$?

2) ali eksistira kakšna bazična možna netrivialna rešitev desno od točke $t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}}$?

Na ta vprašanja hitro najdemo odgovor, če upoštevamo razmere, ki vladajo med modificiranimi funkcijami v neposredni levi okolici te točke, in jih ponaziramo takole (videti sliko na slednji strani).

Ker je funkcija $x_{r_{k-1}}^{(k)}$ nezvezna druge vrste v zadostni majhni levi okolici točke $t^{*(k-1)}$, izgubi značaj minimalne modificirane funkcije; tedaj nastopa permutacija indeksa $r_{k-1} \to r'_{k-1}$ na že znani način. V levi okolici omenjenega pola eksistira bazična možna rešitev, ki je strukturno stacionarna in z drugačo bazo, kot pa eksistira v $t = t^{(k-1)}_{\{\tau_{k-1}-1\}}$



Če je desno od pola možno najti kako drugo funkcijo $a^{(k-1)}_{r_{k-1},s'_{k-1}}(t) > 0$, $s'_{k-1} \neq s_{k-1}$, smo s tem dosegli dopustno bazo, ki pa ne daje gradientnega izboljška namenski fukciji v k-tem koraku. Indeks s_{k-1} je bil namreč določen pri kriteriju (4), indeks s'_{k-1} pa izpolnjuje le pogoj $\bar{c}_{s'_{k-1}}(t) < 0$,

Takšen korak v nadaljnjem imenujemo *subiteracijo,* ustrezno bazično možno rešitev po *subiteracijsko* možno rešitev $x^{(k)}(t)$, $t \in [t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}}, t^{(k-1)}_{\{\tau_{k-1}\}})$. Če pa takšne subiteracijske rešitve ni na celem delu desno od pola, netrivialna bazična možna rešitev $x^{(k)}(t)$ ne eksistira na tem delu. Če se posreči najti kakšno subiteracijsko rešitev na kakem levem delu področja $[t^{*(k-1)}_{\tau_{k-1}}, t^{(k-1)}_{\{\tau_{k-1}\}})$, uporabimo to rešitev kot bazično možno rešitev s pripadajočo bazo, ki jo znamo najti.

Ugotovili smo, da privzem takšne matrike A (t), ki vsebuje tudi funkcije $a_{ij}(t)$, ki vodijo do minimalnih modificiranih funkcij z ničlami lihega reda v točkah spremembe baze (preklopov upravljanja), ne zahteva bistvenih modifikacij ekistenčnih izrekov za rešitev problem pri konstantni matriki, če želimo dokazati eksistenco rešitve problema (2). Zaradi omejenega prostora teh sprememb tudi ne bomo vključevali v algoritmično shemo za reševanje problema (2).

Primljeno: 14. 5. 1981
Prihvaćeno: 15. 7. 1981

LITERATURA

/1/ V. Rupnik, *Zvezno dinamično linearno programiranje;* EPOK, Založba Obzorja, Maribor, 1978.

THE EXISTENCE OF FEASIBLE AND OPTIMAL SOLUTIONS OF A CONTINUOUSLY VARIABLE DYNAMIC LINEAR PROGRAM IN A GENERALIZED FORM

Viljem RUPNIK

Summary

We first start with problem (1) where $b(t)$, $c(t)$ and $x(t)$ belong to R_b, R_c and X. We assume that R_b and R_c are classes of uniform bounded continuous and at least once differentiable real value functions, where class R_b must contain non-negative functions only. Matrix A is a real constant matrix and, therefore, X is a class of uniform bounded and at least piecewise continuous real functions defined on $[0, T]$. The existence theorems for (1) are given in /1/.

This paper deals with a generalization of (1) so as to admit $A = A(t)$, where the components of it are uniform bounded continuous functions having at least a first continuous derivative. Thus we arrive at (2).

The definition of a feasible solution of (2) is the same as for (1), but the definition of its constant structure breaks down. We therefore define a basis (of a solution) having a constant structure *over region $(t_o, \hat{t})$, $[t_o, \hat{t})$ is defined through stability conditions (4) and (7). Theorem 1 asserts if it consists of one and the same basic vectors on that region then the region $[t_o, \hat{t}_{sk})$, on which index s_k is stable, is not empty. A similar assertion is given in Theorem 1 for region $[t_o, \hat{t}_{r_k})$, which is a stability region for index r_k. Both indexes appear in the simplex algorithm due to Dantzig.*

A pair of theorems, as above, helps us to prove that each stability region of index r_k for $k = 1$ is a non-empty set, if $b^{(o)}(t) \in R_b$ and $a^{(o)}_{ij}(t) \in R_A$ provided that $a^{(o)}_{ij}(t)$ has no zero on $[o, T]$ and being positive there (Theorem 2). A similar result is given in Theorem 2' for the stability region of index s_k, $k > 1$.

Furthermore, we define a basic solution $x^{(k)}(t)$ as stationary with respect to its structure, if it belongs to a basis which is constant with respect to the structure. Now, the most important is Theorem 3, which says that a region of feasibility for the feasible solution in the k-th iteration is not empty, if

$$b^{(k-1)}_{i_{k-1}}(t) \in R_b$$

$$a^{(k-1)}_{r_{k-1}s_{k-1}}(t) \in R_A \text{ and } a^{(k-1)}_{r_{k-1}s_{k-1}}(t) > o$$

From now on we have to exploit the theory of dynamic linear continuous programming as given in Reference /1/. The whole interval

$[o, T]$ is going to be split into $\delta^{(k)}_{\tau_k}$ for which the conditions (12) should be satisfied. The basic existence theorem is given by

Theorem 4: If on $\delta^{(k-1)}$ exists a basic feasible solution, stationary with respect to its structure, which solves problem (2) such that

1) for $b^{(k-1)}(\tau^{(k-1)}_{\{\tau_{k-1}\}}, s^{(k-1)}_{k-1}; t) \geqslant o$ the conditions for non-empty subsets of $[o, T]$ are fulfilled

2) $\bar{c}_j^{(k-1)}(t) < 0$ for at least one non-basic index j, then on $\delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$ exists a solution $x^{(k)}(t)$ as basic feasible solution which is piecewise stationary with respect to its structure, and this solution also belongs to R_b.

The consequence of this theorem is an existence of a finite sequence of basis

$$\Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}} \quad t() = \Phi^{(k)}_{\{\tau_k\}} \quad (t;\ t^{(k)}_{\{\tau_{k-1}\}}), \quad t \in \delta^{(k)}_{\tau_k} \subset \delta^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}$$

with the property that the k-th feasible solution $x^{(k)}(t)$ has a form (13). A trivial step is needed to arrive at an optimal solution to the problem (2).

/1/ V. Rupnik, *Zvezno dinamično linearno programiranje*, EPOK, Založba Obzorja, Maribor, 1978.