nju tih supstituta. Peto, oslobođena sredstva mogu da budu ušteđena tj. izvučena iz sfere potrošnje.

Samo dva poslednja rešenja vode poboljšanju platnog bilansa, ali ona zahtevaju posebnu analizu. Štednja, kao što je već napred bilo pokazano, pre dovodi do smanjenja izvoznih mogućnosti nego do smanjenja uvoza, tako da preostaje samo proizvodnja uvoznih supstituta koja se može povoljno odraziti na platni bilans. Supstitucija uvoza kao rezultat ograničenja uvoza može da ankuražira proizvodnju neesencijalnih proizvoda, jer su upravo takvi proizvodi osnovna oblast uvozne kontrole i zato visoko profitabilni. Ostaje, dakle, povećanje izvoza kao jedino teoretski dokazano rešenje problema deviznog jaza, jer atakiranje na uvoz nije prihvatljiva alternativa, barem ne u sektoru input-importa koji je u jugoslovenskom slučaju u velikoj meri odgovoran za punije korišćenje proizvodnih potencijala pa, prema tome, i za višu stopu porasta izvoza.

Institut ekonomskih nauka, Beograd

Žarko MRKUŠIĆ

O JEDNOM PARADOKSU U LINEARNOM PROGRAMIRANJU

Posljednji broj časopisa »Operations Research« iz 1970. godine donio je interesantnu bilješku A. Charnesa i suradnika [1] o nekim greškama Hadleya i Simmonarda u njihovim udžbenicima iz linearnog programiranja »Linear Programming« odnosno »Programmation linéaire«, koji su izašli iz štampe iste godine (1962), prvi u Readingu (Massachusetts) a drugi u Parizu. U bilješci je pokazano kako je Hadley (a slično i Simmonard) nekorektno tretirao jedan problem distribucije a samo je natuknuto kako treba prići rješavanju tog problema. Naknadno sam dobio od profesora Charnesa publikaciju [2] u kojoj sam našao sve pojedinosti o njegovom pristupu pa sam sada u mogućnosti da potpuno osvijetlim taj problem. Problem o kome je riječ malo se razlikuje od klasičnog problema distribucije, ali iz te naizgled nedužne razlike proizlaze neka paradoksalna svojstva rješenja. Radi se, naime, o slijedećem problemu:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i, \quad (i = 1,2,\ldots, m) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad (j = 1,2, \ldots, n) \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0. \tag{4}$$

Takvi problemi imaju ekonomski smisao. U njima se zahtijeva da se otpremi bar količina robe a_i iz ishodišta i te da se dopremi bar količina robe b_j u odredište j. Prvi zahtjev može doći zbog ograničenih mogućnosti stokiranja robe u ishodištima. Treba primijetiti da do sada nije bio zabilježen nijedan slučaj praktične primjene modela (1) — (4), bar koliko je nama poznato. Razlog je vjerojatno u tome što nije bio pri ruci prikladan algoritam po kome bi se riješio takav problem. Hadleyeva knjiga upućuje na jedan algoritam koji nije valjan, kako ćemo sada pokazati.

U 9. poglavlju svoje knjige, na str. 327 u zadatku 26 Hadley upućuje na zaključak da se za $c_{ij} \geq O$ može dokazati kako optimalno rješenje drži znak jednakosti u ograničenjima (2) ako je $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$ odnosno u ograničenjima (3) ako je $\sum_i a_i \leq \sum_j b_j$. Iz toga bi slijedilo, prema onome sa str. 313, da se problem može riješiti neznatnom izmjenom u metodi MODI. Naime, prema Hadleyu, u slučaju kad donja ograda na ukupnu ponudu nije manja od donje ograde na ukupnu potražnju, tj. $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$ problem (1) — (4) se svodi na ovaj:

$$(5) \qquad \min \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$(6) \qquad \sum_j x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$(7) \qquad \sum_i x_{ij} \geq b_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(8) \qquad x_{ij} \geq 0.$$

Da se konvertira skup uvjeta (7) u skup jednadžbi, treba uvesti dodatne varijable $x_{m+1,j} \geq 0$ za svako j tako da je

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - x_{m+1,j} = b_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

a odatle

$$(10) \qquad -\sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1} \leq 0\,.$$

Sada se mogu uvjeti (6) i (7) pisati ovako:

$$(11) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$(12) \qquad -\sum_{j=1}^{m} x_{m+1\; j} = a_{m+1}$$

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - x_{m+1,j} = b_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dual tog problema jest

$$(14) \qquad \max \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i\, u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\, v_j \right)$$

(15) $$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$$

(16) $$-u_{m+1} - v_j \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Prema tome, metoda M O D I je izmijenjena samo utoliko što je $z_{m+1,j} = -u_{m+1} - v_j$ pa je $c_{m+1,j} - z_{m+1,j} = u_{m+1} + v_j$.

Slično se postupa u slučaju $\sum_j b_j \geq \sum_i a_i$. I tu se pojavljuju negativne dodatne varijable.

Charnes i suradnici su oborili taj pristup rješavanju problema (1) — (4) na jednostavan način. Oni su konstruirali tri kontraprimjera za slučajeve $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ i $\sum_i a_i < \sum_j b_j$. Za prvi slučaj dali su primjer koji je prikazan u ovoj tabeli:

				a_i
	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{2}$	5
	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 4	$\boxed{1}$ 2	6
b_j	2	7	1	

Programu u tabeli odgovaraju ukupni troškovi $T = 27$. Testiranje programa po Hadleyevom algoritmu provodi se na slijedeći način:

				a_i	u_i
	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{2}$ 5	5	0
	$\boxed{6}$ 1	$\boxed{5}$ 4	$\boxed{1}$ 2	6	4
	$\boxed{0}$ 4	$\boxed{0}$ 4	$\boxed{0}$ -1	-1	3
b_j	2	7	1		
v_j	1	1	-3		

To je prvo i trebalo bi, po Hadleyu, biti i optimalno rješenje. No tako nije. Evidentno je da je bolje rješenje sadržano u ovoj tabeli:

				a_i
	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ 7	$\boxed{2}$	5
	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 6	6
b_j	2	7	1	

Naime, to rješenje zahtijeva troškove od samo $2 + 7 + 6 = 15$ novčanih jedinica. Solucija iz posljednje tabele ima paradoksalno svojstvo: za više tereta — manje troškova.

Pošto su na taj način oborili Hadleyev pristup, Charnes i suradnici su formulirali jedan problem čiji su specijalni slučajevi problemi (1) — (4) i (5) — (8). Dovoljno je dodati uvjet

$$\sum_{i,j} x_{ij} \leq N \tag{17}$$

problemu (1) — (4) da se dobije taj općenitiji problem. Kad je N dovoljno velik broj, recimo

$$N = m\ [\max_i (\ a_i, \sum_j b_j)]\ , \tag{18}$$

gornja ograda (17) je previsoko postavljena, pa se prošireni problem (1), (2), (3), (4), (17) svodi na originalni (1) — (4). Ako je pak $N = \sum_i a_i \geq \sum_j b_j$, prošireni problem reducira se na problem (5) — (8).

Zatim je Charnes sa suradnicima dokazao da je problem (1), (2), (3), (4) i (17) ekvivalentan ovome problemu:

$$\min \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}\, x_{ij} \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i + N_I = a'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j + N_J = b'_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{i\,,\,n+1} = m\,N_I = b'_{n+1} \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j + n\,N_J - \sum_{i=1}^{m} a_i = a'_{m+1} \tag{23}$$

$$(24) \qquad O \leq x_{i,\,n+1} \leq N_I, \quad (i = 1, 2, \ldots, m + 1)$$

$$(25) \qquad O \leq x_{m+1,\,j} \leq N_J, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(26) \qquad x_{ij} \geq 0, \; (i = 1,2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n),$$

gde je $N_I = N - \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad N_J = N - \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad c_{i,\,n+1} = 0 =$

$= c_{m+1,\,j}$ za $i = 1, 2, \ldots, m + 1$ odnosno $j = 1, 2, \ldots, n$.

U ovome modelu dodatne varijable su odozgo omeđene. On ima jedno (fiktivno) ishodište i jedno (fiktivno) odredište više od orginalnog modela (1) — — (4). Radi se inače o običnom »kapacitarnom« problemu distribucije u kome je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji, to jest:

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{m+1} a'_i = \sum_{j=1}^{n+1} b'_j \,.$$

Charnes i suradnici dokazali su da je rješenje $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ moguće (optimalno) za problem (1), (2), (3), (4) i (17) ako i samo ako je rješenje $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$;

$$x_{i,\,n+1} = a'_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}, \; (i = 1, 2, \ldots, m) \; ; \; x_{m+1\;j} = b'_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij},$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n) \text{ i } x_{m+1,\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

moguće (optimalno) za problem (19) — (26).

Ako to primijenimo na rješenje iz prve tabele i N izračunamo po (18) pa dobijemo da je $N = 20$, imamo rješenje ekvivalentnog problema u ovoj tabeli:

					a'_i	u_i
	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ + 3	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{0}$ − 9	14	0
	$\boxed{6}$ 1	$\boxed{5}$ − 4	$\boxed{1}$ + 2	$\boxed{0}$ 9	15	4
	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ − 9	$\boxed{0}$ + 0	29	3
b'_j	12	17	11	18		
V_j	1	1	−3	−3		

Ovdje imamo degenerirano bazično rješenje, jer je samo 5 baznih varijabla različito od nule, tj. $\bar{x}_{11} = 2$, $\bar{x}_{12} = 3$, $\bar{x}_{22} = 4$, $\bar{x}_{23} = 2$, $x_{33} = 9$. Naime, kao što je poznato, (vidjeti npr. Lj. Martić [3], str. 235), varijable jednake svojim gornjim ogradama jesu nebazične. U ovom rješenju takve su varijable $x_{31} = x_{32} = 10$ i $x_{14} = x_{24} = 9$. Test rješenja smo proveli tako da smo uzeli da je $x_{34} = 0$ vrijednost bazične varijable. Rješenje nije optimalno, jer je $\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 3$. Naime, u optimalnom rješenju, $x_{ij} = d_{ij}$, gdje je d_{ij} gornja ograda, implicira $\bar{c}_{ij} \leq 0$. Rješenje smo izmijenili, kako je u tabeli prikazano. Našli smo minimum vrijednosti bazičnih varijabli koje su označene sa minusom, tj. min (9, 4, 9) $=$ 4. Taj minimum smo oduzeli od tako označenih varijabli a dodali smo ga preostalim u zatvorenom putu, koje nose oznaku plus. Novo rješenje sadržano je u ovoj tabeli:

					a_i	u_i
	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ 7	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{0}$ 5	14	0
	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{5}$ 3	$\boxed{1}$ 6	$\boxed{0}$ 9	15	1
	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{0}$ 4	29	0
b_j	12	17	11	18		
v_j	1	1	0	0		

To rješenje je optimalno, jer je kriterij optimalnosti zadovoljen za svaku varijablu iz triju grupa, tj. za $0 < x_{ij} < d_{ij}$ je $\bar{c}_j = 0$, za $x_{ij} = 0$ je $\bar{c}_{ij} \geq 0$ i za $x_{ij} = d_{ij}$ je $\bar{c}_{ij} \leq 0$. Prema tome, rješenje Charnesovog kontraprimjera: $x_{11} = 2$, $x_{12} = 7$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 0 = x_{22}$ i $x_{33} = 6$ jest doista optimalno rješenje.

Fakultet ekonomskih nauka,
Zagreb

Ljubomir MARTIĆ

LITERATURA

[1] A. Charnes, F. Glover and D. Klingman, »A Note on a Distribution Problem«, *Operations Research,* Vol. 18, No. 6, 1970, str. 1213—1216.

[2] A. Charnes, F. Glover and D. Klingman, »The Lower Bounded and Partial Upper Bounded Distribution Model«, *Applied Mathematics for Management,* No. AMM-7, WP 69—20, University of Texas, Austin.

[3] Lj. Martić, *Matematičke metode za ekonomske analize,* II svezak, Zagreb, 1966.