EKONOMSKA ANALIZA
2, XXI (1987), 243—257

ISPODGODIŠNJE UKAMAĆIVANJE

*Rudolf SCITOVSKI**

1. UVOD

Do nedavno su banke na ispodgodišnje (tromjesečno, polugodišnje) oročena sredstva građana obračunavale kamatu primjenom relativnog kamatnjaka. To je dovelo do toga da je osoba koja bi npr. tromjesečno oročavala sredstva (ne podižući kamate) dobila nakon godinu dana više nego osoba koja bi oročila sredstva na godinu dana. Ova nelogičnost riješena je primjenom tzv. konformnog kamatnjaka za ispodgodišnje ukamaćivanje. Naime, za zadanu godišnju kamatnu stopu može se izračunati odgovarajući tromjesečni konformni kamatnjak (vidi t. 2.2). On ima svojstvo da njegovom sukcesivnom primjenom nakon svaka tri mjeseca, nakon godinu dana stanje glavnice bude isto kao da se primijenio godišnji kamatnjak. Međutim, ovdje treba naglasiti da se prilikom ispodgodišnjeg obračunavanja kamata ne mijenja kamatnjak! Kamatnjak se uvijek određuje kao godišnji, a njegovo preračunavanje na ispodgodišnji termin primjenom konformnog kamatnjaka je očigledno »umjetni« postupak koji samo zamagljuje suštinu.

Prilikom obračuna otplate zajma ispodgodišnjim anuitetima u našim bankama postoji pravo šarenilo loših rješenja, koja po pravilu idu na štetu korisnika zajma a pogreške koje nastaju zbog lošeg obračuna su toliko velike da slobodno možemo govoriti o nepoštivanju uvjeta pod kojima je zajam odobren.

Međutim, što je još važnije sa stanovišta vođenja monetarne i ekonomske politike, ovakav način obračuna kamata otežava i bankama i zemlji u cjelini da vodi egzaktnu politiku realnih kamata,

Postojanje visoke inflacije još više potiče ubrzano kolanje novca, što nezaobilazno vodi ka potrebi primjene ispodgodišnjeg ukamaćivanja. Zbog toga ovom problemu treba posvetiti dužnu pažnju.

U radu je predložen korektan način obračuna prilikom ispodgodišnjeg ukamaćivanja, koji otklanja sve navedene anomalije, a primjenom savremenih računskih strojeva računski postupak znatno pojednostavljuje. Ovaj pristup dalje je primjenjen na definiranje korektnog postupka prilikom otplate zajma jednakim ispodgodišnjim anuitetima. Pokazano je, također, da zbog visokih kamatnih stopa dosadašnji način

* Ekonomski fakultet, Osijek.

obračuna kamata u našim bankama (koji se uglavnom zasniva na primjeni relativnog kamatnjaka) obavezno dovodi do grubih pogreška i nesporazuma.

2. ISPODGODIŠNJE UKAMAĆIVANJE

Vrijednost glavnice C_0 uz godišnji kamatnjak p nakon n godina može se izračunati po formuli (vidi npr. [1], [2], [3], [5], [6]):

$$C_n = C_0 r^n, \quad r = 1 + \frac{p}{100} \tag{1}$$

Specijalno za n = 1 dobivamo stanje kapitala nakon jedne godine:

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \tag{2}$$

Nadalje, neka je m broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu (npr. za m = 2 to su polugodišta, za m = 4 to su kvartali, za m = 12 to su mjeseci itd.) kao što je prikazano na slici 1.

Slika 1.

Može se postaviti ovakav problem:

— koliko treba biti stanje kapitala C_0 uz godišnji kamatnjak p na kraju prvog od m podintervala, tako da (ispodgodišnjim ukamaćivanjem na kraju svakog od m podintervala) na kraju godine dobijemo iznos (2)?

Odgovor je vrlo jednostavan: stanje glavnice C_0 uz godišnji kamatnjak p na kraju prvog od m podintervala iznosi

$$C_{1/m} = C_0 r^{1/m}, \; r = 1 + \frac{p}{100}. \tag{3}$$

Naime, ako se na glavnicu $C_{1/m}$ ponovo primijeni formula (3), na kraju drugog od m podintervala imat ćemo:

$$C_{2/m} = C_{1/m} r^{1/m} = C_0 r^{2/m}.$$

Lako se može vidjeti da sukcesivnom primjenom formule (3) na kraju m-tog podintervala (što se podudara sa krajem godine) dobivamo iznos (2).

Stanje glavnice C_0 na kraju k-tog podintervala je

$$C_{k/m} = C_0 r^{k/m}, \tag{4}$$

gdje k može biti manji ili veći od m. Primijetimo da je formula (4) generalizacija poznate formule (1) za slučaj da n ne predstavlja cijeli broj godina (eksponent je racionalan broj).

2.1. *Pogrešna primjena relativnog kamatnjaka*

U formuli (3) uvedimo supstituciju $p^* = p/100$ a $C_{1/m}$ shvatimo kao funkciju od p^* i zbog jednostavnosti pisanja označimo je sa C:

$$C(p^*) = C_0\ (1 + p^*)^{1/m}. \tag{5}$$

Razvojem ove funkcije u Taylorov red u okolini nule, dobivamo:

$$C(p^*) = C_0 + C_0 \frac{1}{m} p^* + \frac{1}{2} C''(0)\ p^{*2} + \ldots \tag{6}$$

Ako je p^* maleno, tako da su potencije p^{*2}, p^{*3},... zanemarive, onda se u razvoju (6) možemo zaustaviti na linearnom članu, pa dobivamo linearnu aproksimaciju funkcije C:

$$c(p^*) = C_0 + C_0 \frac{1}{m} p^*. \tag{7}$$

Desnu stranu od (7) možemo zapisati u obliku

$$C_{1/m} = C_0\ (1 + \frac{p/m}{100}). \tag{8}$$

Izraz p/m nazivamo relativni ispodgodišnji kamatnjak, a formula (8) daje približnu vrijednost glavnice C_0 na kraju prvog podintervala uz pretpostavku da je godišnji kamatnjak p malen.

Sukcesivnom primjenom formule (8) nakon k podintervala dobivamo:

$$C_{k/m} = C_0\ (1 + \frac{p}{100\ m})^k, \tag{9}$$

a nakon n godina ($k = m \cdot n$) dobivamo:

$$C_n = C_0\ (1 + \frac{p}{100\ m})^{mn}. \tag{10}$$

P r i m j e r 1. Glavnica $C_0 = 1.000$.— din. leži u banci 10 godina. Usporedit ćemo način obračuna kamata prema formuli (10) i egzaktnoj formuli (4) pri relativno maloj i pri relativno velikoj kamatnoj stopi.

U tabeli 1. prikazano je stanje glavnice nakon 10 godina uz godišnje ($m = 1$), polugodišnje ($m = 2$), kvartalno ($m = 4$) i mjesečno ($m = 12$) ukamaćivanje primjenom godišnjih kamatnjaka $p_1 = 6\%$ i $p_2 = 60\%$. Očigledno je da se pogreške nastale primjenom relativnog kamatnjaka (formula (10)) u slučaju relativno velike kamatne stope nikako ne mogu tolerirati.

Tabela 1. *Ispodgodišnje ukamaćivanje*

	p = 6%			p = 60%		
način ukamaćivanja	prema (10)	prema (4)	odst. u %	prema (10)	prema (4)	odst. u %
godišnje	1 791	1 791	0	109 951	109 951	0
polugodišnje	1 806	1 791	0.84	190 050	109 951	73
kvartalno	1 814	1 791	1.28	267 864	109 951	144
mjesečno	1 819	1 791	1.56	348 912	109 951	217

Iz prethodnog razmatranja vidljivo je da ispodgodišnji relativni kamatnjak treba koristiti vrlo oprezno, a da njegova primjena u slučaju visokih kamatnih stopa (što je kod nas vrlo čest slučaj) više nema nikakvog teoretskog opravdanja.

2.2. *Primjena konformnog kamatnjaka*

Do nedavno su građani u našim bankama uz visoke kamate tromjesečno mogli oročavati sredstva, a banka im je obračun kamata obavljala na bazi relativnog kamatnjaka. Uskoro se primijetilo da osoba koja oročava sredstva svaka tri mjeseca dobiva više nego osoba koja oročava sredstva na godinu dana. Ovo je trivijalna posljedica pogrešne primjene relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka (vidi t. 2.1).

Ova nelogičnost rješena je u praksi uvođenjem tzv. konformnog kamatnjaka.

Može se postaviti ovakav problem:

— koliki treba biti ispodgodišnji kamatnjak p', tako da nakon n godina, pri ukamaćivanju nakon svakih $1/m$ dijelova godine, stanje glavnice C_0 bude isto kao da se primijenio godišnji kamatnjak p?

Matematička formulacija glasi:

$$C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^{mn} = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n},$$

odakle dobivamo poznati izraz za konformni kamatnjak:

$$p' = 100\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right) \tag{11}$$

(vidi npr. [3]).

U tabeli 2. vide se razlike između odgovarajućih relativnih i konformnih kamatnjaka za godišnju kamatnu stopu $p = 60\%$.

Tabela 2. *Usporedba relativnog i konformnog kamatnjaka*

način ukamaćivanja	relativni kamatnjak	konformni kamatnjak
polugodišnje	30	26.5
kvartalno	15	12.47
mjesečno	5	4

Primjena konformnog kamatnjaka rješava problem nelogičnosti i nepravednosti prilikom ispodgodišnjeg oročavanja sredstava, ali zamagljuje suštinu stvari.

Naime, prilikom tromjesečnog oročavanja sredstava ne mijenja se kamatnjak! Kamatnjak se uvijek definira kao godišnji! Primjenom korektne formule (4) uz $m = 4$, dobit ćemo stanje kapitala nakon k tromjesečja.

Primjer 2. Iznos $C_0 = 100.000$.— din. oročava se tromjesečno bez podizanja kamata uz godišnju kamatnu stopu $p = 60\%$ primjenom formule (4):

— nakon 1. kvartala stanje je 112.468.— din.
— nakon 2. kvartala stanje je 126.491.— din.
— nakon 3. kvartala stanje je 142.262.— din.
— nakon 4. kvartala stanje je 160.000.— din.

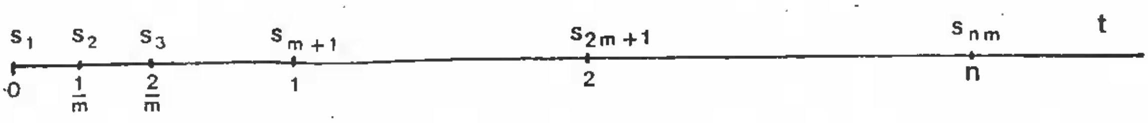
Primjetimo da bi se isti rezultati dobili i sukcesivnom primjenom odgovarajućeg konformnog kamatnjaka $p' = 12.46827$.

3. KONAČNA VRIJEDNOST VIŠE PERIODIČNIH SVOTA

Neka je:

n — broj godina,
m — broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu,
p — godišnji kamatnjak (kamatna stopa)

Treba izračunati konačnu vrijednost (vrijednost u trenutku $t = n$) periodičnih svota koje se uplaćuju na početku svakog podintervala tokom n godina uz godišnji kamatnjak p, odnosno dekurzivni kamatni faktor r (vidi sliku 2).



Slika 2.

Pri tome je:

$S_1\, r^n$ — vrijednost svote S_1 na kraju n-te godine
$S_2\, r^{n-1/m}$ — vrijednost svote S_2 na kraju n-te godine

. . . .

$S_k\, r^{n-\frac{k-1}{m}}$ — vrijednost svote S_k na kraju n-te godine

. . . .

$S_{nm}\, r^{1/m}$ — vrijednost svote S_{nm} na kraju n-te godine

Na kraju n-te godine stanje kapitala je

$$C_n = \sum_{k=1}^{nm} S_k\, r^{n-\frac{k-1}{m}} \tag{12}$$

Ako pretpostavimo da je $S_1 = S_2 = \ldots = S_{nm} = S$,[1] onda se (12) može pojednostaviti zbog prisustva konačnog geometrijskog reda sa kvocijentom $r^{1/m}$. Naime, vrijedi:

$$C_n = S \sum_{k=1}^{n\cdot m} r^{n-\frac{k-1}{m}} = S\, r^{1/m}\, \frac{r^{\frac{n\cdot m}{m}} - 1}{r^{1/m} - 1},$$

odnosno

$$C_n = S\, r^{1/m}\, \frac{r^n - 1}{r^{1/m} - 1} \tag{13}$$

Specijalno za m = 1 (godišnje uplate!) dobivamo poznatu formulu (vidi npr. [1], [3], [5]) za konačnu vrijednost n jednakih periodičnih svota S plativih na početku svake godine.

Na sličan način može se dobiti i formula za konačnu vrijednost više jednakih periodičnih svota plativih krajem svakog podintervala tokom n godina uz godišnji kamatnjak p, odnosno dekurzivni kamatni faktor r:

---

[1] U slučaju da su svote S_k varijabilne (npr. linearne funkcije od k), govorimo o varijabilnim anuitetima. Za slučaj m = 1 više o tome može se vidjeti u [3] i [4], dok bi se za proizvoljni m trebalo provesti odgovarajuća proračunavanja.

$$C_n^* = S \frac{r^n - 1}{r^{1/m} - 1} \tag{14}$$

Specijalno za m = 1 (godišnje uplate!) iz (14) dobivamo formulu (vidi npr. [1], [3], [5]) za konačnu vrijednost n jednakih periodičnih svota S plativih na kraju svake godine.

4. SADAŠNJA VRIJEDNOST VIŠE PERIODIČNIH SVOTA

Neka je:
n — broj godina,
m — broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu,
p — godišnji kamatnjak (kamatna stopa).

Treba izračunati sadašnju vrijednost (u trenutku t = 0 na slici 2) periodičnih svota koje se uplaćuju na početku svakog podintervala tokom n godina uz godišnji kamatnjak p, odnosno uz dekurzivni kamatni faktor r (vidi sliku 2). Pri tome je:

S_1 — vrijednost svote S_1 u trenutku t = 0
$S_2 r^{-1/m}$ — vrijednost svote S_2 u trenutku t = 0
. . . .
$S_k r^{-\frac{k-1}{m}}$ — vrijednost svote S_k u trenutku t = 0
. . . .
$S_{nm} r^{-n+1/m}$ — vrijednost svote S_{nm} u trenutku t = 0

Prema tome sadašnja vrijednost (tj. vrijednost u trenutku t = 0) svih ovih periodičnih svota iznosi

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n \cdot m} S_k r^{-\frac{k-1}{m}} \tag{15}$$

Ako pretpostavimo da je $S_1 = S_2 = \ldots = S_{nm} = S$,[2] onda se (15) može pojednostaviti zbog prisustva konačnog geometrijskog reda sa kvocijentom $r^{-1/m}$. Naime, vrijedi:

$$C_0 = S \sum_{k=1}^{n \cdot m} r^{\frac{k-1}{m}} = S \frac{r^{-\frac{n \cdot m}{1}} - 1}{r^{1/m} - 1},$$

što se može zapisati kao

[2] U slučaju da su svote S_k varijabilne (npr. linearne funkcije od k), govorimo o varijabilnim anuitetima. Za slučaj m = 1 više o tome može se vidjeti u [3] i [4], dok bi se za proizvoljni m moralo provesti odgovarajuća proračunavanja.

$$C_0 = S\, r^{1/m} \frac{r^n - 1}{r^{1/m} - 1} \tag{16}$$

Specijalno za m = 1 (godišnje uplate!) dobivamo poznatu formulu (vidi [1], [3], [5]) za sadašnju vrijednost n jednakih periodičnih svota S plativih na *početku svake godine.*

Na sličan način može se dobiti i formula za sadašnju vrijednost više jednakih periodičnih svota plativih krajem svakog podintervala tokom n godina uz godišnji kamatnjak p, odnosno dekurzivni kamatni faktor r:

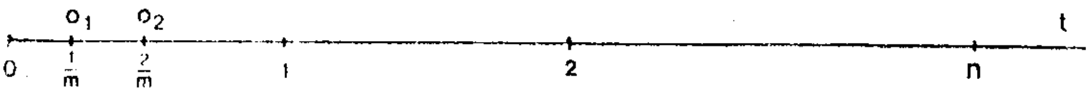
$$C_0^* = S \frac{r^n - 1}{r^n (r^{1/m} - 1)} \tag{17}$$

Specijalno za m = 1 (godišnje uplate!) dobivamo poznatu formulu (vidi npr. [3]) za sadašnju vrijednost (tj. vrijednost u trenutku t = 0) n jednakih periodičnih svota S *plativih na kraju svake godine.*

5. OTPLATA ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA

5.1. *Otplata zajma jednakim anuitetima plativim krajem razdoblja*

Pretpostavimo ponovo da je m broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu.



Slika 3.

Zajam C treba otplatiti kroz n godina jednakim anuitetima plativim na kraju svakog podintervala uz godišnji kamatnjak p, odnosno dekurzivni kamatni faktor r (vidi sliku 3).[3] Npr. ako je m = 12, zajam treba otplatiti jednakim anuitetima plativim na kraju svakog mjeseca kroz n godina.

[3] Ovdje treba spomenuti nekoliko tipičnih postupaka kojima se služe u našim bankama prilikom obračuna zajma. U Ljubljanskoj banci i Privrednoj banci Zagreb primjenom relativnog polugodišnjeg kamatnjaka izračunaju polugodišnji anuitet, dijele ga sa 6 i tako dobiju mjesečni anuitet. Pri tome Privredna banka dozvoljava otplatu zajma polugodišnjim anuitetima, a u slučaju otplate mjesečnim anuitetima na ranije dospjele anuitete daju kamatu po viđenju. U Zagrebačkoj banci primjenom relativnog mjesečnog kamatnjaka direktno izračunavaju mjesečni anuitet. U Slavonskoj banci Osijek primjenom formule

$$I = \frac{m+1}{24} \frac{p}{100} C,$$

gdje je m — ukupni broj mjeseci, otplate, p — godišnji kamatnjak, a C — iznos kredita, izračunavaju ukupne kamate. Mjesečni anuitet je tada $(C + I)/m$.

Nekaa je a anuitet kojim se otplaćuje zajam C krajem svakog podintervala. Na kraju prvog podintervala iznos duga (prema (3)) je $C\,r^{1/m}$. U isto vrijeme dužnik uplaćuje prvi anuitet a. Tako imamo:

$O_1 = C\,r^{1/m} - a$ — ostatak duga nakon 1. podintervala

$O_2 = O_1\,r^{1/m} - a$ — ostatak duga nakon 2. podintervala

. . . .

$O_k = O_{k-1}\,r^{1/m} - a$ — ostatak duga nakon k-tog podintervala

Sukcesivnom primjenom ovih formula lako se dobiva

$$O_k = C\,r^{k/m} - a\,r^{\frac{k-1}{m}} - \ldots - a\,r^{1/m} - a \tag{18}$$

i nakon zbrajanja konačnog geometrijskog reda:

$$O_k = C\,r^{k/m} - a\,\frac{r^{k/m} - 1}{r^{1/m} - 1}. \tag{19}$$

Kako zajam C treba biti otplaćen kroz n godina sa m · n jednakih anuiteta a, mora biti $O_{nm} = 0$, tj.

$$C\,r^{\frac{n\cdot m}{m}} - a\,\frac{r^{\frac{n\cdot m}{m}} - 1}{r^{1/m} - 1} = 0.$$

Odavde možemo izračunati anuitet a:

$$a = C\,r^n\,\frac{r^{1/m} - 1}{r^n - 1} \tag{20}$$

Specijalno za m = 1 (godišnji anuiteti) dobivamo poznatu formulu (vidi [1], [3], [5]) za veličinu anuiteta prilikom otplate zajma C jednakim godišnjim anuitetima plativim krajem godine.

Operativno je često potrebno izračunavati ostatak duga nakon k otplatnih podintervala, pri čemu se cijeli zajam vraća kroz n godina.[4] U tu svrhu treba izraz (20) uvrstiti u (19). Na taj način dobivamo formulu za ostatak duga nakon k otplatnih podintervala:

$$O_k^{(n)} = C\,\frac{r^n - r^{k/m}}{r^n - 1} \tag{21}$$

---

[4] U razdoblju otplate zajma mogu se mijenjati uvjeti pod kojima je odobren zajam. Npr. može se primijeniti druga kamatna stopa, promijeniti rok otplate itd.

Primjer 3. Zajam C = 1.000.000.— din treba otplatiti kroz n = 3 godine uz plaćanje jednakih mjesečnih anuiteta plativih krajem mjeseca. Primjenom formule (20) dobiva se iznos mjesečnog anuiteta (uz kamatnu stopu 42% godišnje):
a = 45.567.— din.[5] U tabeli 3. prikazana je otplatna osnova za taj zajam (otplatna kvota je anuitet umanjen za kamate, koje se računaju po formuli (3)):

$$I = O\, r^{1/m},$$

gdje je O — ostatak duga, r kamatni faktor, a m = 12.

Primijetimo da je u posljednjem (36-tom) retku anuitet nešto drukčiji, što je rezultat nužnih korekcija zbog zaokruživanja brojeva na cijeli iznos.

Na kraju rada priložen je odgovarajući program napisan u BASIC-u kojim su provedena sva izračunavanja.

Primjer 4. Nekoj privrednoj organizaciji odobren je zajam od 100,000.000.— din. na 10 godina uz godišnji kamatnjak p = 60%. Zajam treba otplatiti jednakim polugodišnjim anuitetima plativim krajem polugodišta. Prema trenutnom principu obračuna u našim bankama polugodišnji anuitet iznosio bi 30 158 680.— din.

Primjenom korektne formule (20) taj anuitet iznosio bi 26,734.253.— din.

Lako se može izračunati da se sve odvija tako kao da banka obračunava kamate po stopi 69% a ne ugovorenih 60%.

Primijetimo da bi razlika bila još znatno veća kad bi m bilo veći (tj. kad bi obračun bio kvartalni ili mjesečni) ili kad bi kamatna stopa bila veća.

5. 2. *Otplata zajma jednakim anuitetima plativim početkom razdoblja*

Pretpostavimo ponovo da je m broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu.

Zajam C treba otplatiti kroz n godina jednakim anuitetima plativim na početku svakog podintervala uz godišnji kamatnjak p, odnosno dekurzivni kamatni faktor r (vidi sliku 4).

---

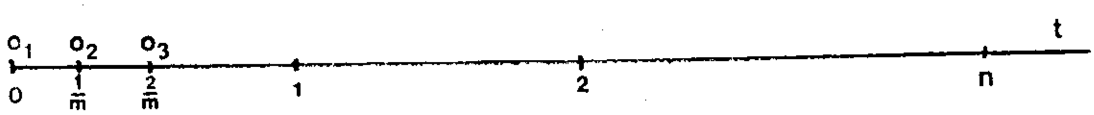
[5] Za taj isti zajam i iste uvjete otplate u Privrednoj i Ljubljanskoj banci izračunali bi mjesečni anuitet u iznosu 51.367.— din. U Zagrebačkoj banci izračunali bi 49.284.— din. a u Slavonskoj banci 45.764.— din.

Greška koju bi počinili u Privrednoj i Ljubljanskoj banci svodi se na to kao da bi umjesto kamatne stope 42% primijenili kamatnu stopu 56%. U Zagrebačkoj banci to bi bilo 52%.

Na prvi pogled čini se da je greška prilikom obračuna u Slavonskoj banci beznačajna i da je njihov pristup dobar. Ali, to je samo u slučaju kad je broj godina malen. Ako bismo isti zajam u Slavonskoj banci otplaćivali kroz 15 godina uz istu kamatnu stopu p = 42%, onda bismo dobili iznos mjesečnog anuiteta od 23.153.— din. Primjenom korektne formule (20) u tom slučaju dobili bi anuitet od 29.807.— din. Greška koju bi počinili u Slavonskoj banci svodi se na to kao da umjesto kamatne stope 42% primjenjuju kamatnu stopu 31%.

Tabela 3. *Otplatna osnova*

konac mjeseca	anuitet	kamata	otplatna kvota	ostatak duga
1	45 567	29 653	15 914	984 086
2	45 567	29 181	16 386	967 700
3	45 567	28 695	16 872	950 828
4	45 567	28 194	17 373	933 455
5	45 567	27 679	17 888	915 567
6	45 567	27 149	18 418	897 149
7	45 567	26 603	18 964	878 185
8	45 567	26 040	19 527	858 658
9	45 567	25 461	20 106	838 552
10	45 567	24 865	20 702	817 850
11	45 567	24 251	21 316	796 534
12	45 567	23 619	21 948	774 586
13	45 567	22 968	22 599	751 987
14	45 567	22 298	23 269	728 718
15	45 567	21 608	23 959	704 759
16	45 567	20 898	24 669	680 090
17	45 567	20 166	25 401	654 689
18	45 567	19 413	26 154	628 535
19	45 567	18 638	26 929	601 606
20	45 567	17 839	27 728	573 878
21	45 567	17 017	28 550	545 328
22	45 567	16 170	29 397	515 931
23	45 567	15 299	30 268	485 663
24	45 567	14 401	31 166	454 497
25	45 567	13 477	32 090	422 407
26	45 567	12 525	33 042	389 365
27	45 567	11 546	34 021	355 344
28	45 567	10 537	35 030	320 314
29	45 567	9 498	36 069	284 245
30	45 567	8 429	37 138	247 107
31	45 567	7 327	38 240	208 867
32	45 567	6 193	39 374	169 493
33	45 567	5 026	40 541	128 952
34	45 567	3 824	41 743	87 209
35	45 567	2 586	42 981	44 228
36	45 539	1 311	44 228	0
Σ	1640 384	640 384	1000 000	



Slika 4.

Neka je a^* anuitet kojim se otplaćuje zajam C početkom svakog podintervala. Na kraju prvog podintervala iznos duga je $C\,r^{1/m}$. U isto vrijeme vrijednost prvog anuiteta uplaćenog na početku prvog podintervala je $a^*\,r^{1/m}$. Tako imamo:

$O^*_1 = C\,r^{1/m} - a^*\,r^{1/m}$ — ostatak duga na kraju 1. podintervala

$O^*_2 = O^*_1\,r^{1/m} - a^*\,r^{1/m}$ — ostatak duga na kraju 2. podintervala

. . . .

$O^*_k = O^*_{k-1}\,r^{1/m} - a^*\,r^{1/m}$ — ostatak duga na kraju k-tog podintervala

Sukcesivnom primjenom ovih formula lako se dobiva:

$$O^*_k = C\,r^{k/m} - a^*\,r^{k/m} - \ldots - a^*\,r^{1/m}, \tag{22}$$

te nakon zbrajanja konačnog geometrijskog reda:

$$O^*_k = C\,r^{k/m} - a^*\,r^{1/m}\frac{r^{k/m} - 1}{r^{1/m} - 1}. \tag{23}$$

Kako zajam C treba biti otplaćen kroz n godina sa $n \cdot m$ jednakih anuiteta a^*, mora biti $O^*_{nm} = 0$, tj.

$$C\,r^{\frac{n\cdot m}{m}} - a^*\,r^{1/m}\,\frac{r^{\frac{n\cdot m}{m}} - 1}{r^{1/m} - 1} = 0.$$

Odavde možemo izračunati anuitet a^*:

$$a^* = C\,r^{n - \frac{1}{m}}\,\frac{r^{1/m} - 1}{r^n - 1} \tag{24}$$

Specijalno za $m = 1$ (godišnji anuiteti!) dobivamo poznatu formulu (vidi [1], [3], [5]) za veličinu anuiteta prilikom otplate zajma C jednakim godišnjim anuitetima plativim početkom godine.

Ostatak duga nakon k otplatnih intervala, pri čemu se cijeli zajam vraća kroz n godina, dobit ćemo ako (24) uvrstimo u (23):

$$O^*_k(n) = C\,\frac{r^n - r^{k/m}}{r^n - 1}. \tag{25}$$

6. ZAKLJUČAK

Pristup ispodgodišnjem ukamaćivanju naveden u radu omogućava potpuno zaobilaženje primjene relativnog, a također i konformnog kamatnjaka, bilo prilikom obračuna ispodgodišnjih kamata, bilo prilikom otplate zajma jednakim ispodgodišnjim anuitetima.

Primjenom relativnog kamatnjaka činimo zanemarivu grešku samo u slučaju niskih kamatnih stopa. Međutim, s obzirom na trenutno vrlo visoke kamatne stope, primjena relativnog kamatnjaka više nema teoretskog opravdanja. Relativni kamatnjak je uveden davno prije zbog pojednostavljenog računskog postupka. Danas to više nikako ne bi smio biti razlog za zadržavanje starog načina obračuna ispodgodišnjih kamata.

Postupci predloženi u radu mogu se bez ikakvih problema primijeniti u našim bankama. Do sada korištene financijske tablice ne bi se, naravno, više mogle upotrebljavati. Moguće je vrlo jednostavno napraviti nove tablice, koje bi podržavale pristup naveden u radu, ali bi mnogo elegantnije bilo prilikom obračuna koristiti računski stroj, kao što se to predlaže i u [4] (čime se, među ostalim, izbjegavaju greške koje bi mogle nastati interpolacijom).

Primjenom predloženih metoda prilikom obračuna ispodgodišnjih kamata ili prilikom otplate zajma jednakim ispodgodišnjim anuitetima bilo bi moguće stvoriti objektivniju sliku stanja s obzirom na realnost kamatnih stopa u našoj privrednoj praksi.

Primljeno: 29. 04. 1985.
Prihvaćeno: 2. 06. 1987.

LITERATURA

[1] A. Dabčević, N. Dravinac, S. Filipović i B. Sekulić (1981), *Matematika za ekonomiste,* Zbirka zadataka s teorijom i komentarima, Informator, Zagreb.

[2] J. Markotić i Z. Pleslić (1976), *Praktikum iz Matematike I,* Ekonomski fakultet Osijek, Osijek.

[3] Lj. Martić (1980), *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize,* Informator, Zagreb.

[4] V. Muškardin (1985), *Suvremeni pristup financijskoj matematici,* Ekonomska analiza XIX — 1, pp 75—99.

[5] B. Trklja (1985), *Financijska matematika,* Savremena administracija, Beograd.

[6] S. P. Shaw (1974), *Mathematics for Management and Finance,* Cincinnati.

ON DETERMINING LESS-THAN-ANNUAL INTEREST

Rudolf SCITOVSKI

Summary

The treatment of a problem of bearing less-than-anual interest presented in this paper paves the way for avoiding the application of a relative as well as of a conforming rate of interest both in the case of calculating less-than-annual interest and in the case of paying off by equal less-than-annual instalments.

The application of a relative rate of interest leads to a minor error only in the case of a low interest rate. In the case of a (very) high interest rate that we are faced with today, it becomes quite illogical. The relative rate of interest has been introduced for a long time because of a simple calculating procedure that it requires. But nowadays the simplicity of a calculating procedure shouldn't be the reason at all for maintaining the old way of computing less-than-annual interest.

The procedure proposed in this paper can be easily applied in our banks. Of course, the financial tables used so far shouldn't be applied in practice any more. It is certainly possible to construct the new tables that can support the proposed procedure, but, according to the avoidance of errors caused by interpolation, it would be more elegant to use a calculating machine, as it has been suggested in the work [4].

According to the actual rates of interest in our economy, it would be possible to get a more clear picture of the situation by applying the proposed methods in computing less-than-annual interest as well as in paying off by equal less-than-annual instalments.

PRILOG

```
1 REM OTPLATA ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA
2 REM R. SCITOVSKI, 17. I 1987.
3 REM
10 INPUT »UPISI VELIČINU ZAJMA«; C
12 INPUT »UPISI GODIŠNJI KAMATNJAK«; P
14 INPUT »UPISI VRIJEME OTPLATE (U GODINAMA)«; N
16 INPUT »UPISI NAČIN OTPLATE — M«; M
50 R = 1+ P/100
52 A = C * (R↑N) * (R↑(1/M) — 1) / (R↑N — 1)
53 IF A-INT (A) <0.5 THEN 57
54 A = INT (A) + 1 : GO TO 58
57 A = INT (A)
58 REM
60 PRINT »OTPLATA ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA«
62 FOR I = 1TO5 : PRINT« » : NEXT
64 PRINT "ZAJAM ="; C
```

```
66 PRINT" " : PRINT"KAMATNJAK =";  P;  "%"
68 PRINT" " : PRINT "VRIJEME OTPLATE =";  N;  "GODINA"
70 PRINT" " : PRINT "NAČIN OTPLATE : M =";  M
72 PRINT" " : PRINT "ANUITET = ";  A : PRINT" "
73 PRINT "PRITISNI JEDNU TIPKU"
75 GET A$ : IFA$=" " THEN 75
80 PRINT "  OTPLATNA OSNOVA"
81 FOR I = 1TO3 : PRINT " " : NEXT
82 PRINT"RATA ANU   KAM   O.K   O.D"
83 PRINT"——————————————————————————"
85 OD = C : I = 1
100 K = OD * (R↑(1/M) ) — OD
102 IF K-INT(K)<0.5 THEN 107
104 K = INT(K) + 1 : GO TO 108
107 K = INT(K)
108 REM
110 OK = A — K
120 OD = OD — OK
125 GET A$ : IF A$ = " " THEN 125
130 PRINT I; A; K; OK; OD
140 IF I> = M * N THEN 987
150 I = I + 1
160 GO TO 100
987 STOP

READY.
```