

AGREGACIJA PRODUKATA I SEKTORA U EKONOMSKOJ ANALIZI

*Aleksandar R. JOVANOVIĆ**)

1. O TEORJI AGREGACIJE

U analizama nacionalne privrede operiše se sa ekonomskim agregatima — sa ekonomskim jedinicama koje predstavljaju manje ili veće skupove originalnih jedinica društvene proizvodnje i sa ekonomskim veličinama koje se odnose na ove skupove i koje predstavljaju sintetičke izraze (zbirove, srednje vrednosti i sl.) odgovarajućih izvornih veličina. Na primer, u istraživanjima dohodaka, potrošnje itd. svrstavaju se pojedinci i domaćinstva u pojedine grupe; u analizama društvene proizvodnje grupišu se preduzeća, a nekad i njihovi pogoni, u sektore, grane ili grupacije; računa se pri tome sa skupnim ekonomskim veličinama, kao što su dohoci određenih grupa, indeks troškova života, obimi produkcije sektora itd. Ponekad je agregacija vrlo visokog stepena, kada se isključivo koriste veličine za ukupnu privredu, društveni proizvod, nacionalni dohodak, globalni kapitalni koeficijent itd., na primer u opštim modelima privrednog razvoja; drugi put je znatno manjeg razmera, na primer u međusektorskoj analizi, u kojoj se polazi od 100—400 privrednih sektora — ali u analizama koje imaju za predmet nacionalnu privredu u celini nećemo se sresti sa slučajevima u kojima je ovaj postupak izostao, ako izuzmemo »čiste« ekonomske teorije koje ne pretenduju na primenljivost, kao što su klasične teorije opšte privredne ravnoteže.

Pri tome, ni sama radnja grupisanja ekonomskih jedinica ni korišćenje prostih skupnih veličina ne mogu u principu biti sporni. Grupisanje je opravdano samim tim što se ne može raditi sa originalnim jedinicama, zbog njihove velike brojnosti, a u mnogim slučajevima bilo bi besprekorno i da nije toga: kad grupe jedinica imaju jednake vrednosti obeležja koja se posmatraju ili istovetna svojstva materije koja se ispituje. Sa svoje strane, jednostavne sintetičke veličine izražavaju određene karakteristike odnosnih skupova i najčešće su i same realne veličine, na primer, društveni proizvod, obim investicija, fond plata.

Sporna pitanja iskrsavaju kada se skupne, agregatne veličine koriste u ekonomskim relacijama, funkcijama i modelima. Obrazovane makro relacije, iako na prvi pogled izgledaju ispravne kao izraz očiglednih veza koje postoje

*) Autor je magistar ekonomskih nauka : asistent Ekonomskog fakulteta u Beogradu.

između sintetičkih veličina, po pravilu su manjkave u jednom: u njima se računa sa zbirovima, srednjim vrednostima i sl. određenih izvornih veličina umesto sa samim tim veličinama, sa jednom vrednošću umesto sa strukturom (vektorom), ili sa prostom umesto sa dvodimenzionalnom strukturom (matricom). Sažimanje veličina u makro relacijama dovodiće do netačnosti u računu ukoliko veze u pitanju nisu invarijantne u odnosu na sastav izvornih vrednosti, što je čest slučaj, pošto se ovaj sastav zanemaruje u postupku agregacije. Kao školski primer za ovo navodi se funkcija tražnje u okviru nacionalne privrede. Ukupna tražnja nekog produkta može biti izražena kao funkcija dohotka, po analogiji sa funkcijama individualne tražnje, ali ova relacija biće netačna i pod pretpostavkom da je besprekorna za pojedinačne potrošače, pošto će na ukupnu tražnju uticati ne samo promena nivoa dohotka nego i promena strukture dohodaka.¹⁾ Proizvodna funkcija sektora u modelu Leontijeva menjaće se i pri nepromenjenoj tehnici proizvodnje i nivou produkcije kad se menja relativno učešće u proizvodnji preduzeća koje sektor obuhvata ili sastav produkata koje sektor reprezentuje. Mogućnost da se pojave greške ove vrste još je lakše uočiti u relacijama koje polaze od globalnih narodnoprivrednih veličina.

U ovoj materiji pojavljuje se niz pitanja na koja treba potražiti odgovore: kako izvesti grupisanje originalnih jedinica da bi se u određenoj analizi suzile mogućnosti grešaka; koji će način agregacije izvornih veličina najviše odgovarati u pojedinim slučajevima, s obzirom da se rezultati mogu menjati u širokom intervalu sa promenom metoda agregacije; može li se za date izvorne funkcije utvrditi skupna funkcija sa optimalnim svojstvima; kakvi su odnosi između određenih mikro i makro ekonomskih relacija itd. Za naučnu analizu nacionalne privrede ova pitanja su vrlo značajna; »Nesumnjivo je — piše Alen — da takva pitanja zadiru u same osnove izgradnje ekonomskih modela«. (O.c., str. 695). Ona se u novije vreme sistematski proučavaju u teoriji agregacije.²⁾

Teorija agregacije u širem smislu treba da objasni međusobne veze između mikroekonomije i makroekonomije. Zadatak istraživanja može se prema Alenu formulisati na dva načina: (1) definisane su mikroekonomske relacije i formalni oblik odnosne makro relacije i treba naći tačan metod agregacije prvih izraza u drugi i, uopšte, ispitati odnose između ove dve relacije;

¹⁾ Da li ovako formulisana funkcija ukupne tražnje ipak može biti tačna? Polazeći od individualnih funkcija tražnje (d_s) nekog produkta prema dohotku (m_s) linearnog oblika — $d_s = a_s m_s + b_s$, i analogne funkcije ukupne tražnje — $d = am + b$, R.G.D. Allen (Mathematical Economics, Macmillan, London, 1956, str. 697—99) je tražio takav metod agregacije izvornih veličina koji obezbeđuje valjanost makro funkcije tražnje i došao do rešenja:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n a_s, \quad b = \sum_{s=1}^n b_s, \quad m = \frac{1}{a} \sum_{s=1}^n a_s m_s.$$

Iz činjenice da postoji metod agregacije pri kome je funkcija ukupne tražnje $d=am+b$ ispravna ne može se izvesti zaključak o jednostavnom rešenju ovog problema. Kako se vidi, dobijeno m nije ukupan donosak u uobičajenom značenju, zbir pojedinačnih dohodaka, već ponderisana suma dohodaka (sa a_s što znači da će se menjati od produkta do produkta). Isto tako, inenjaće se i parametri a i b pri značajnijim promenama nivoa i strukture dohotka pošto će doći do promena izvornih parametara.

²⁾ Prema R.G.D. Allenu i I. Yamadi, prvi radovi o agregaciji pojavili su se 1946. god. u časopisu Econometrica (L. R. Klein, K. May, R. Roy i dr.) a prva monografija 1954. god.: H. Theil, Linear Aggregation of Economic Relations (R. G. D. Allen, o. c., str. 695; I. Yamada, Theory and Application of Interindustry Analysis, ruski prevod: Teorija i primenenije mežotraslevog metoda, IL, Moskva, 1963, str. 28).

(2) definisane su mikroekonomske relacije i metod agregacije i traži se, uključujući i pitanje egzistencije, odgovarajuća makro relacija. Sledeći Tejla, ispituju se tri osnovna tipa agregacije: agregacija individualnih ekonomskih subjekata (pojedinaca kao potrošača, preduzeća), agregacija produkata i agregacija vremenskih perioda³⁾.

Na objašnjenje problema agregacije u građanskoj ekonomiji, gde su oni u jednoj opštoj teoriji jedino i istraživani, mogu se staviti izvesne načelne primedbe. Prva je da se mikro relacija po pravilu uzima kao izvorna, da se od nje polazi; druga — da se preterano naglašava značaj ove problematike, da se njena rešenja smatraju presudnim za analizu nacionalne privrede. Objasnjenje toga je jednostavno. Građanska ekonomska teorija polazeći od subjektivne teorije vrednosti gradi se na osnovama mikro elemenata sistema društvene proizvodnje: pojedincima kao potrošačima i preduzetnicima i, u krajnjem slučaju, preduzećima. Otuda se mikro relacije shvataju kao izvorne. Pri takvom pristupu ukupne (društvene) ekonomske veličine — korisnost, efektivnost, tražnja itd. — dobijaju se kao konstrukcije izvedene iz odnosnih mikro veličina. Zbog toga se u analizi nacionalne privrede u građanskoj ekonomiji agregacija pojavljuje kao nužan uslov i zbog toga joj se pridaje tako veliki značaj.*)

Situacija se menja u analizi nacionalne privrede koja polazi od marksističke koncepcije ekonomije. Vrednost i ekonomske veličine iz nje izvedene, produktivnost, efektivnost i sl. definisane su u okviru celokupnog sistema društvene proizvodnje, kao društvene kategorije. Tada se osnovne makroekonomske veličine javljaju kao izvorne i već se raspolažu sa njihovim tačnim odredbama. Problemi agregacije pojavljuju se u drugačijem svetlu i u teorijskoj analizi nacionalne privrede imaju mnogo manju težinu.

Može izgledati da je ovo samo prividno: da je definisanjem osnovnih ekonomskih kategorija kao društvenih veličina samo zaobiđeno pitanje njihovog izvođenja kao agregata mikro veličina, a da problem praktično i dalje ostaje. To ne odgovara sasvim istini: osnovne ekonomske kategorije su zaista društvene, u smislu da se javljaju kao ishod proizvodnje u društvenom sistemu uzetom u celini i da se mogu opredeliti jedino u tom okviru, jer su u ovom sistemu ekonomske jedinice međusobno povezane i jer mikro veličine nisu rezultat samo njihove pojedinačne ekonomske delatnosti već i delatnosti drugih ekonomskih jedinica; ovi zaključci mogu se uostalom izvesti i iz moderne kvantitativne analize razvijene u samoj građanskoj ekonomiji; u tom smislu je čista teorijska analiza nacionalne privrede u marksističkom konceptu jednostavnija. Ali, u tvrdnji da problem agregacije i pri takvom pristupu ostaje aktuelan ima dosta istine. Prvo, prilikom konkretizovanja ekonomskih kategorija definisanih kao društvenih, bilo u teorijskim mode-

³⁾ H. Theil, *Linear Aggregation of Economic Relations*, North-Holland, Amsterdam, 1965, str. 3—4.

⁴⁾ U teoriji ekonomskog blagostanja, kao teorijskoj osnovi analize nacionalne privrede u građanskoj ekonomiji, agregacija ima suštinski značaj: društvena korisnost i društveni optimum traže se kao agregati individualnih korisnosti i pojedinačnih optimalnih rešenja. Ovim se može objasniti kasno istraživanje tako značajnog problema za građansku ekonomiju: on je postao aktuelan kad se ona počela intenzivno baviti nacionalnom privredom, uz razloge koje navode Tejl i Alen: da problem agregacije pripada i ekonomiji i statistici i da se ni u jednoj od njih pojedinačno nije mogao ispravno formulisati i rešavati. Prema Tejlu, teorija agregacije treba da pruži naučnu osnovu empirijskim istraživanjima nacionalne privrede: »Ozbiljan jaz postoji između velikog dela rigorozne ekonomske teorije i pragmatičnog načina na koji se ekonomski sistem empirijski analizira. Aksiomatično zasnovane teorije pozivaju se na pojedince, na primer na potrošače ili preduzetnike. Empirijska opisivanja ekonomskih mehanizama u velikim zajednicama, s druge strane, su skoro uvek krajnje globalna: ona su ograničena na ponašanje društvenih grupa.« (O. c., str. 1).

lima bilo u empirijskoj analizi, agregacija se javlja kao nužna i ispoljava se u punoj meri, mada u ovom slučaju više kao statističko-metodološki zadatak. Drugo, u teorijskom konceptu koji osnovne ekonomske kategorije opredeljuje kao društvene, problem agregacije se pojavljuje u ovom obliku: sa makro veličinama i relacijama se raspolaže, ali kako doći do odnosnih mikro veličina i relacija, koje su neophodne u praktičnim analizama i upravljanju nacionalnom privredom? Problem agregacije se sada pojavljuje izvrnut — kao problem dezagregacije, kao problem prelaska sa makroekonomske na mikroekonomsku analizu. Za ilustraciju toga uzmimo problem da se u socijalističkoj privredi, u odnosu na preduzeća i druge ekonomske jedinice, realizuje princip raspodele prema radu; teorijski koncept ovog principa izgleda tako prost, ali njegovo ostvarenje u praksi zahteva rešenje vrlo složenih problema dezagregacije proizvedene vrednosti.

Kao što se vidi, pitanja koja se pojavljuju u teoriji agregacije tiču se bitnih ekonomskih problema i veoma su složena. Mi ćemo se ograničiti na vrlo usko polje: na agregaciju koja se javlja prilikom obrazovanja tabela međusektorskih tokova proizvodnje (input-output tabela). Tu se agregacija odnosi na produkte ili na sektore, koji se u teorijskom međusektorskom modelu identifikuju sa proizvodnjom jednog produkta, ali je u odnosu na opšti problem agregacije produkata mnogo uža, jer se sprovodi sa gledišta tehnologije proizvodnje i u okviru određene proizvodne funkcije.

2. AGREGACIJA KOD MEĐUSEKTORSKOG MODELA I PITANJE KLASIFIKACIJE

Problemi agregacije u analizi pomoću međusektorskog modela javljaju se u blažoj formi nego u nekim drugim analizama nacionalne privrede, na primer na osnovu globalnih modela privrednog razvoja. Prvo, stepen agregacije je manji nego inače, pošto se privreda raščlanjava na veliki broj sektora i najviše se računa sa sektorskim veličinama. Zatim, model se odnosi na oblast proizvodnje, u kojoj su proste mikro veličine aditivne, pa je agregacija u većoj meri dopustiva nego u drugim oblastima. Najzad, relacije u modelu su linearnog oblika, a u tom slučaju su odnosi između mikro i makro ekonomskih relacija najjednostavniji.

I pored toga, stepen grupisanja ostaje znatan, a problemi agregacije još uvek složeni. Osnovni izvori agregacije kod međusektorskog modela nalaze se u tome: (1) što je sektor skup preduzeća, ili čak skup pogona preduzeća kad ova proizvode širi asortiman produkcije i (2) što je sektor skup produkata. Ova vrsta grupisanja ne mora se pretpostaviti u teorijskoj analizi, ali je neizbežna u praksi. Izvesno je da prvi tip grupisanja ostavlja određen trag na međusektorsku analizu, pošto su sektori vrlo nehomogen skup preduzeća i delova preduzeća, i u pogledu njihovih ekonomskih i u pogledu tehnoloških karakteristika, i pošto se zanemaruje uticaj ovog varijabiliteta na sektorske veličine i relacije. Međutim, on se ne pojavljuje kao problem u praksi, jer se prihvata koncepcija »čistog« sektora, pa se ne može vršiti izbor u grupisanju preduzeća kad je usvojena klasifikacija sektora po produkciji. Osim toga, on je manje podložan kvantitativnoj analizi i jedino što preostaje je da se utvrde mogući izvori nestabilnosti pojedinih sektorskih

relacija usled toga što su one globalni izraz odnosnih relacija preduzeća, npr. za proizvodne funkcije sektora, moguće netačnosti u relacijama koje se koriste i osiromašenja analize koja nužno iz ove agregacije proizilaze.

Drugi izvor agregacije — grupisanje produkata — izaziva jednostavnije i opipljivije posledice, a u praksi se javlja kao značajan problem, i zato su se istraživanja agregacije kod međusektorskog modela na njega usredsredila. Na prvi pogled može izgledati da je ovaj izvor agregacije malo značajan kod međusektorske analize, zbog operisanja sa velikim brojem sektora. Međutim, društvena podela rada u savremenim privredama je toliko razvijena da računanje sa 100—400 sektora, koliko obuhvata najveći broj međusektorskih tabela; stvarno označava veliki stepen agregacije produkata.⁵⁾

Računajući sa podacima koje navode M. Ejdeljman, V. Kosov, V. Đumin i S. Arhangel'skij⁶⁾, izlazi da bi agregacija produkata bila praktično eliminisana tek pri podeli privrede na 15—20.000 sektora. To, naravno, nije moguće, ni u pogledu prikupljanja informacija, ni u pogledu njihove računске obrade. A ne bi bilo ni korisno; čak se i raščlanjavanje privrede na više od 500 sektora smatra neracionalnim. Jer sa širenjem podele broj potrebnih informacija raste sa kvadratom, a broj računskih operacija sa kubom broja sektora. I drugo, sa povećanjem broja sektora osetno raste broj praznih polja tabelle; prema Kosovu, kod 500-sektorske tabelle ispunjeno je svega 5—8% polja, a kod 1000-sektorske 33% polja!^{6a)} Tako je agregacija produkata prisutna i kod veoma raščlanjenih međusektorskih tabela. Kako piše R. Stoun: »Uvek se može pretpostaviti da je tabela velikog razmera dobijena kao rezultat agregiranja tabelle još većeg razmera, u kojoj se, na primer, neke proizvodne jedinice i čak pojedini procesi unutar proizvodnih jedinica prikazuju posebno.«⁷⁾

Problem agregacije produkata pojavio se još ranije u statistici društvene proizvodnje. U blažoj formi nego danas, a i u kontekstu druge, mada bliske problematike — klasifikacije grana i produkata. Rešenje ovog problema traženo je u okviru dveju definicija grana (sektora): kao skupa preduzeća i kao skupa srodnih produkata. Pri tome se danas sve više polazi od druge definicije, tzv. »čistog« sektora, što je uslovljeno naročito primenom međusektorske analize i drugih ekonomsko-matematičkih modela.

Kao osnovno načelo klasifikacije istaknuto je obrazovanje što homogenijih sektora u pogledu ekonomsko-tehnoloških karakteristika proizvodnje. U preciznijem definisanju homogenosti produkcije uzimana su ova tri obe-

⁵⁾ Govoreći o društvenoj podeli rada u sovjetskoj privredi i njenom širenju, M. Ejdeljman navodi niz podataka koji ovo ilustruju. Broj produkata samo u industriji iznosi 13.859 (Nomenklatura promišlennoj produkciji, Moskva, Gosstatizdat, 1960), pri čemu i ovako definisani produkti često grupišu više srodnih produkata, i, naročito, različite tipove i marke produkata. Broj profesija i specijalnosti brzo raste i iznosio je prema popisima stanovništva:

1920. god. 5.946
1926. god. 10.371
1939. god. 18.557
1959. god. 28.230

(M. R. Ejdeljman, Mežotraslevoj balans obščestvennogo produkta, Statistika, Moskva, 1966, str. 19—20).

⁶⁾ V.V. Kossov procenjuje broj produkata u sovjetskoj privredi na 20.000 (Mežotraslevoj balans, Ekonomika, Moskva, 1966). V.Đumin i S.Arhangel'skij (Agregirovanije v mežotraslevom balanse, Ekonomika i matematičeskije metodi br. 6, 1966, str. 841), pozivajući se na sovjetski klasifikator, navode broj od 10²—10³ jednačina koje bi neagregirani bilans imao.

^{6a)} O. c., str. 94. Nasuprot tom, kod tabela manjeg razmera ispunjen je pretežan broj polja. Tako je u jugoslovenskoj međusektorskoj tabeli za 1964. god., koja ima 98 sektora, popunjeno oko 63% polja.

⁷⁾ Stone R, Input-Output and National Accounts, Paris, OEEC, 1961 (ruski prevod: Metod zatraty — vypusk i nacionalnije ščeta, Statistika, Moskva, 1966, str. 107).

ležja: materijal koji kao predmet rada služi u procesu proizvodnje, tehnološki proces i namena (upotrebna vrednost) proizvoda⁸). Ali u praksi, u većem broju slučajeva, nije bilo moguće istovremeno poštovati sva ova obeležja⁹).

Sa tehničkim napretkom i razvijanjem društvene podele rada postaje sve teže da se u klasifikaciji grana sprovede ovako definisani kriterijum homogenosti. U vezi sa tim Švirkov ističe ove tendencije u razvoju proizvodnje: (1) iz jedne sirovine proizvodi se pomoću različitih tehnoloških postupaka sve više raznovrsnih produkata (npr., iz nafte se dobijaju i plastične mase, i veštačka vlakna, i sintetički kaučuk itd.); (2) povećava se broj materijala iste namene koji se proizvode u različitim procesima (npr. plastične mase i metal) i (3) razvijaju se oblici kompleksne proizvodnje u kojima se uz jedinstven tehnološki postupak potpuno iskorišćava jedna sirovina i proizvodi širok asortiman produkata (o.c. str. 13—14). Proces društvene proizvodnje prima sve raznovrsnije oblike, i u tehnologiji proizvodnje i u potrošnji, i sve se manje može podvesti pod kalup: jedan sektor — jedan produkt, jedna namena, jedan tehnološki postupak.

Ove raznovrsne promene mogu se sa dosta tačnosti uopštiti kao porast zamenljivosti faktora i dobara u procesu proizvodnje i potrošnje: sve češće se isti produkti proizvode pomoću različitih tehnoloških postupaka, uz različitu strukturu troškova; sve je više produkata koji mogu zadovoljiti istu proizvodnu ili potrošnu potrebu. Nužnost da se ove činjenice poštuju u novije vreme je izmenila pogled na pitanje klasifikacije. Tako je, pored ostalog, istaknuta potreba da se u okviru proizvodnje jednog ili grupe srodnih produkata, u okviru jednog sektora, obrazuju podsektori na osnovu tehnologije proizvodnje¹⁰).

Sa ovim rešenjem se izloženi problemi u velikoj meri ublažuju. Ono uzima u obzir jednu u ekonomskom pogledu suštinsku crtu procesa društvene proizvodnje — postojanje međusobno zamenljivih i konkurirajućih faktora u procesu proizvodnje istih produkata, varijetet tehnoloških postupaka. Ta crta je jedan od najvažnijih izvora onoga što čini ekonomsku efektivnost i ekonomski izbor u nacionalnoj privredi, pa njeno respektovanje u modelu omogućuje analizu ekonomske efektivnosti i optimalnih proizvodnih rešenja. I dok starije načelo homogenosti sektora odgovara međusektorskom modelu Leontijeva, novo rešenje se prihvata u savremenim razradama međusektorskog modela.

⁸) Švirkov J. M, *Klasifikacija otaraslej v narodnohozjajstvennom plane*, Ekonomika, Moskva, 1965, str. 9—11.

⁹) Niz istih produkata proizvodi se po veoma različitim tehnološkim procesima, npr. električna energija, uglj, ili se troše u različitim oblastima potrošnje. Švirkov pokazuje kako je u praksi savremenih privreda veoma teško sprovesti čak i tako opštu podelu produkata prema nameni kao što je podela na produkte koji služe potrošnji i produkte koji odlaze u proizvodnju; niz klasičnih grana I. odeljka proizvode sve više za potrošnju, a niz grana II. odeljka za proizvodnju (o.c., str. 11—12).

¹⁰) Na primer za sektor električne energije: hidroelektrane, elektrane na uglj, elektrane na mazut, pa i raščlanjenije. U primeru koji navodi Švirkov — proizvodnja uglja u tri postupka: dubinski običan kop, dubinski hidro kop i površinski kop — pokazuju se vrlo velike razlike u strukturi troškova (o.c. str. 24—25). Kad se radi o obezbeđenju homogenosti u pogledu namene produkta, predlaže se takođe obrazovanje podsektora, npr. uglj koji se koksuje i energetske uglj, stambeno i industrijsko građevinarstvo itd. (Njemčinov V. S, *Ekonomiko-matematičeskije metody i modeli*, Myslj, Moskva, 1965, str. 290). Ta rešenja, veoma važna sa stanovišta analize potrošnje, nisu značajna za međusektorsku analizu, koja je usredsređena na proizvodnju, a sama upravo prikazuje različite sfere potrošnje pojedinih produkata.

3. KVANTITATIVNA ANALIZA AGREGACIJE

Aggregacija produkata (sektora) u obrazovanju tabela međusektorskih tokova proizvodnje može se podvrći matematičkoj analizi, u smislu da se mere efekti pojedinih načina grupisanja i da se traže uslovi u kojima je grupisanje sasvim ili manje-više dopustivo. Doprinosi ovoj analizi, u kojoj se inače ogledao veći broj poznatih ekonomista i statističara, vezuju se za ove autore: L. R. Klein, M. Hatanaka, E. Malinvaud, K. Ara, J. B. Balderston, T. M. Whitin, W. D. Fisher, I. Yamada, V. Kossov i dr. Njima treba dodati i nedavno publikovane radove J. Skolke i H. Tejla, u kojima se agregacija produkata u međusektorskom modelu analizira pomoću aparata teorije informacija.

U kvantitativnoj analizi agregacije sektora najpre je zadatak formulisao tako da su se tražili uslovi pri kojima je grupisanje dopustivo. To su uslovi tzv. savršene ili idealne agregacije. Iz tih uslova trebalo je izvesti pravila, kriterijume za agregaciju u praksi. Zatim, pošto se pokazalo da se ovi uslovi mogu veoma retko ostvariti u praksi, da su suviše strogi, problem je proširen traženjem uslova agregacije pri kojima se razilaženja relacija iz neagregiranog i agregiranog međusektorskog bilansa svode na minimum i, uopšte, na merenje tih razilaženja.

Dopustivo, savršeno, agregiranje definisano je kao (1) agregiranje koje uvek dozvoljava vraćanje na početni, neagregirani bilans, ili (2) kao agregiranje pri kome se ne sužavaju informacije, ili (3) kao agregiranje koje ostavlja neizmenjene relacije međusektorskog modela¹¹⁾. Iako formalno različite, ove tri definicije se u suštini malo razlikuju. Prve dve definicije dovede do iste matematičke formulacije zadatka i daju za rešenja iste uslove. Treća definicija se drukčije algebarski formuliše i rezultat se razlikuje u jednoj situaciji kad je agregacija dopustiva.

U prvom pristupu zadatak se matematički formuliše tako da se traže uslovi pri kojima se matrica tehničkih koeficijenata proizvodnje A agregira prosto, bez upotrebe pondera za koeficijente sektora koji se udružuju. Tada je zaista moguć povratak na neagregirani bilans, odnosno ne sužava se raspoloživa informacija.

Aggregacija matrica se matematički izražava pomoću tzv. agregacionog operatora. To je matrica reda (m, n) , gde m i n označavaju red matrice (broj sektora) posle i pre grupisanja, sa nulama i jedinicama kao elementima; svaki red ove matrice vezuje se za novi sektor koji nastaje posle agregiranja i jedinice se pojavljuju na mestima sektora koje novi sektor udružuje. Obeležimo li agregacioni operator sa G i podemo li od nekog vektora x i neke matrice X , možemo agregirani vektor (x^+) i agregiranu matricu (X^+) napisati u obliku:

$$x^+ = Gx$$

$$(1) \quad X^+ = GXG', \quad (G' \text{ je transponovana matrica } G).$$

¹¹⁾ Iz prve definicije izveo je Hatanaka uslove idealne agregacije; nju nalazimo kod Nemirova (o.c., str. 292), Kosova (o.c., str. 94). Od druge polazi Stoun: »Pošto agregiranje povlači za sobom sabiranje elemenata u tabeli međusektorskih tokova na taj način da se gube neke njihove individualne crte, to agregiranje može biti u pravom smislu opravdano ako je očividno da se pri tom informacija uopšte ne gubi, ili se gubi samo nebitna informacija« (o.c., str. 107). Treću definiciju, kao jedan od mogućih kriterijuma agregacije, koristi Jamada (o.c., str. 40-48).

Npr. ako je x vektor proizvodnje tri sektora, a X matrica njihovih međusektorskih tokova i ako agregiramo 1. i 2. sektor, biće:

$$x^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

i

$$X^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}), & (x_{13} + x_{23}) \\ (x_{31} + x_{32}), & x_{33} \end{bmatrix}$$

Na ovaj način se može predstaviti agregiranje matrica čiji su elementi aditivni, kao što je slučaj sa obimima proizvodnje i veličinama međusektorskih tokova iz prethodnog primera. Postupak se modifikuje ako treba agregirati matricu čiji elementi nisu neposredno aditivni, kao što je slučaj sa matricom tehničkih koeficijenata proizvodnje A . Agregiranu matricu tehničkih koeficijenata (A^+) možemo napisati u obliku.

$$(2) \quad A^+ = GAG'_o,$$

gde matrica G'_o u odnosu na G' umesto jedinica ima pondere w_{ij} ($w_{ij} > 0$ i $\sum w_{ij} = 1$ u svakoj koloni); ti ponderi su u stvari količnici obima proizvodnje odnosnih sektora i obima proizvodnje odgovarajućeg agregiranog sektora. Tako će za prethodni primer G'_o biti

$$G'_o = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_1 + x_2} & 0 \\ \frac{x_2}{x_1 + x_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primetimo da za matrice G i G'_o vredi odnos:

$$(3) \quad GG'_o = I_{m,m}.$$

Ako u (2) pomnožimo levu stranu sa $I_{m,m}$ i uzmemo u obzir (3) dobićemo

$$A^+ I_{m,m} = GAG'_o,$$

$$A^+ GG'_o = GAG'_o,$$

i

$$(4) \quad A^+ G = GA$$

U ovom izrazu za agregiranu matricu tehničkih koeficijenata A^+ ne pojavljuje se, za razliku od (2), agregacioni operator sa ponderima, G'_o , već samo običan agregacioni operator G . Zato (4) možemo smatrati kao uslov dopustive (savršene) agregacije, ranije date definicijom (1) ili (2) — agregacije pri kojoj je moguće vraćanje na početni neagregirani bilans i pri

kojoj se, takođe, ne sužavaju informacije. Razvijanjem (4), tj. izjednačavanjem koeficijenata u matrici A^+G sa koeficijentima u matrici GA , dobija se m jednačina koje se odnose na tehničke koeficijente proizvodnje sektora koji se udružuju: zbir koeficijenata utrošaka produkata sektora koji se udružuju i svi ostali koeficijenti međusobno moraju biti jednaki. Ako od n sektora udružujemo u jedan dva sektora, j -ti i k -ti, onda uslov (4) možemo napisati na sledeći način:

$$(5) \quad a_{jj} + a_{kj} = a_{jk} + a_{kk}$$

$$a_{ij} = a_{ik}, \text{ gde } i = 1, 2, \dots, n, i \neq j, k.$$

Da bi ovo pokazali, obeležimo sektor nastao udruživanjem j -tog i k -tog indeksom j i zadržimo numeraciju ostalih sektora nepromenjenu: Matrice A^+ , A i G možemo napisati u obliku:

$$A^+ = \begin{bmatrix} a_{11}^+ & \dots & a_{1j}^+ & \dots & a_{1n}^+ \\ a_{j1}^+ & \dots & a_{jj}^+ & \dots & a_{jn}^+ \\ a_{n1}^+ & \dots & a_{nj}^+ & \dots & a_{nn}^+ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{matrix} & 1 & \dots & j & \dots & k & \dots & n \\ \begin{matrix} 1 \\ j \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Proizvodi matrica A^+G i GA su matrice reda $n-1, n$, pa matrična jednačina (4) sadrži $n(n-1)$ jednačina u kojima se na levoj strani pojavljuju koeficijenti a_{is}^+ a na desnoj koeficijenti a_{is} . Jednačine koje se ne odnose na koeficijente j -tog i k -tog sektora su oblika

$$a_{is}^+ = a_{is}, i \neq j, s \neq j, k,$$

i ne zanimaju nas, pošto se odnosni koeficijenti ne menjaju prilikom agregacije j -tog i k -tog sektora. Jednačine u kojima se pojavljuju koeficijenti novog j -tog sektora i j -tog i k -tog sektora u prvobitnoj matrici dobijaju se iz jednačavanjem j -tih i k -tih kolona u proizvodima matrica A^+G i GA . Lako je utvrditi da su j -ta i k -ta kolona u matrici A^+G identične, sa elementima a_{ij}^+ , $i = 1, 2, \dots, n$, u svakoj. S druge strane, u matrici GA su u j -toj koloni koeficijenti a_{ij} , a u k -toj koloni a_{ik} , izuzev elemenata u j -tom redu koji su respektivno: $(a_{jj} + a_{kj})$, $(a_{jk} + a_{kk})$. Iz toga proizilaze jednačine date u (5). Drugim rečima, sektori koji se grupišu treba da imaju jednake tehničke koeficijente proizvodnje (strukturu troškova); sa nešto blažim uslovom za koeficijente koji se odnose na utroške produkata sektora koji se udružuju: zbrovi ovih koeficijenata, a ne i sami koeficijenti, moraju biti jednaki¹²⁾.

¹²⁾ Izvođenje prema Kosovu (o.c., str. 94—100) i Stounu (o.c., str. 108—110).

Ako se, umesto od matrice tehničkih koeficijenata proizvodnje A , poče od matrice koeficijenata raspodele $H = (h_{ij})_{n, n} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \dots \\ x_{ij} \\ \dots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$, može se postupkom analognim prethodnom izvesti drugi uslov dopustive agregacije. Biće:

$$X^+ = G_o H G'$$

$$\text{i } G_o G' = I_{m, m},$$

pa je

$$I_{m m} H^+ = G_o H G',$$

$$G_o G' H^+ = G_o H G'$$

i

$$G' H^+ = H G'.$$

Odnosno, ukoliko udružujemo j -ti i k -ti sektor:

$$(6) \quad h_{jj} + h_{jk} = h_{kj} + h_{kk}$$

$$h_{ji} = h_{ki} \text{ za } i = 1, 2, \dots, n \text{ i } i \neq j, k.$$

tj. koeficijenti raspodele sektora koji se udružuju treba da budu jednaki; sa blažim uslovom, kao i ranije, za koeficijente koji se odnose na agregirane sektore: njihove sume treba da su jednake. Dobijena su tako dva uslova, koja su i jedina, pri kojima je agregiranje potpuno dopustivo, shvatajući dopustivost tako da je moguće vraćanje na neagregiranu matricu ili da se ne sužavaju raspoložive informacije. Prvi uslov odnosi se na jednakost tehničkih koeficijenata (strukture troškova ili tehnoloških procesa) sektora koji se grupišu, a drugi na jednakost koeficijenata raspodele odnosnih sektora; bilo koji uslov da je zadovoljen agregiranje je savršeno¹³⁾.

Ako se poče od druge definicije dopustive agregacije: da je to agregiranje koje ostavlja neizmenjene relacije međusektorskog modela, koje ne dovodi do netačnosti tih relacija, dobija se uslov koji je dobijen pri prvoj definiciji, dat sa (5), i umesto (6) ovaj: kada sektori koji se udružuju proizvode u istoj, stabilnoj srazmeri. Relacija od koje se polazi, koja treba da ostane nepromenjena, je sistem bilansnih jednačina proizvodnje, dat izrazom

$$y = (I - A) x,$$

gde y označava vektor finalne potrošnje.

¹³⁾ Prvi uslov idealne agregacije izveo je Hatanaka M. (Note of Consolidation within a Leontief's Sistem, *Econometrica*, vol. 20, 1952, No 2), a prvi i drugi zajedno Malinvaud E. (Aggregation Problems in Input-Output Models, in *The Structural Interdependence of Economy*, ed. by T. Barua, 1954). Druge dokaze dali su Ara K. i Morishima M. i Seton E. Ovo bi se moglo reći na osnovu godina u kojima su objavljeni radovi ovih autora. Inače se u literaturi ovi dokazi vezuju za različite autore: Nemčinov za Aru i Hatanaku (o.c., str. 292), Kosov za Hatanaku i Morishimu i Setona (o.c., str. 98, 99), Jamada za Aru i Malinvoa (o.c., str. 47), a Stout samo za Malinvoa (o.c., str. 109).

Za agregirani bilans ova jednačina glasi

$$y^+ = (I - A^+) \cdot x^+$$

Da bi ova relacija ostala tačna, potrebno je da y^+ bude

$$y^+ = Gy$$

odnosno pošto smenimo y^+ i y sa gornjim izrazima:

$$(I - A^+) x^+ = G(I - A)x,$$

$$x^+ - A^+x^+ = Gx - GAx,$$

$$Gx - A^+x^+ = Gx - GAx,$$

$$(7) \quad A^+x^+ = GAx$$

Smenjujući u ovoj jednačini $x^+ = Gx$, dobijamo

$$A^+Gx = GAx,$$

odnosno

$$(8) \quad A^+G = GA,$$

a stavljajući u (7) $A^+ = GAG_0'$ dobijamo:

$$GAG_0' x^+ = GAx,$$

odnosno:

$$(9) \quad x = G_0' x^+.$$

Sa (8) i (9) date su situacije kad relacija $y^+ = (I - A^+) x^+$ ostaje tačna; to su uslovi dopustive agregacije pri drugoj njenoj definiciji. Prvi uslov je istovetan ranije dobijenom, datom u (4), odnosno (5): mogu se udruživati sektori koji imaju jednake strukture troškova. Drugi uslov kazuje: mogu se udruživati sektori koji proizvode u istoj srazmeri, $x_j : x_k = \text{const}$. Zaista, ako se agregiraju j -ti i k -ti sektor i kad se ponderi u G_0' obeleže sa c_1 i c_2 , može se (9) napisati ovako:

$$x_i = x_j, \text{ za } i = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, k$$

$$(10) \quad x_j = c_1 (x_j + x_k)$$

$$x_k = c_2 (x_j + x_k),$$

tj. x_j i x_k treba da budu proporcionalni ($x_j : x_k = c_1 : c_2$).

Uporedimo ovaj uslov sa drugim uslovom dobijenim na osnovu prve definicije dopustive agregacije, datim u (6), po kojima se izvedeni rezultati i razlikuju. U (6) traži se da sektori koji se udružuju imaju jednake koe-

ficijente raspodele, $h_j = h_k$, gde su h_j i h_k vektori koeficijenata raspodele sektora j i k koji se udružuju. Prevedeno na izraze tehničkih koeficijenata:

$$h_j = (h_{ji})_{i, n} = \left(a_{ji} \frac{x_i}{x_j} \right)_{i, n},$$

$$h_k = (h_{ki})_{i, n} = \left(a_{ki} \frac{x_i}{x_k} \right)_{i, n},$$

odnosno:

$$\left(a_{ji} \frac{x_i}{x_j} \right) = \left(a_{ki} \frac{x_i}{x_k} \right),$$

i

$$(11) \quad a_{ki} = \frac{x_k}{x_j} a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tj. sektori koji se udružuju treba da imaju proporcionalne tehničke koeficijente po redovima, a koeficijent proporcionalnosti je količnik obima proizvodnje tih sektora. Prema (10) traži se da sektori koji se udružuju imaju proporcionalne obime proizvodnje. Zahtevi u (6) i (10) odnose se na različite veličine, koje nisu u međusobnoj vezi, i zato se ovi uslovi razlikuju; oni se ne podudaraju, niti jedan drugog uključuju. Zato situacija (6) ne obezbeđuje tačnost relacije $y^+ = (I - A^+)x^+$ i ne dozvoljava agregiranje sa gledišta druge definicije dopustive agregacije. Isto tako, agregiranje po uslovu (10) ne omogućuje povratak na neagregirani bilans.

Iz dve definicije dopustive agregacije izvedene su tako tri situacije kad se sektori mogu korektno udruživati: (1) kad imaju jednake tehničke koeficijente proizvodnje (strukture troškova), (2) kad proizvode u stalnoj proporciji i (3) kad imaju jednake koeficijente raspodele. To bi bio i redosled prihvatljivosti ovih uslova: uslov (1) važi i pri prvoj i pri drugoj definiciji dopustivog agregiranja, a uslov (2) zadovoljava kriterijum agregiranja koji je važniji — tačnost međusektorskih relacija. Načelo tačnosti međusektorskih relacija značajnije je od načela omogućavanja povratka na neagregirani bilans, jer je osnovna svrha obrazovanja bilansa upravo u primeni međusektorskih relacija.

U praksi se, naravno, ne mora tražiti potpuno zadovoljavanje jedne od navedenih situacija, npr. identičnost struktura troškova ili stroga proporcionalnost obima proizvodnje sektora koji se udružuju. Može se tražiti približno ispunjavanje tih uslova, koje će dovesti do grešaka i odstupanja koja neće biti značajna i koja se mogu zanemariti. Ali ni to neće mnogo pomoći u rešavanju agregacije. Situacije (1) i (3), kao što se i moglo očekivati, skoro da se i ne sreću u praksi. Preostaje mogućnost da se agregiranje izvodi na osnovu uslova proporcionalnosti proizvodnje sektora, koji se mnogo češće sreće. Njega nalazimo kod sektora koji se odnose na različite faze obrade jednog finalnog produkta. Npr. kod sektora: proizvodnja gvozdene rude, proizvodnja sirovog gvožđa i proizvodnja čelika, i uopšte kod sektora koji označavaju: proizvodnju sirovine (ekstraktivna delatnost), proizvodnju faznih produkata iz ove sirovine i proizvodnju finalnih produkata. Pri tome

je potrebno da je proces proizvodnje finalnog produkta kompletiran u okviru nacionalne privrede i da je manje-više zatvoren: da se ne uvozi ili izvozi u značajnijim količinama neki fazi produkt, tada je proporcionalnost produkcije uslovljena tehnologijom proizvodnje i može se smatrati stabilnom¹⁴). Ali, agregiranje sektora samo po ovom osnovu neće biti dovoljno: razmer međusektorske tabele (broj sektora) ostao bi još uvek vrlo veliki i tako detaljna klasifikacija bila bi u praksi neizvodljiva.

Zato se u istraživanjima problema agregacije pošlo drugim putevima. Prvo, umesto ranije navedenih kriterijuma dopustive agregacije, koji su se pokazali kao suviše strogi, tražili su se blaži kriterijumi koji bi omogućili veći stepen udruživanja. Drugo, kad su pri agregiranju u praksi već neizbežna odstupanja i greške — tražiti onda, umesto uslova savršene agregacije, onu kombinaciju udruživanja u konkretnoj privrednoj strukturi koja izaziva najmanja odstupanja, koja minimizira grešku. I kao nov pristup: analiza problema agregacije pomoću teorije informacija. Uopšte uzev, istraživanje problema agregacije postalo je šire i kompleksnije i može se obeležiti kao merenje agregacije: merenje mogućnosti udruživanja u konkretnim privrednim strukturama, datim međusektorskim tabelama i merenje posledica agregiranja.

Osvrnimo se na istraživanja u tom pravcu Fišera, Jamade, Kosova, Skolke i Tejla. Fišer je pošao u rešavanju problema agregacije statističkim putem¹⁵). Treba preći od date n -sektorske matrice tehničkih koeficijenata na matricu sa određenim brojem sektora, m . Moguće je to uraditi na veliki, ali konačan, broj načina, kombinujući sva moguća udruživanja pojedinih sek-

tora; broj načina iznosi $N = \binom{n}{m}$. Između ovih kombinacija udruživanja treba izabrati najbolju. Za kriterijum ocene uzima se odstupanje originalnih tehničkih koeficijenata od agregiranih koeficijenata izraženih kao prostih proseka, a kao mera suma kvadrata tih odstupanja. Uzmimo kombinaciju u kojoj se, pored drugih udruživanja, udružuju 1, 2 i 3 sektor u novi I . sektor. Obeležimo:

$$a_{1j} = \sum_{i=1}^3 a_{ij}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$a_I = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{13}}{3}$$

$$d_I = \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - a_I)$$

¹⁴) Udruživanje sektora srodnih po tome što obeležavaju različite faze u proizvodnji jednog finalnog produkta predlagano je u razmatranju klasifikacije produkata i ranije, pre matematičke analize agregacije, kao izv. kriterijum vertikalnog grupisanja. Iako on nije identičan sa uslovom (2), izvedenim iz kvantitativne analize agregacije, može se ipak smatrati kao njegov izraz u ekonomskoj praksi.

¹⁵) Fisher W. D., Criteria for aggregation in input-output analysis, The Review of Economic and Statistics, 1958, No 3.

Ova odstupanja treba uzeti i za novoobrazovani *II, III, ... m* sektor u istoj kombinaciji udruživanja. Za meru efektivnosti (korisnosti) pojedinih kombinacija udruživanja uzima se suma kvadrata ovih odstupanja:

$$D = \sum_{s=I}^m d_s^2, \quad s = I, II, \dots, m.$$

Drugim rečima, traži se, kao najbolja, ona kombinacija udruživanja kod koje je zbir kvadrata odstupanja najmanji, tj. rešava se zadatak

$$D_s = \sum_{s=I}^m d_s^2 = \min., \quad l = 1, 2, \dots, N.^{16)}$$

Jamada je uveo kriterijum stabilnosti tehničkih koeficijenata¹⁷⁾. Ovaj kriterijum je u stvari oslabljen kriterijum nepromenljivosti međusektorskih relacija. Naime, pri polazenju od ovog poslednjeg kriterijuma dobijaju se dve situacije kad je udruživanje perfektno (date kod nas u 5 i 10) i pri takvom udruživanju koeficijenti u agregiranoj matrici su stabilni, nepromenljivi u odnosu na vektor proizvodnje. Kako te dve situacije ne moraju biti i jedine pri kojima agregirani tehnički koeficijenti ostaju stabilni, to je kriterijum stabilnosti tehničkih koeficijenata blaži od kriterijuma nepromenljivosti međusektorskih relacija; ali, teško je utvrditi koliko je on blaži i koliko se sa njim povećava mogućnost udruživanja.

Kosov (o.c., str. 107—118) je predložio da se udružuju sektori sa najbližijim strukturama troškova i da se za meru sličnosti uzme koeficijent korelacije između odnosnih vektora u Leontijevljevoj matrici ($I-A$) proširenoj sa utrošcima primarnih faktora:

$$s_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_{ij} - a_{ij}) (\delta_{ik} - a_{ik})}{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_{ij} - a_{ij})^2 \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_{ik} - a_{ik})^2},$$

gde su δ_{ij} elementi Kronekerove matrice (za $i = j$ elementi su jedinice, a za $i \neq j$ nule), a indeksi $n+1, \dots, n+1$ se odnose na utroške primarnih faktora, tj. utroške koji nisu uključeni u matricu A . Ovaj izraz nije potpuno tačna mera linearne korelacije između struktura troškova, pošto se računa sa elementima ovih struktura oduzetih od elemenata Kronekerove matrice; to

¹⁶⁾ Prema Kosovu (o.c., str. 106), Fišer je pored ovog dao i složeniji oblik zadatka minimiziranja rastojanja.

¹⁷⁾ Jamada navodi četiri kriterijuma koja se mogu primeniti u agregiranju sektora: nepromenljivosti međusektorskih relacija, stabilnosti tehničkih koeficijenata, vertikalnog i horizontalnog objedinjavanja i udruživanje međusobno zamenljivih produkata. Između ovih, on analizira prva dva kriterijuma (o.c., str. 37—60).

je učinjeno verovatno zbog pojednostavljenja računa, iz koga se tako eliminišu aritmetičke sredine, koje su

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_{ij} - a_{ij}) = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_{ik} - a_{ik}) = 0.$$

Ali, za matrice velikih razmera s_{ij} će biti dobra mera korelacije između vektora troškova, jer će tada uticaj dva sabirka u s_{ij} koji deformišu pravu meru korelacije,

$$(\delta_{ij} - a_{ij}) (\delta_{jk} - a_{jk}) \text{ i } (\delta_{kj} - a_{kj}) (\delta_{kk} - a_{kk}), \text{ biti mali.}$$

Metod agregiranja koji predlaže Kosov može se prihvatiti kao komplementaran, uz druge kriterijume udruživanja. Sam za sebe on je manje opravdan i pogodan od metoda udruživanja po osnovi nekih drugih kriterijuma, npr. kriterijuma neizmenljivosti međusektorskih relacija, sa kojim ima zajedničkih crta. Ovaj drugi kriterijum daje dve situacije kad je agregiranje perfektno: kad se udružuju sektori koji imaju identične strukture troškova; ili proizvode u stabilnoj proporciji. Metod Kosova polazi od ideje da se oslabi prvi uslov: umesto da se udružuju sektori sa identičnim vektorima troškova, treba udruživati sektore sa najbližijim vektorima troškova, i utvrđuje meru te sličnosti, s_{ij} . Znači, ublažava se samo jedna situacija, i to situacija koja se vrlo retko i približno sreće u praksi (kao što smo videli, druga situacija — proporcionalnost proizvodnje — mnogo je češća), pa se može reći da je kriterijum Kosova strožiji od kriterijuma neizmenljivosti međusektorskih relacija. Drugo, u praksi se teško mogu utvrditi utrošci primarnih faktora za početni, širi bilans, pa se u s_{ij} računa samo sa utrošcima iz matrice A , kako i sam Kosov ističe (o.c., str. 108); tada će koeficijent korelacije s_{ij} biti visok i za sektore čije su strukture troškova približno proporcionalne, a ne samo približno iste, a za udruživanje u tom slučaju ne može se naći razlog.

Navedeni radovi Fišera, Jamade i Kosova čine, izvesno, vredne doprinose u istraživanju problema agregacije u međusektorskom modelu. Međutim, treba istaći jedan njihov zajednički rezultat: oni nisu doveli do formulisanja praktičnih kriterijuma agregacije, za razliku od analize koja je pošla od savršene agregacije. Odsustvo praktičnih kriterijuma udruživanja ima za posledicu da se mora raditi sa izvornim, neagregiranim bilansom, tj. sa matricama vrlo velikog razmera, što znači da treba rešavati složene probleme u prikupljanju informacija i u računskim operacijama.

Radovi J. Skolke i H. Tejla obeležavaju sasvim nov pristup istraživanju problema agregacije međusektorskih bilansa¹⁸⁾. U tim istraživanjima oni primenjuju analitički aparat teorije informacija. Pomoću mere informacije međusektorske tabele ispituju se načini udruživanja sektora koji najmanje sužavaju raspoloživu informaciju, najmanje smanjuju informacioni sadržaj tabele.

¹⁸⁾ Skolka J., *Primenenie mery količestva informacii pri agregirovanii mežotraslevih balansov*, u zborniku *Problemi optimalnogo planirovanija*, Ekonomika, Moskva, 1966, str. 146—156. Theil H., *Economics and Information Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1967, glava 9.

Polazi se od proširene tabele međusektorskih tokova, koja uključuje i raščlanjene troškove primarnih faktora.

Sektori	1	2	...	n	$\sum_{j=1}^n x_{ij}$
1.	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	z_1
2.	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	z_2
...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	z_n
Troškovi primarnih faktora	$x_{n+1,1}$	$x_{n+1,2}$...	$x_{n+1,n}$	z_{n+1}

	$x_{n+l,1}$	$x_{n+l,2}$...	$x_{n+l,n}$	z_{n+l}
$\sum_{i=1}^{n+l} x_{ij}$	x_1	x_2	...	x_n	$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{i=1}^{n+l} z_i$

Uvode se ove oznake:

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

$$p_{i.} = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

$$p_{.j} = \frac{x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

Pri tome je:

$$\sum_{i=1}^{n+l} \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n+l} p_{i.} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n p_{.j} = 1$$

Za utvrđivanje informacionog sadržaja ove tabele koristi se Šenonova mera entropije iz teorije informacija. Ona je za skup od N elemenata sa verovatnoćama p_i data sa $H = -\sum_{i=1}^N (p_i \log p_i)$. Za skup predstavljen tabelom međusektorskih tokova entropija će biti:

$$(12) \quad H = -\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n p_{ij} \log p_{ij}$$

Vrednost H kreće se od nule, kad je jedno p_{ij} jednako 1 a svi ostali p_{ij} jednaki nuli, do $\log n(n+1)$, u slučaju kad su sve verovatnoće jednake među sobom $p_{ij} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Smatra se da je informacioni sadržaj tabele nula onda kad ona ima maksimalnu entropiju, tj. kad su sve verovatnoće jednake $p_{ij} = \frac{1}{n(n+1)}$. Tada su svi elementi x_{ij} u prethodnoj tabeli jednaki među sobom i strukture, koju ova tabela inače treba da prikaže, u stvari i nema; informacioni sadržaj koji treba da izrazi različitost strukture je nula. U definisanju ove mere informacije pošlo se u stvari od zadatka obrazovanja, rekonstruisanja neke strukture (vektora, matrice i sl.) na osnovu informacija sa kojima se raspolaže. Ako se ne raspolaže ni sa kakvom informacijom o međusektorskoj strukturi društvenog bruto proizvoda, ako je dakle informacija o tome jednaka nuli, ova struktura data u tabeli može se rekonstruisati samo tako što ćemo uzeti sve $p_{ij} = \frac{1}{n(n+1)}$; entropija (kao mera neodređenosti uopšte) međusektorske tabele koju smo rekonstruisali na osnovu nulte informacije je maksimalna.

Ako raspolažemo sa izvesnim informacijama o strukturi tabele, rekonstruisana tabela međusektorskih tokova imaće veći informacioni sadržaj i manju entropiju. Uzmimo da znamo strukturu vektora x i vektora z , tj. marginalne verovatnoće p_i i p_j ; tada međusektorsku tabelu možemo rekonstruisati uzimajući $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ (postoji najveća verovatnoća da tabela tako izgleda ako prihvatimo da elementi u tabeli primaju moguće vrednosti slučajno). Entropija tabele sa marginalnom informacijom biće:

$$\begin{aligned} H_m &= -\sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij} = -\sum_i \sum_j p_i \cdot p_j \log (p_i \cdot p_j) = \\ &= -\sum_i \sum_j p_i \cdot p_j \log p_i - \sum_i \sum_j p_i \cdot p_j \log p_j, \end{aligned}$$

odnosno:

$$H_m = -\sum_i p_i \log p_i - \sum_j p_j \log p_j = -\sum_i p_i \log p_i - \sum_j p_j \log p_j$$

i kako je

$$\sum_{j=1}^n p_{\cdot j} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} p_{i \cdot} = 1,$$

$$(13) \quad H_m = - \sum_{i=1}^{n+1} p_{i \cdot} \log p_{i \cdot} - \sum_{j=1}^n p_{\cdot j} \log p_{\cdot j}.$$

Kao meru informacionog sadržaja međusektorske tabele Skolka uzima razliku njene marginalne i stvarne (normalne) entropije:

$$(14) \quad I = H_m - H.$$

Ova mera je razumljiva, pošto je marginalna informacija ono što uvek znamo kod agregiranja međusektorske tabele; to je u našem slučaju najmanja raspoloživa informacija i nju uzimamo za nultu tačku u merenju informacionog sadržaja međusektorske tabele.

Izraz (14) može se transformisati:

$$I = - \sum_i p_{i \cdot} \log p_{i \cdot} - \sum_j p_{\cdot j} \log p_{\cdot j} + \sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij} =$$

$$= - \sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{i \cdot} - \sum_j \sum_i p_{ij} \log p_{\cdot j} + \sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij},$$

$$(15) \quad I = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot} p_{\cdot j}}. \quad 19)$$

Kad se radi o agregiranju sektora, ova mera izražava mogućnost udruživanja sektora koje sadrže konkretne tabele međusektorskih tokova. Ukoliko su strukture u ovoj tabeli date redovima i kolonama sličnije, u smislu kolinearnosti vektora, utoliko je vrednost I manja i utoliko su veće mogućnosti za sažimanje tabele. U graničnom slučaju, kad je $p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j}$, tj. kad su svi redovi u matrici $(p_{ij})_{n+1, n}$ među sobom proporcionalni i sve kolone takođe, biće vrednost I najmanja: $I = 0$, i tabela se tada može potpuno sažeti, u skalar: originalnu tabelu možemo uvek tačno rekonstruisati na osnovu jednakosti $p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j}$. Uslov $p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j}$ preveden na izraz tehničkih koeficijenata, preko

$$p_{ij} = a_{ij} \cdot p_{\cdot j}$$

i

$$p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j}$$

prima oblik:

$$(16) \quad a_{ij} = p_{i \cdot}.$$

To znači da će vrednost I biti nula kad svi sektori imaju jednake strukture troškova. Tada je potpuno agregiranje, udruživanje svih sektora u jedan, zaista moguće; taj uslov je dobijen i ranije, pri drugim kriterijima agregacije.

¹⁹⁾ Vrednost I zavisi i od razmera tabele, pa je I uporedivo za tabele istog razmera. Inače, Skolka obrazuje i odnos I/H kao relativnu meru informacionog sadržaja.

Izuzimajući ovaj granični slučaj, udruživanje sektora treba da bude tako izvedeno da najmanje smanjuje informacijski sadržaj međusektorske tabele. Analizirajući ovaj zadatak, Skolka dolazi do tri faktora koji određuju obim osiromašenja informacija:

- a) sličnost strukture troškova sektora koji se udružuju,
- b) sličnost strukture raspodele,
- c) obimi proizvodnje sektora koji se udružuju (ukoliko su oni manji utoliko je i smanjenje I manje).

Kao što se vidi, dobijena su dva uslova do kojih se i ranije došlo, prilikom istraživanja savršene agregacije. Nov je treći uslov, ali je i on malo biti izveden (mada nije) iz kriterijuma neizmenljivosti međusektorskih relacija ili kriterijuma minimiziranja greške, pošto je razumljivo da će apsolutna greška biti manja ako se udružuju sektori sa manjim obimima proizvodnje. To ne umanjuje značaj informacionog pristupa problemu agregacije u međusektorskom modelu. On se pokazuje širim i svestranijim nego pristup od ranije navedenih kriterijuma. On zato omogućuje objektivnije merenje agregacije: mogućnosti agregiranja konkretnih međusektorskih tabela i efekata udruživanja. I zatim, ovaj pristup će verovatno pružiti još više, s obzirom da su navedeni rezultati izvedeni skoro u celini u prvom radu ove vrste (Skolka, o.c.); to već pokazuje i navedeni rad Tejla.

Analiza agregacionog problema pomoću teorije informacija je u Tejlovom radu poboljšana i dalje razvijena²⁰). U tom pogledu treba naročito istaći dekompoziciju jednačine informacionog gubitka. Gubitak informacionog sadržaja koji nastaje agregiranjem međusektorske tabele

$$I - I^+$$

gde je I^+ informacijski sadržaj agregirane tabele, Tejl je — pošto je uveo verovatnoće za agregirani bilans i za sektore koji se udružuju — razložio na tri nenegativna sabirka (komponente). Prva komponenta je mera heterogenosti kolona tabele, druga — mera heterogenosti redova, a treći sabirak meri stepen odstupanja verovatnoća p_{ij} od verovatnoća datih jednačinom $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ u okviru sektora koji se udružuju (analogno 15 koje to meri za celu tabelu). To omogućuje analizu informacionog gubitka za konkretne međusektorske tabele; sa tim su strogo izvedeni i faktori osiromašenja informacija a) i b) koje je naveo Skolka.

U zaključku bi se moglo reći da su navedene analize, i sa stanovišta savršene agregacije (Hatanaka, Ara, Malinvo), i koje su pošle od drugih kriterijuma (Fišer, Jamada, Kosov), i sa informacionim pristupom (Skolka i Tejl), u velikoj meri osvetlile problem agregacije tabele međusektorskih tokova proizvodnje. U mnogome one su komplementarne, pošto se problemu

²⁰) Mi smo već uključili neka poboljšanja koja je učinio Tejl. Prvo, oznake za verovatnoće iz tabele; Skolka računa sa pet vrsta verovatnoća koje odgovaraju strukturama svakog dela tabele, što je glomaznije. Drugo, obrazac (15) kao oblik mere informacionog sadržaja podesejniji za analizu, i rezultat (16). Inače, verovatno je Tejlov rad u znatnoj meri nezavisan od rada Skolke, objavljenog prvi put 1964. god. Tejl se u navedenom radu poziva na jedan njegov zajednički rad sa P. Uršbe, objavljen 1965. god. a upućuje čitaoca i na rad Skolke sa »sličnim pristupom«. Za (15) Tejl kaže da je mera informacionog sadržaja koju je predložio Skolka (o.c., str. 331 i 333).

pristupalo sa različitih aspekata, različitih zahteva koje je grupisanje sektora trebalo da zadovolji; u tom pogledu trebalo bi izdvojiti kao važnije: polaznje od kriterijuma neizmenljivosti međusektorskih relacija, koji je za međusektorsku analizu najopravdaniji, i informacioni pristup, koji nam se čini najsvestraniji. Sve ove analize pokazale su da je agregacioni problem vrlo složen i da nema jednostavnih rešenja: praktično se ne može izvesti grupisanje bez nepovoljnih posledica, a u rešavanju agregiranja konkretne međusektorske tabele, bilo koji metod da se prihvati, srećemo se sa vrlo obimnim računskim postupkom.

(Rad primljen juna 1969.)