PROIZVODNO-KAPITALNI EKONOMETRIJSKI MODEL

— Optimalna aproksimacija —

*Dančika NIKOLIĆ**

1. *Pristupna razmatranja problema*

U konstrukciji proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela prolazi se kroz više raznih faza. Ovde ćemo u teorijskom pogledu proći kroz sve važnije faze. Pri tome ćemo uočiti da postoji problem aproksimacije modelskih vrednosti stvarnim empiričkim vrednostima endogenih promenljivih veličina. Pošto uočeni problem pobliže opišemo i definišemo, pristupićemo njegovom rešavanju. Potom ćemo dobijeno rešenje formulisati u obliku teoreme o određenoj optimalnoj aproksimaciji proizvodno-kapitalnog modela. Naposletku daćemo i ilustrativni primer konstrukcije proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela sa takvom optimalnom aproksimacijom.

Međutim, da bi ceo postupak bio jasniji i pregledniji, daćemo prethodno kratak pregled svih važnijih faza kroz koje smo u toku izvođenja prošli.

Prva i polazna faza sastoji se u određivanju obima i sadržaja proizvodno-kapitalnog modela. U drugoj fazi se određuje matematički oblik sistema diferencnih jednačina, koje u osnovi definišu konstruisani proizvodno-kapitalni model. Treća faza obuhvata rešavanje definicionog sistema diferencnih jednačina i predstavljanje svih endogenih promenljivih veličina u njihovom eksplicitno i partikularno rešenom obliku. Posle toga se u četvrtoj fazi daje metod numeričkog ocenjivanja i specificiranja svih egzogenih promenljivih veličina i vrši njihova detaljna analiza sa gledišta aproksimativnosti stvarnim empiričkim vrednostima.

Upravo u toj fazi izvođenja zapaža se da postoji osetan problem aproksimacije modelskih vrednosti stvarnim empiričkim vrednostima endogenih promenljivih veličina. Naime, detaljnija analiza je pokazala da cela modelska aproksimacija stvarnosti zavisi u znatnoj meri od samo jedne empiričke vrednosti endogene promenljive veličine u početnom godišnjem periodu. Da bi se uticaj ove stohastičke vrednosti otklonio, trebalo ju je zameniti adekvatnijom vrednošću, koja će omogućiti

---

*) Autor je viši savetnik u Saveznom zavodu za privredno planiranje u Beogradu.

odgovarajuću optimalnu aproksimaciju modela stvarnosti. Zbog toga se u sledećoj fazi pristupilo rešavanju uočenog problema i nađeno odgovarajuće rešenje formulisalo u obliku prikladne teoreme.

U zadnjoj fazi izvođenja obrađen je ilustrativni primer konstruisanja proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela Jugoslavije za period 1952—1965. godine. U tom primeru primenjena je formulisana teorema o određenoj optimalnoj aproksimaciji proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela.

2. *Teorijsko konstruisanje proizvodno-kapitalnog modela*

U ovom delu rada obuhvatićemo prve tri faze izvođenja, jer one kao povezana celina predstavljaju teorijsko konstruisanje proizvodno-kapitalnog modela.

Već sam naziv ovog modela ukazuje da je njegov sadržaj određen društvenim proizvodom i osnovnim sredstvima u privredi. Međutim, obim ovog modela sadržajno je proširen i novim opredmećenim investicijama u osnovnim sredstvima u privredi, koje u stvari predstavljaju godišnje priraštaje osnovnih sredstava u privredi. Prema tome, ovaj model sa odgovarajućim oznakama i nazivima sadrži sledeće tri endogene promenljive veličine:

D — ukupan društveni proizvod,
K — osnovna sredstva u privredi,
I — nove opredmećene investicije u osnovnim sredstvima u privredi.

Ovim endogenim promenljivim veličinama određen je obim i sadržaj proizvodno-kapitalnog modela. Preostaje da se odredi i njegov matematički oblik. A to konkretno znači da treba matematički formulisati i definisati proizvodno-kapitalni model. To je učinjeno pomoću sledećeg sistema simultanih diferencnih jednačina u opštem i partikularno nerešenom obliku:

$$\begin{aligned} \Delta D(t) &= a\Delta K(t) \\ \Delta I(t) &= b\Delta D(t) \\ I(t) &= \Delta K(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Sistem modelskih diferencnih jednačina (1) u osnovi konstituiše proizvodno-kapitalni matematički model u opštem i partikularno nerešenom obliku. Ovaj model ima baziičan karakter, jer su u njemu uloge primarno determinirajućih faktora proizvodnje dodeljene osnovnim sredstvima u privredi i odgovarajućim novim opredmećenim investicijama u osnovnim sredstvima u privredi. A to konkretno znači da on može da ima ulogu jezgra, koje se dalje proširuje i nadograđuje kako elementima pojedinih modela, tako i čitavim drugim modelima[1]). Nameće se

[1]) D. Nikolić i P. Sicherl: »Konstrukcija proizvodno-kapitalnog modela za privredni razvoj Jugoslavije«. Ovaj rad je objavio Jugoslovenski institut za ekonomska istraživanja u ediciji: »Radovi 5«, Beograd, avgust 1964. god. Isto tako objavio ga je i Savezni zavod za privredno planiranje u zborniku radova svoje edicije »Studije 13«: Dr B. Horvat, D. Nikolić, P. Sicherl, »Elementi metodologije planiranja dugoročnog privrednog razvoja«, Beograd, septembar 1964. god.

očigledan zaključak da ovaj model može da bude bazično jezgro i čitavog sintetičkog sistema ekonomskih modela[2]).

Međutim, radi praktične primene neophodno je da se sistem modelskih diferencnih jednačina (1) reši. Na osnovu i posle odgovarajućeg rešavanja, polazni sistem simultanih diferencnih jednačina u opštem i partikularno nerešenom obliku (1) može se napisati u sledećem opštem i partikularno rešenom obliku:

$$
\begin{aligned}
D(t) &= F(o)\ T(t) - \frac{b'}{b} \\
K(t) &= \frac{1}{a}\ F(o)\ T(t) - \frac{1}{a}\left(\frac{b'}{b} + a'\right) \qquad (2) \\
I(t) &= b\ F(o)\ T(t)
\end{aligned}
$$

Ovaj opšti i partikularno rešeni oblik sistema jednačina (2) omogućuje da se praktično i neposredno pristupi konstruisanju odgovarajućeg proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog analitičkog modela za posmatrani protekli period. Pošto je ovaj sistem jednačina (2) rešen i eksplicitno, to je dovoljno da se na njegovoj desnoj strani sve egzogene promenljive veličine (parametri) ocene i numerički specificiraju, pa da se on od matematičkog modela pretvori u odgovarajući ekonometrijski model.

Ali pre nego što se pristupi konstruisanju samog proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog analitičkog modela, neophodno je uz sistem jednačina (2) dati još izvesna dopunska objašnjenja. Naime, u sistemu jednačina (2) su radi kratkoće u pisanju uvedene dve simboličke oznake $F(o)$ i $T(t)$. Prva oznaka $F(o)$ ima fiksnu parametarsku vrednost i predstavlja sledeći algebarski izraz:

$$F(o) = D(o) + \frac{b'}{b}, \qquad (3)$$

dok druga oznaka $T(t)$ ima varijabilnu funkcionalnu vrednost i predstavlja sledeći funkcionalno-eksponencijalni izraz:

$$T(t) = \left(\frac{1}{1-ab}\right)^{t}. \qquad (4)$$

Isto tako, pre nego što se pristupi konstruisanju samog proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog analitičkog modela, neophodno je da se objasne sve egzogene promenljive veličine, koje su parametarski upotrebljene u sistemu simultanih matematičkih jednačina (2), (3) i (4). Zbog toga se navodi spisak svih upotrebljenih parametara u tim jedna-

[2]) D. Nikolić i P. Sicherl: »Jedna strukturna analiza privrednog razvoja Jugoslavije u periodu 1952—1962. — Primena dezagregiranog proizvodno-kapitalnog modela«, Ekonomist, br. 1—2, Beograd, 1965. god. Isto tako, jednu redukovanu verziju ovoga rada objavio je na engleskom jeziku i Ekonomski institut Čehoslovačke akademije nauka u svom časopisu Czechoslovak Economic Papers, br. 8, Prag, 1967. god.

činama zajedno sa simboličkim oznakama kao i tekstuelnim objašnjenjima:

- a — marginalni koeficijent efikasnosti osnovnih sredstava u privredi
- a' — dopunski dinamizirajući parametar za marginalni koeficijent efikasnosti osnovnih sredstava u privredi
- b — marginalni koeficijent učešća novih opredmećenih investicija u osnovnim sredstvima u privredi u ukupnom društvenom proizvodu
- b' — dopunski dinamizirajući parametar za marginalni koeficijent učešća novih opredmećenih investicija u osnovnim sredstvima u privredi u ukupnom društvenom proizvodu
- $D(o)$ — fiksna empirička vrednost endogene promenljive veličine ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu (za $t = 0$)
- t — redni broj godišnjeg perioda ($t = 0, 1, 2, \ldots$); za godinu 1952. $t = 0$, za 1953. $t = 1$ i tako dalje sve do 1965. kada je $t = 13$.

Kao što se vidi, u gornjem spisku ima svega pet egzogenih promenljivih veličina, koje treba odrediti da bi se polazni matematički model mogao pretvoriti u ekonometrijski proizvodno-kapitalni model, ne računajući vreme (t) koje je praktično uvek poznato. Ali treba imati u vidu da je to minimalan broj neophodnih egzogenih promenljivih veličina. Osim njih svakako, pored fiksne empiričke vrednosti endogene promenljive veličine ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu — $D(o)$, treba navesti i ostale dve. A to su: fiksna empirička vrednost endogene promenljive veličine osnovnih sredstava u privredi u početnom godišnjem periodu — $K(o)$ i fiksna empirička vrednost endogene promenljive veličine novih opredmećenih investicija u osnovnim sredstvima u privredi u početnom godišnjem periodu — $I(o)$. Posle ovih napomena može se pristupiti kako određivanju, tako i analizi navedenih egzogenih promenljivih veličina.

3. *Određivanje i analiza egzogenih promenljivih veličina*

Neposredno i praktično konstruisanje odgovarajućeg proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog analitičkog modela sastoji se u tome da se na bazi odgovarajućih empiričkih statističkih serija u stalnim cenama matematičko-statistički ocene i numerički specificiraju sve egzogene promenljive veličine (parametri), koje se nalaze u partikularno i eksplicitno rešenom obliku odgovarajućeg sistema simultanih matematičkih jednačina (2), (3) i (4). Da bi se tome i konkretno pristupilo, potrebno je prethodno parametre a, a', b i b' numerički izračunati na osnovu empiričkih statističkih serija u stalnim cenama posmatranog analitičkog perioda za sledeće endogene promenljive veličine: ukupan društveni proizvod — $D(t)$, osnovna sredstva u privredi — $K(t)$ i nove opredmećene investicije u osnovnim sredstvima u privredi — $I(t) = K(t) - K(t-1)$. Naime, na bazi odgovarajućih empiričkih statističkih serija treba odrediti sledeće dve linearne stohastičke međuzavisnosti:

$$D(t) = a\,K(t) + a'$$
$$I(t) = b\,D(t) + b'. \qquad (5)$$

Pri tome, parametri a, a', b i b' po metodu najmanjih kvadrata izračunavaju se iz poznatih formula.

Preostaje još da se numerički odredi fiksna empirička vrednost endogene promenljive veličine ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu — $D(o)$, pa da bi se sistem algebarskih jednačina (2), (3) i (4) proizvodno-kapitalnog matematičkog modela mogao pretvoriti u odgovarajući sistem numeričkih jednačina proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela za posmatrani protekli analitički period. Međutim, kao što je već u prethodnom odeljku istaknuto pored fiksne vrednosti ukupnog društvenog proizvoda — $D(o)$, postoje još dve egzogene promenljive veličine iste vrste: fiksna vrednost osnovnih sredstava u privredi — $K(o)$ i fiksna vrednost novih opredmećenih investicija u osnovnim sredstvima u privredi — $I(o)$. Sada se nameće pitanje kako je došlo do toga da je dovoljno da se odredi samo jedna od postojeće tri egzogene promenljive veličine ove vrste? Isto tako, nameće se i pitanje zašto je uzeta baš fiksna vrednost ukupnog društvenog proizvoda — $D(o)$? Sledeća analiza ovih egzogenih promenljivih veličina daće odgovore na oba ova pitanja.

Pre svega, ove tri egzogene promenljive veličine nisu nezavisne o čemu se naročito u praktičnoj primeni mora strogo voditi računa, inače se može desiti da se dođe do pogrešnih, pa čak i do protivurečnih rezultata. Zavisnosti između ovih egzogenih promenljivih veličina proizilaze iz samog konstruisanog proizvodno-kapitalnog matematičkog modela, odnosno, njemu odgovarajućeg sistema modelskih jednačina (2), (3) i (4). Te zavisnosti se mogu izvesti iz tog sistema modelskih jednačina. Naime, taj sistem modelskih jednačina važi za svaku celobrojnu vrednost vremena t, pa i za vrednost početnog godišnjeg perioda $t = 0$. Kada se ta vrednost uvrsti u sistem modelskih jednačina (2), onda se dobija sledeći sistem zavisnosti između egzogenih promenljivih veličina u početnom godišnjem periodu:

$$K(o) = \frac{1}{a}\,[D(o) - a'] \qquad (6)$$
$$I(o) = b\,D(o) + b'$$

Kao što se vidi, ovaj sistem zavisnosti (6) ima samo dve jednakosti. Neposredan razlog za to leži u tome što je prva jednačina sistema modelskih jednačina (2) dovela do pune identičnosti. A dublji razlog za to leži u tome što treća jednačina polaznog sistema modelskih jednačina (1) u stvari ima definicioni karakter.

Sistem zavisnosti (6) kao jedinstvena celina, pored egzogenih promenljivih veličina vezanih za početni godišnji period $D(o)$, $K(o)$ i $I(o)$, sadrži i minimum neophodnih svih ostalih egzogenih promenljivih veličina. Taj minimum neophodnih ovih ostalih egzogenih promenljivih veličina predstavljaju upravo veličine osnovnih modelskih parametara, koji su kao takvi već objašnjeni i koji imaju oznake a, a', b i b'. Međutim, ono što je teorijski karakteristično i za praktičnu primenu bitno nije samo u tome što sistem zavisnosti (6), pored tri egzogene promenljive veličine vezane za početni godišnji period $D(o)$, $K(o)$ i $I(o)$, sadrži kao neophodan minimum i četiri osnovna modelska parametra a, a', b i b', već i u tome, što taj sistem zavisnosti (6) ima samo dve jednakosti. Naime, sada se može pristupiti praktičnom razrešavanju problematike, koja je vezana za taj sistem od dve uslovne jednakosti (6), a koje formulišu i definišu zavisnosti samo između upotrebljenih egzogenih promenljivih veličina.

Prema tome, iako i veličine vrednosti u početnom godišnjem periodu ovih odgovarajućih endogenih promenljivih veličina ($D(o)$, $K(o)$ i $I(o)$) i veličine osnovnih modelskih parametara (a, a', b i b') spadaju u kategoriju egzogenih promenljivih veličina, između njih ipak postoji posebna suštinska razlika. Ta razlika sastoji se u tome što su prve egzogene veličine potpuno statistički empiričke i kao takve potpuno opterećene stohastičkim varijacijama, dok su druge egzogene veličine već teorijskog karaktera i ekonometrijskim metodama ocenjene, tako da su do određenog maksimuma oslobođene stohastičkih varijacija. Prema tome, ove druge egzogene veličine (osnovni modelski paramteri) u potpunom su skladu sa teorijskim karakterom konstruisanog proizvodno-kapitalnog matematičkog modela, dok za one prve egzogene veličine (vrednosti u početnom godišnjem periodu svih odgovarajućih endogenih promenljivih veličina) to se već ne može reći, jer su potpuno konkretnog i statistički empiričkog karaktera.

Proizilazi da teorijski konstruisani proizvodno-kapitalni matematički model treba osloboditi od tih prvih egzogenih veličina do krajnjih granica mogućnosti. Za takvo eliminisanje tih prvih egzogenih veličina, koje su potpuno statistički empiričke i stohastičke, upravo je pogodan jedinstven i celovit sistem zavisnosti (6), koji konstituišu samo dve uslovne jednakosti. Naime, na osnovu tog sistema od dve uslovne jednakosti, koje su nezavisne i neprotivrečne, može se onoliki broj tih prvih egzogenih veličina koliko ima uslovnih jednakosti izraziti pomoću svih drugih egzogenih veličina (osnovnih modelskih parametara) i onolikog broja od prvih egzogenih veličina koliko ih ima više od broja uslovnih jednakosti u sistemu zavisnosti (6).

Praktično proizilazi da od sve tri egzogene veličine prve vrste [$D(o)$, $K(o)$ i $I(o)$] samo dve od njih mogu biti izražene pomoću svih ostalih egzogenih veličina druge vrste (a, a', b i b') i samo jedne egzogene veličine prve vrste. U sistemu zavisnosti (6) upravo tako je učinjeno. Naime, egzogene veličine $K(o)$ i $I(o)$ izražene su pomoću osnovnih modelskih parametara a, a', b i b' kao i egzogene veličine prve vrste $D(o)$. A to znači da nužno jedna od egzogenih veličina prve vrste, u konkretnom slučaju veličina $D(o)$, ne može biti eliminisana iz opšteg i partikularno rešenog oblika sistema modelskih jednačina (2), uključujući tu svakako i jednakosti (3) i (4). Ostale dve egzogene veličine prve vrste $K(o)$ i $I(o)$ mogle su se eliminisati pomoću dve jednakosti sistema zavisnosti (6). Time je ujedno dat odgovor na prvo pitanje, koje se nužno nametnulo.

Preostaje još da se odgovori i na drugo pitanje, koje se takođe nužno nametnulo. Međutim, odgovor na to pitanje ne zahteva neku posebnu analizu ili izvođenje. Naime, svaka od tri egzogene veličine može se zadržati kao jedna, koja nije eliminisana, dok se preostale dve eliminišu. Ovde je fiksna empirička vrednost ukupnog društvenog proizvoda $D(o)$ izrabrana za tu egzogenu veličinu prve vrste, koja nije eliminisana. Razlog za to nalazi se u činjenici da je ukupan društveni proizvod svakako najvažnija endogena promenljiva veličina, te da o njenoj aproksimaciji empiričkim podacima treba najviše voditi računa.

4. *Optimalna aproksimacija proizvodno-kapitalnog modela*

Detaljnija analiza egzogenih promenljivih veličina pokazala je da su se dve egzogene veličine prve vrste $K(o)$ i $I(o)$ mogle eliminisati pomoću dve jednakosti sistema zavisnosti (6) iz sistema modelskih jednačina (2), (3) i (4). Ali se isto tako pokazalo da preostala egzogena veličina prve vrste $D(o)$ ne može biti eliminisana iz tog sistema modelskih jednačina. A to znači da je problem eliminisanja egzogenih veličina prve vrste i dalje ostao nerešen. Naime, već sama prisutnost fiksne empiričke vrednosti ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $D(o)$ daje celokupnoj aproksimaciji proizvodno-kapitalnog modela stvarnom razvoju ipak stohastički karakter. Ne samo u praksi već i u teoriji konstruisanja ekonometrijskih modela pomoću metoda najmanjih kvadrata smatra se da je tu krajnja granica mogućnosti oslobađanja modela od stohastičkog karaktera, čiji su konkretni i neposredni nosioci upravo egzogene veličine prve vrste, te prema tome i fiksna empirička vrednost ukupnog društvenog proizvoda $D(o)$.

I zaista, nemoguće je eliminisati sve tri egzogene veličine prve vrste, jer uslovni sistem zavisnosti (6) ima svega dve jednakosti, koje omogućuju eliminisanje samo dve egzogene veličine prve vrste. Sada se postavlja pitanje da li su zaista iscrpljene sve granice mogućnosti? Naime, možda je moguće da se na neki način uvede još jedna uslovna jednakost koja bi omogućila eliminisanje stohastičke vrednosti ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $D(o)$, odnosno koja bi omogućila da se ta stohastička vrednost zameni nekom adekvatnijom teorijskom vrednošću. Pri čemu bi ta adekvatnija teorijska vrednost uticaj stohastike na model u pogledu nivoa svela na minimum. Ovde ćemo pokazati da je moguće izvesti još jednu uslovnu jednakost, koja omogućuje da se izračuna adekvatnija teorijska vrednost za ukupan društveni proizvod u početnom godišnjem periodu.

Tu još jednu uslovnu jednakost izvešćemo iz prve jednačine sistema algebarskih jednačina (2), koja ima sledeći opšti i partikularno rešeni oblik:

$$D(t) = F(o)\ T(t) - \frac{b'}{b} \tag{7}$$

Kada se sada analizira ova jednačina (7), onda se pre svega zapaža da njen slobodan član $-\frac{b'}{b}$ ima određenu konstantnu parametarsku vrednost. Na desnoj strani te jednačine nalazi se i proizvod dvaju faktora $F(o)$ i $T(t)$. Drugi od ova dva faktora ima varijabilnu funkcionalno-eksponencijalnu vrednost, a prvi od njih ima konstantnu parametarsko-algebarsku vrednost. Oni su definisani jednakostima (3) i (4).

Treba se malo zadržati na prvom faktoru, koji je definisan jednakošću (3). Naime, u tom faktoru se, pored parametarske vrednosti $\frac{b'}{b}$, nalazi i empirička stohastička vrednost ukupnog društvenog proizvoda $D(o)$. Zbog toga je i ceo izraz za prvi faktor $F(o)$ stohastičkog karaktera. Prema tome, može se postaviti uslovni zahtev da taj prvi faktor dobije takvu teorijsku vrednost koja će odstupanja teorijskih modelskih od stvarnih empiričkih vrednosti svesti na određen mogući minimum. A to se može u određenoj meri postići i linearnom regresionom aproksimacijom pomoću metoda najmanjih kvadrata, ne ulazeći i u druge metode optimalnog ocenjivanja. Međutim, odmah se nameće pitanje koje su to promenljive veličine koje treba regresiono korelirati kao stohastički međuzavisne.

Skoro je očigledno da ulogu stohastičke nezavisno promenljive veličine može i treba da odigra upravo već pomenuti drugi faktor $T(t)$ u ponovo napisanoj modelskoj jednačini (7). Vrednosti ove nezavisno promenljive veličine izračunavaju se iz definicione jednakosti (4). Da bi se našla i odgovarajuća zavisno promenljiva veličina, potrebno je preći na levu stranu modelske jednačine (7). Tu se na levoj strani nalazi endogena promenljiva veličina ukupnog društvenog proizvoda $D(t)$. Strogo uzevši, ova veličina ima modelsko-teorijski karakter, pa bi trebalo da se označi sa $\widehat{D}(t)$. Ali to je ostavljeno za kasnije, kada se ova matematička jednačina numerički specificira u ekonometrijsku jednačinu. Međutim, istini za volju, endogena promenljiva veličina ukupnog društvenog proizvoda $D(t)$ ima i statističko-empirički karakter, te kao takova može biti upotrebljena za odgovarajuću zavisno promenljivu veličinu, koja se regresiono korelira sa već utvrđenom nezavisno promenljivom veličinom $T(t)$ u linearnu stohastičku međuzavisnost.

Sada se može pristupiti utvrđivanju te linearne stohastičke međuzavisnosti između statističko-empiričke serije ukupnog društvenog proizvoda $D(t)$ i odgovarajuće izračunate serije $T(t)$. Ta linearna stohastička međuzavisnost u potpunosti ima isti oblik kao i sama modelska jednačina (7). Istina, u toj po obliku linearnoj jednačini (7) slobodan član $-\frac{b'}{b}$ ima već utvrđenu parametarsku veličinu, ali to ništa ne smeta, već samo skraćuje i olakšava posao. A to znači, da preostaje da se kao odgovarajuća parametarska vrednost izračuna još neodređena modelsko-teorijska veličina $F(o)$ uz uslov metoda najmanjih kvadrata, prema kome zbir kvadrata odstupanja empiričkih vrednosti $D(t)$ od odgovarajućih teorijskih $\widehat{D}(t)$ treba da bude minimalan. Taj uslov metoda najmanjih kvadrata može se ovde napisati u sledećem neposrednom i razvijenom obliku:

$$\Sigma(D(t) - \widehat{D}(t))^2 = \Sigma\left[D(t) - F(o).T(t) + \frac{b'}{b}\right]^2 = \min. \qquad (8)$$

Da bi taj uslov bio ispunjen sasvim je dovoljno da parcijalni izvod razvijenog izraza (8) po parametarskoj veličini $F(o)$ bude izjednačen sa nulom, pošto se parametarska veličina $-\frac{b'}{b}$ smatra već određenom i numerički specificiranom. Ovaj drugi i sasvim dovoljan uslov, koji proizilazi iz polaznog uslova (8), može se posle izvršenog parcijalnog diferenciranja po $F(o)$ napisati u sledećem obliku:

$$\Sigma\left[-T(t)\, D(t) + F(o)\, T^2(t) - \frac{b'}{b} T(t)\right] = 0 \qquad . \quad (9)$$

Iz ove uslovne jednakosti (9), posle određenog sređivanja i rešavanja, može se odrediti parametarska veličina $F(o)$. Međutim, izračunata vrednost neće se numerički poklapati sa odgovarajućom stohastičko-empiričkom vrednošću. Ova izračunata parametarska veličina $F(o)$ nema više stohastičko-empirički, već modelsko-teorijski karakter. Izračunata parametarska veličina $F(o)$ ima sada numeričku vrednost određene optimalne aproksimacije, jer ispunjava uslovnu jednakost metoda najmanjih kvadrata (9). Zbog toga, tako izračunata vrednost dobija oznaku $\widehat{F}(o)$. Tako označena vrednost ove optimalne aproksimacije izračunava se po sledećoj formuli:

$$\widehat{F}(o) = \frac{\Sigma\, T(t)\, D(t) + \frac{b'}{b}\, \Sigma T(t)}{\Sigma\, T^2(t)} \qquad (10)$$

Međutim, ovde je neophodno da se izračuna i vrednost određene optimalne aproksimacije ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu, koju ćemo takođe analogno označiti sa $\widehat{D}(o)$. Ova vrednost te optimalne aproksimacije ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $\widehat{D}(o)$ može se lako izračunati iz definicione jednakosti (3). Međutim, u toj definicionoj jednakosti (3) sada treba empiričku vrednost $F(o)$ zameniti novom vrednošću te optimalne aproksimacije, koja je izračunata po formuli (10). Isto tako, u toj definicionoj jednakosti (3) posle toga treba empiričku vrednost $D(o)$ zameniti novom vrednošću te optimalne aproksimacije, koja će se izračunati iz analogne sledeće formule:

$$\widehat{D}(o) = \widehat{F}(o) - \frac{b'}{b} \qquad (11)$$

Na ovaj se način došlo do vrednosti određene optimalne aproksimacije $\widehat{F}(o)$ i $\widehat{D}(o)$ po formulama (10) i (11), čime je u potpunosti eliminisan uticaj stohastike na aproksimaciju proizvodno-kapitalnog modela, jer je i preostala stohastička statističko-empirička egzogena veličina $D(o)$ eliminisana i zamenjena vrednošću određene optimalne aproksimacije $\widehat{D}(o)$. Ovim je izvođenje ove optimalne aproksimacije proizvodno-kapitalnog modela završeno. Ostaje da se kao završni rezime ukratko izloži postupak i rezultat optimalne aproksimacije proizvodno-kapitalnog modela u obliku sledeće teoreme.

U konstruisanju proizvodno-kapitalnog modela može se ostvariti određena optimalna aproksimacija. U tu svrhu neophodno je iz sistema modelskih jednačina (2), (3) i (4) eliminisati stohastičku vrednost egzogene veličine ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $D(o)$ i zameniti je odgovarajućom modelsko-teorijskom vrednošću ove optimalne aproksimacije $\widehat{D}(o)$. Ovo se postiže na taj način što se izvodi još jedna uslovna jednakost (9), koristeći pri tome uslov metoda najmanjih kvadrata, koji je napisan u obliku (8). Potom je iz uslovne jednakost (9) potrebno izvesti formulu (10), prema kojoj se može izračunati parametarska veličina $\widehat{F}(o)$, koja nema više stohastičko-empirički već modelsko-teorijski karakter, te koja ima numeričku vrednost ove optimalne aproksimacije. Posle toga, treba izračunatu vrednost za parametarsku veličinu $\widehat{F}(o)$ zameniti u formulu (11) i iz nje izračunati vrednost ove optimalne aproksimacije za ukupan društveni proizvod u početnom godišnjem periodu $\widehat{D}(o)$, koja takođe nema više stohastičko-empirički, već modelsko-teorijski karakter.

Na taj način je ostvarena određena optimalna aproksimacija prve jednačine sistema algebarskih jednačina (2), koja je ponovo bila napisana kao jednačina (7). Ali pošto se tu radi o konzistentnom sistemu matematičkih jednačina (2), (3) i (4), koje konstituišu proizvodno-kapitalni model, to je onda ostvarena određena optimalna aproksimacija i celog modela. A posle ove konstatacije može se pristupiti ilustrativnom primeru konstruisanja proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela sa ovom optimalnom aproksimacijom.

5. *Konstruisanje proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela*

Na kraju ćemo kao primenu teorijski izvedenih rezultata izvršiti konstruisanje globalnog proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog modela sa ovom optimalnom aproksimacijom za celu Jugoslaviju. Ovaj ekonometrijski model odnosiće se na analitički period od 1952. do 1965. god. Pošto je u dosadašnjem izlaganju teorijski već dat metod i način konstruisanja proizvodno-kapitalnog modela, sada preostaje da se neposredno i konkretno pristupi ekonometrijskom konstruisanju. A to znači da treba početi sa utvrđivanjem statističko-empiričke osnove za izvršenje izračunavanja i numeričke specifikacije svih parametara koji se nalaze u opštem i rešenom obliku sistema modelskih matematičkih jednačina (2), (3) i (4). Na taj način će se ovaj sistem matematičkih jednačina pretvoriti u odgovarajući sistem ekonometrijskih analitičkih jednačina.

Statističko-empiričku osnovu predstavljaju podaci o vremenskim serijama u posmatranom analitičkom periodu od 1952. do 1965. god. Ove vremenske serije odnose se na podatke o ukupnom društvenom proizvodu — *D(t)*, o osnovnim sredstvima u privredi — *K(t)* i o novim opredmećenim investicijama u osnovnim sredstvima u privredi — *I(t)*. Svi vrednosni podaci su iskazani u stalnim cenama reforme od jula 1965. god. kao što je to učinjeno i u Društvenom planu razvoja Jugoslavije od 1966. do 1970. god. U pogledu jedinica merenja i brojanja svi vrednosni podaci ovih vremenskih serija su izraženi u milijardama novih dinara. Ovi osnovni statističko-empirički podaci iskazani su u preglednoj tabeli 1, koja ima naslov: »Osnovni podaci za konstruisanje modela«.

Tabela 1

Osnovni podaci za konstruisanje modela

mrd. n.d, cene jula 1965

Godišnji periodi	Redni broj godišnjeg perioda	Ukupan društveni proizvod	Osnovna sredstva u privredi	Nove opredmećene investicije
Oznake	t	D(t)	K(t)	I(t)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1952.	0	28,834	42,976	—
53	1	35,116	45,256	2,280
54	2	35,105	47,390	2,134
1955.	3	40,563	53,339	5,949
56	4	37,549	59,668	6,329
57	5	47,359	66,132	6,464
58	6	47,307	73,038	6,906
59	7	56,415	77,986	4,948
1960.	8	58,313	84,716	6,730
61	9	61,350	94,130	9,414
62	10	63,925	103,346	9,216
63	11	70,981	113,381	10,035
64	12	78,560	124,639	11,258
1965.	13	81,360	136,237	11,598

Pošto su u tabeli 1 utvrđeni empirički podaci endogenih promenljivih veličina kao statistička osnova za konstruisanje proizvodno-kapitalnog modela, može se pristupiti izračunavanju i numeričkom specificiranju svih egzogenih promenljivih veličina, koje se nalaze u rešenom obliku sistema simultanih jednačina (2), (3) i (4). Prethodno ćemo na bazi odgovarajućih statističkih serija u tabeli 1 odrediti i numerički specificirati dve linearne stohastičke međuzavisnosti (5). Sistem međuzavisnosti (5) posle izračunavanja po metodu najmanjih kvadrata ima sledeći numerički oblik:

$$D(t) = 0{,}5477\ K(t) + 9{,}16$$

$$I(t) = 0{,}1457\ D(t) - 0{,}6237 \qquad (12)$$

Parametri u sistemu međuzavisnosti (5) a, a', b i b', prema tome, imaju sledeće vrednosti:

$$a = 0{,}5477, \qquad a' = 9{,}16$$

$$b = 0{,}1457, \qquad b' = -0{,}6237 \qquad (13)$$

Kao što se vidi numeričke vrednosti osnovnih parametara (13) uvrštene su u numerički oblik sistema međuzavisnosti (12). Prema dosadašnjem postupku u praksi sada bi trebalo, pored numeričkih vrednosti osnovnih parametara (13), u sistem modelskih jednačina (2), (3) i (4) uvrstiti još statističko-empiričku vrednost egzogene veličine ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $D(o) = 28{,}834$. Međutim, pošto je ta vrednost stohastičkog karaktera, na osnovu izvedene teoreme o određenoj optimalnoj aproksimaciji izračunaćemo odgovarajuću modelsko-teorijsku vrednost ove optimalne aproksimacije $\widehat{D}(o)$, koja već neće biti stohastičkog karaktera.

Na osnovu teoreme o određenoj optimalnoj aproksimaciji proizvodno-kapitalnog modela iz uslovne jednakosti (9), a prema formuli (10), treba izračunati parametarsku veličinu $\widehat{F}(o)$, koja neće više imati stohastičko-empirički karakter. U tu svrhu potrebno je prethodno izračunati varijabilni funkcionalno-eksponencijalni izraz (4). Posle izračunavanja on ima sledeći numerički oblik:

$$T(t) = \left(\frac{1}{1 - ab}\right)^t = 1{,}08672^t \qquad (14)$$

Za svaku vrednost vremena t od 0 do 13 dobija se odgovarajuća numerička vrednost za izraz $T(t)$ u numeričkom izrazu (14). Sve te numeričke vrednosti izraza (14) treba na odgovarajući način kao numeričku seriju podataka zameniti u formuli (10). Ali isto tako, u formulu (10) treba uvrstiti i statističko-empiričke vrednosti endogene promenljive veličine za ukupan društveni proizvod $D(t)$, koje su već date u tabeli 1. Posle odgovarajućih zamenjivanja numeričkih vrednosti u formuli (10), kao i odgovarajućih izračunavanja, dobija se modelsko-teorijska parametarska veličina $\widehat{F}(o)$, koja je već oslobođena stohastičkog karaktera, a ima sledeću numeričku vrednost:

$$\widehat{F}(o) = 26{,}861 \tag{15}$$

Ova vrednost određene optimalne apkrosimacije parametarske veličine $\widehat{F}(o)$ omogućuje da se izračuna i neophodna numerička vrednost određene optimalne aproksimacije ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $\widehat{D}(o)$. Naime, zamenjivanjem numeričke vrednosti za $\widehat{F}(o)$ iz jednakosti (15) u formulu (11) konačno se i za modelsko-teorijsku veličinu određene optimalne aproksimacije ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $\widehat{D}(o)$ dobija da ona ima sledeću numeričku vrednost:

$$\widehat{D}(o) = \widehat{F}(o) - \frac{b'}{b} = 31{,}142 \tag{16}$$

U sada već ostvarenim uslovima određene optimalne aproksimacije, a uzimajući u obzir i uvedene odgovarajuće oznake, sistem simultanih opštih i partikularno rešenih jednačina (2) može se već napisati u sledećem odgovarajućem obliku:

$$\begin{aligned} \widehat{D}(t) &= \widehat{F}(o)\,T(t) = \frac{b'}{b} \\ \widehat{K}(t) &= \frac{1}{a}\widehat{F}(o)\,T(t) - \frac{1}{a}\left(\frac{b'}{b} + a'\right) \\ \widehat{I}(t) &= b\,\widehat{F}(o)\,T(t) \end{aligned} \tag{17}$$

Isto tako, dopunski definicioni algebarski izraz za odgovarajuću fiksnu parametarsku vrednost (3) može se takođe napisati u sledećem odgovarajućem obliku:

$$\widehat{F}(o) = \widehat{D}(o) + \frac{b'}{b} \tag{18}$$

Međutim, što se tiče drugog definicionog algebarskog izraza za odgovarajuću varijabilnu funkcionalno-eksponencijalnu vrednost $T(t)$ u jednakosti (4) i (14) ništa ne treba menjati ni u ostvarenim uslovima određene optimalne aproksimacije, jer u tim jednakostima figurišu samo osnovni modelski parametri (a i b), koji su već i ranije bili oslobođeni stohastičkog karaktera.

Kada se sada sve odgovarajuće izračunate numeričke vrednosti [(13), (14), (15) i (16)] zamene u odgovarajućim sistemu opštih i partikularno rešenih jednačina za ostvarene uslove određene optimalne aproksimacije u obliku (17), onda se konačno dobija odgovarajući sistem numeričkih i eksplicitno rešenih jednačina koji predstavlja globalni pro-

Tabela 2

Endogene promenljive veličine prema modelu

mrd. n.d, cene jula 1965.

Godišnji periodi	Redni broj godišnjeg perioda	Ukupan društveni proizvod	Osnovna sredstva u privredi	Nove opredmećene investicije
Oznake	t	$\widehat{D}(t)$	$\widehat{K}(t)$	$\widehat{I}(t)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1952.	0	31,2 (28,8)	40,2 (35,9)	3,9 (3,6)
53	1	33,5 (31,0)	44,4 (39,8)	4,3 (3,9)
54	2	36,0 (33,3)	49,0 (44,0)	4,6 (4,2)
1955.	3	38,8 (35,8)	54,1 (48,6)	5,0 (4,6)
56	4	41,8 (38,5)	59,6 (53,6)	5,5 (5,0)
57	5	45,0 (41,5)	65,4 (59,0)	5,9 (5,4)
58	6	48,5 (44,7)	71,8 (64,9)	6,4 (5,9)
59	7	52,4 (48,2)	78,9 (71,3)	7,0 (6,4)
1960.	8	56,5 (52,0)	86,4 (78,3)	7,6 (7,0)
61	9	61,1 (56,2)	94,8 (85,9)	8,3 (7,6)
62	10	66,0 (60,7)	103,8 (94,1)	9,0 (8,2)
63	11	71,3 (65,6)	113,4 (103,0)	9,8 (8,9)
64	12	77,2 (70,9)	124,2 (112,7)	10,6 (9,7)
1965.	13	83,5 (76,7)	135,7 (123,2)	11,5 (10,5)

izvodno-kapitalni ekonometrijski analitički model sa određenom optimalnom aproksimacijom za celu Jugoslaviju u posmatranom analitičkom periodu. Taj sistem sada već ekonometrijskih jednačina (17) posle navedenih izračunavanja dobija sledeći numerički oblik:

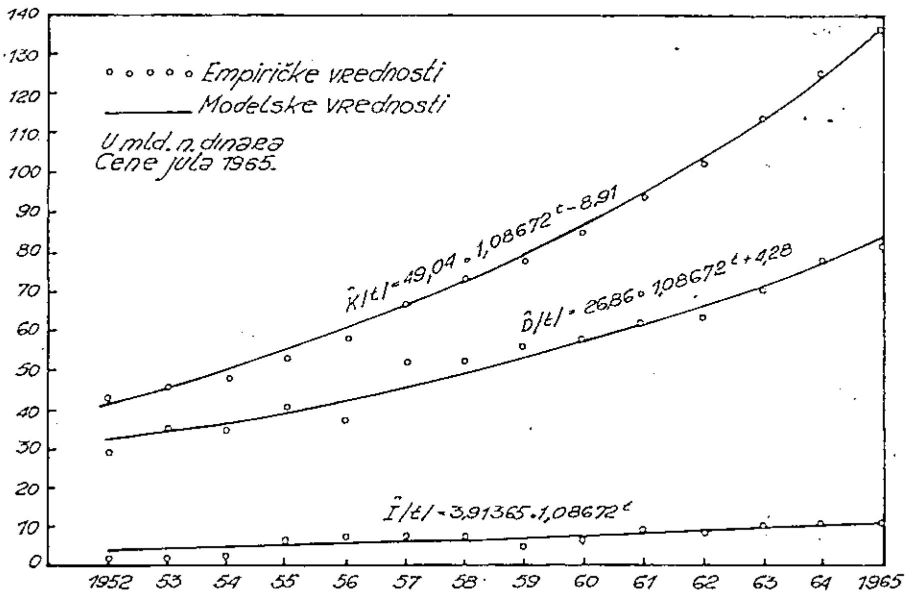
$$\widehat{D}(t) = 26{,}86 \cdot 1{,}0867^{t} + 4{,}28$$
$$\widehat{K}(t) = 49{,}04 \cdot 1{,}0867^{t} - 8{,}91 \qquad (19)$$
$$\widehat{I}(t) = 3{,}91 \cdot 1{,}0867^{t}$$

Prema sistemu numeričkih jednačina ekonometrijskog analitičkog modela (19) izračunate su odgovarajuće optimalne vrednosti endogenih promenljivih veličina i iskazane u tabeli 2, koja nosi naslov: »Endogene promenljive veličine prema modelu«. Radi poređenja, tu su u zagradama date i odgovarajuće modelske neoptimalne vrednosti, koje osetno podbacuju.

Sada kada se pored osnovnih podataka o statističko-empiričkim endogenim promenljivim veličinama u tabeli 1 raspolaže i sa modelsko-teorijskim vrednostima odgovarajućih endogenih promenljivih veličina u tabeli 2, može se pristupiti i grafičkom prikazu odnosa između empiričkih i modelskih vrednosti tih agregata. Ovaj grafički prikaz odnosa agregata dat je u grafikonu 1, koji ima naslov: »Empiričke i modelske vrednosti agregata — analitički period 1952—1965«.

Empiričke i modelske vrednosti agregata
— Analitički period 1952—1965. —

Grafikon 1



Na kraju ćemo dati i kratku analizu sa gledišta aproksimativnosti, kako na osnovu rezultata u tabeli 1 i tabeli 2, tako i na osnovu grafičkih odnosa u grafikonu 1. Pre svega, izračunaćemo odgovarajuće koeficijente varijacije kao mere stepena aproksimativnosti modelsko-teorijskih vrednosti statističko-empiričkim vrednostima endogenih promenljivih veličina. Koeficijent varijacije za prvu endogenu promenljivu veličinu V_D ima sledeću opštu i numeričku vrednost:

$$V_D = \frac{1}{\bar{D}} \sqrt{\frac{\Sigma (D - \widehat{D})^2}{n}} = 4,02\ \%\ \ (9,28\ \%) \qquad (20)$$

Isto tako, koeficijent varijacije za drugu endogenu promenljivu veličinu V_K ima sledeću opštu i numeričku vrednost:

$$V_K = \frac{1}{\bar{K}} \sqrt{\frac{\Sigma (K - \widehat{K})^2}{n}} = 1,44\ \%\ \ (10,14\ \%) \qquad (21)$$

Naposletku, koeficijent varijacije za treću endogenu promenljivu veličinu V_I ima sledeću opštu i numeričku vrednost:

$$V_I = \frac{1}{\bar{I}} \sqrt{\frac{\Sigma (I - \hat{I})^2}{n}} = 16{,}82\,\% \; (18{,}96\,\%) \tag{23}$$

Kao što se iz jednakosti (20), (21) i (22) vidi, prva i druga endogena promenljiva veličina imaju vrlo dobru i odličnu, dok treća endogena promenljiva veličina jedva da ima zadovoljavajuću aproksimaciju. Ovo dobrim delom proizilazi iz toga što treća jednačina u sistemu (19) nema konstantni slobodni član kao što ga imaju prva i druga jednačina istog sistema (19). A to ukazuje na potrebu i daljeg istraživanja u ovom pravcu optimalne aproksimacije.

Radi poređenja, u jednakostima (20), (21) i (22) date su u zagradama i odgovarajuće vrednosti koeficijenata varijacije za modelske neoptimalizirane endogene promenljive veličine. Ovo poređenje jasno ukazuje na značajan doprinos poboljšanju prilagođenosti, a što se ostvaruje pomoću teoreme o određenoj nivoskoj optimalnoj aproksimaciji.

Od značaja je i razlika između empiričke numeričke vrednosti ukupnog društvenog proizvoda u početnom godišnjem periodu $D(o) = 28{,}834$ (tabela 1) i odgovarajuće modelske numeričke vrednost $\widehat{D(o)} = 31{,}142$ (16). Naime, kada se empirička numerička vrednost uzme za 100, onda ta razlika u apsolutnoj vrednosti i procentima iznosi:

$$\widehat{D}(o) - D(o) = 2{,}308 = 8{,}004\% \tag{24}$$

A to znači da je primena teoreme o određenoj optimalnoj aproksimaciji u ovom konkretnom slučaju popravila prilagođenost modelskih empiričkim vrednostima za više od osam procenata. Naime, bez primene ove izvedene teoreme takve neoptimalne modelske vrednosti agregata podbacivale bi ovako izračunate optimalne modelske vrednosti za više od osam procenata. Razume se, ovaj konkretan zaključak odnosi se na endogenu promenljivu veličinu ukupnog društvenog proizvoda, a iz grafikona i tabele 2 vidi se da analogan zaključak važi za sve tri endogene promenljive veličine. Grafikon i tabela 2 na očigledan i zaista uverljiv način ističu ulogu i značaj teoreme o određenoj optimalnoj aproksimaciji endogenih promenljivih veličina kod proizvodno-kapitalnog ekonometrijskog analitičkog modela.

(Rad primljen januara 1970.)

ПРОИЗВОДСТВЕННО-КАПИТАЛЬНАЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

— Оптимальная аппроксимация —

Данчика НИКОЛИЧ

Резюме

Рассматривается задача построения производственно-капитальной эконометрической аналитической модели. При этом отмечается проблема приближения значений модели к действительным эмпирическим значениям эндогенных переменных. Именно, подробный анализ показал, что приближение модели к действительности в значительной мере зависит от лишь

одного эмпирического значения эндогенной переменной в начальном периоде года. Таким образом, возникает проблема устранения этого стохастического значения и его замены более адекватным значением, позволяющим оптимальное приближение модели к реальной действительности. Чтобы сформулировать соответствующую теорему для решения указанной проблемы, исходим из теоретического построения производственно-капитальной модели.

Устанавливается, что между тремя значениями экзогенной переменной в начальном периоде года [D(o), K(o) и I(o)] существует система из двух зависимостей (6). Но, на основе этой системы зависимостей можно элиминировать лишь два из трех стохастических значений экзогенной переменной в начальном периоде года. Так возникает проблема элиминации и третьего стохастического значения, т.е. проблема замены третьего стохастического значения какой-нибудь оптимальной величиной.

Для получения и третьего условного уравнения, позволяющего элиминацию и третьего стохастического значения D(o), исходим из анализа уравнения (7). Таким образом, приходим к условному уравнению (8), по которому сумма квадратов отклонений эмпирических значений D(t) от соответствующих оптимально-теоретических должна быть минимальной.

Однако, из условия (8) вытекает, что частная производная по параметру F(o) равняется нулю, что приводит к уже применимому условию (9). Но параметрическая величина F(o) больше не имеет стохастическо-эмпирический, а модельно-теоретический характер. Она обозначается через $\hat{F}(o)$ и на основе уравнения (9) вычисляется по формуле (10). Аналогично, модельно-теоретическое значение экзогенной величины совокупного общественного продукта в начальном периоде года обозначается через $\hat{D}(o)$ и вычисляется по формуле (11). А это уже позволяет сжато сформулировать применимую теорему о данной оптимальной аппроксимации производственно-капитальной эконометрической аналитической модели.

В качестве примера применения полученной теоремы о данной оптимальной аппроксимации дано построение глобальной производствено-капитальной эконометрической аналитической модели Югославии в целом на период 1952—1965 гг. Основные данные для построения этой модели даны в таблице 1. На основе этих данных вычислены две стохастические взаимозависимости (12) и соответствующие параметрические значения (13), (14), (15) и (16). Подстановкой этих значений в систему уравнений (17) и (18) получается система эконометрических уравнений (19). На основе этой системы уравнений (19) вычислены соответствующие модельно-теоретические значения всех трех эндогенных переменных и выражены в таблице 2. Так же, на основе данных в этих двух таблицах графически изображено соотношение эмпирических и модельных значений агрегатов этих эндогенных переменных в графике 1.

В заключение дан краткий анализ с точки зрения приближенности. Именно, вычислен коэффициент вариации совокупного общественного продукта по формуле (20), затем основных фондов в народном хозяйстве по формуле (21) и наконец новых овеществленных капиталовложений в основных фондах в народном хозяйстве по формуле (22). Эти результаты показывают, что первая и вторая эндогенные переменные имеют очень хорошую и превосходную, в то время как третья эндогенная переменная имеет чуть удовлетворительную аппроксимацию, что указывает на необходимость дальнейшего исследования. В анализе оказалась значительной и разница между эмпирическим и модельным значениями совокупного общественного продукта в начальном периоде года (23). Т. е. без применения полученной теоремы неоптимальные модельные значения агрегата были бы меньше вычисленных оптимальных модельных значений на 8 процентов. Равным образом, график 1 наглядно и внушительно подчеркивает роль и значение теоремы о данном оптимальном приближении эндогенных переменных в производственно-капитальной эконометрической аналитической модели.