K O M U N I K A C I J E

INTERVALNI LINEARNI PROGRAMI

Pod ovim nazivom dolaze problemi linearnog programiranja koji imaju slijedeći oblik:

$$(1) \qquad \begin{gathered} Max\ c'x \\ b^- \leq Ax \leq b^+ \end{gathered}$$

gdje je $A = [a_{ij}]$ matrica reda (m, n), $x = [x_j]$ i $c = [c_j]$ su n—vektori a $b^+ = [b_i^+]$, $b^- = [b_i^-]$ su m—vektori[1]).

Problemi u planiranju proizvodnje mogu imati tu formu. Na primjer, uzmimo da jedno poduzeće ima m strojeva, sposobno je da proizvodi n proizvoda i a_{ij} sati je potrebno stroju i da proizvede jedinicu proizvoda j. Ako se proizvodnja planira tjedno, neka x_j bude iznos proizvoda j koga treba proizvesti u slijedećem tjednu.

Postoji uvijek gornja ograda b_i^+ na broj sati koliko tjedno može stroj i raditi. Toj ogradi može korespondirati donja ograda b_i kao rezultat zaključenih radnih ugovora, politike neotpuštanja radnika itd. Prema tome, ograničenja su oblika

$$(2) \qquad b_i^- \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i^+, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Nadalje, poduzeće može imati zaključeni ugovor da proizvede d_j^- jedinica proizvoda j svaki tjedan. Može biti također i jedna gornja ograda d_j^+ iznos proizvoda j zbog kapaciteta skladišta ili ograničene ponude sirovina. Otuda ovi zahtjevi:

$$(3) \qquad d_j^- \leq x_j \leq d_j^+$$

Konačno, ako je c_j jedinični dohodak (neto prihod, bruto — neto produkt i sl.), ekonomski cilj se može ovako formulirati:

$$(4) \qquad max\ c'x$$

1) Vidjeti Philip D. Robers, *Interval Linear Programming*, Dissertation, Northwestern University, Evanston, August, 1968.

Čitav problem (2), (3) i (4) očigledno pripada klasi intervalnih linearnih programa (1).

Intervalni linearni program (1) lako se konvertira u ekvivalentni ordinarni problem linearnog programiranja. Dovoljno je postaviti da je

$$x = x^+ - x^-, \quad (x^+, x^- \geq 0)$$

i supstituirati u (1) da se dobije ekvivalentni problem:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &Max\ (c'x^+ - c'x^-) \\ &Ax^+ - Ax^- \leq b^+ \\ &-Ax^+ + Ax^- \leq -b^- \\ &x^+, x^- \geq 0 \end{aligned}$$

Ta konverzija, međutim, nije osobito zadovoljavajuća jer rezultira u programu (5) koji ima $2m$ ograničenja i $2(m + n)$ varijabli (uključivši dopunske), dakle dvostruko više od originalnog problema.

Najjednostavnije se riješi problem (1), ako se simpleks metoda primjeni na njegov dual:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &min\ (b^+ y^+ - b^- y^-) \\ &A'y^+ - A'y^- = c \\ &y^+, y^- \geq 0 \end{aligned}$$

Prijelaz na dualni problem osobito je opravdan i svrsishodan kad intervalni linearni program ima veliki broj ograničenja u usporedbi sa brojem varijabli, tj. kad je $m \gg n$.

Na primjer, intervalni linearni program

$$(7) \qquad \begin{aligned} &max\ (-5\, x_1) \\ 0 &\leq x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 &\leq 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ -9 &\leq \quad -5x_2 \leq 9 \\ 2 &\leq 4x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

ima ovaj dual

$$(8) \qquad \begin{aligned} &min\ \left(y_1^+ + 8y_2^+ + 9y_3^+ + 6y_4^+ + 9y_3^- - 2y_4^-\right) \\ &-y_1^+ - 3y_2^+ - 4y_4^+ + y_1^- + 3y_2^- + 4y_4^- = 5 \\ &2y_1^+ + y_2^+ - 5y_3^+ + 3y_4^+ - 2y_1^- - y_2^- + 5y_3^- - 3y_4^- = 0 \\ &y_i^+,\ y_i^- \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

Optimalno rješenje tog dualnog problema je $y_2^- = 5/3$ i $y_3^- = 1/3$ a optimalno rješenje originalnog problema je $x_1 = -3/5$ i $x_2 = 9/5$. Vrijednost optimuma jest 3.

Postoji još jedna mogućnost transformacije intervalnog linearnog programa u obični linearni program sa uglavnom istim negativnim posljedicama. Može se u (1) supstituirati

$$y = Ax \tag{9}$$

i staviti

$$x = x^+ - x^-, \ (x^+, x^- \geq 0)$$

u (1) i (9) pa se dobije slijedeći ekvivalentni problem:

$$\begin{aligned} & max\ (c'x^+ - c'x^-) \\ & Ax^+ - Ax^- - y = 0 \\ & b^- \leq y \leq b^+ \\ & x^+, x^- \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Ovaj problem sa omeđenim varijablama y_i rješava se ili Dantzigovom direktnom metodom ili Wagnerovom dualnom metodom za gornje ograde. Naime, donjih ograda se možemo lako osloboditi ako uvedemo novi vektor $y- \geq 0$ tako da je $b- + y- = y$ (usporediti Lj. Martić [3], str. 308). Problem (10) ima m primarnih i m sekundarnih ograničenja sa $2(n + m)$ varijabli, uključivši artificijelne.

Optimalna rješenja mogu se eksplicite napisati, kako su pokazali A. Ben-Israel i A. Charnes [2], ako je intervalni program (1) ograničen a matrica A ima rang jednak broju redaka, tj. $r(A) = m$. S. Zlobec i A. Ben-Israel [6] su proširili taj rezultat na slučaj kad je A proizvoljnog ranga. Sva ta eksplicitna rješenja temelje se na nekim rezultatima R. Penrosea [4], A. Ben-Israela i A. Charnesa [1] o generaliziranim inverznim matricama. U posljednjem citiranom radu nalazi se i jedan mali prilog pisca ovih redaka.

Polazeći od rezultata Ben-Israela i Charnesa, riješio je Philip D. Robers [5] opći problem intervalnog linearnog programiranja. On je našao dvije konačne interativne metode: tzv. suboptimalnu metodu i jedan algoritam baziran na Dantzig — Wolfeovom principu dekompozicije. U dodatku svojoj disertaciji Robers je dao za suboptimalnu metodu program pisan u Fortranu IV za CDC 6400 kompjutor. Do sada izvršeni eksperimenti u numeričkom centru Northwestern univerziteta pokazali su da suboptimalna metoda znatno brže rješava problem (1) nego simpleks metoda ekvivalentni problem (5).

Na kraju se ponovno vraćamo primjenama intervalnog linearnog programiranja. Postoji više aplikacija linearnog programiranja koje na prirodni način dolaze u formi intervalnih linearnih programa ili se u tu formu mogu lako transformirati. Osim proizvodnih linearnih programa tu spadaju i neki programi investicija, neki problemi iz strukturalne analize, problemi blendinga i smjese sa tolerancijama i drugi. Modeli za te probleme su u pravilu velikih dimenzija pa je traženje efikasnijih metoda za njihovo rješavanje od velikog praktičkog značenja.

Ljubomir MARTIĆ

Fakultet ekonomskih nauka,
Zagreb

LITERATURA

[1] A. Ben-Israel and A. Charnes, »*Contributions to the Theory of Generalized Inverses*«, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11 (1963), 667—699.

[2] A. Ben-Israel and A. Charnes, An Explicit Solution of a Special Class of Linear Programming Problems, Operations Research, vol. 16, 1968, No 6, 1166—1175.

[3] Lj. Martić, *Matematičke metode za ekonomske analize*, II svezak, Zagreb, 1966.

[4] R. Penrose, »A Generalized Inverse for Matrices«, Proc. *Cambridge Philos. Soc.* 51(1955), 406—413.

[5] Ph. D. Robers, *Interval Linear Programming*, Dissertation, Northwestern University, Evanston, August 1968.

[6] S. Zlobec and A. Ben-Israel, *On Explicit Solutions of Interval Linear Programs*, Systems Research Memorandum No. 210, Northwestern University, Septembar, 1968.

NEKI ASPEKTI PROBLEMA RASPODELE DOPUNSKIH SREDSTAVA NERAZVIJENIM PODRUČJIMA

Dosadašnja istraživanja[1]) su pokazala da jedan od osnovnih problema u raspodeli dopunskih sredstava nerazvijenim područjima jeste određivanje potreba i sopstvenih mogućnosti. Ovo je istovremeno i jedan od najtežih problema bez čijeg rešavanja nije moguće vršiti rapodelu na objektivan način. No, sagledavanjem potreba i mogućnosti ne bi bili rešeni svi problemi raspodele. Ovde ćemo razmatrati ona pitanja koja treba rešavati nakon određivanja potreba i mogućnosti. Imamo u vidu pre svega budžetsku potrošnju, no, kao što će se videti kasnije, slična analiza se može izvesti i kod drugih vidova potrošnje.

Ako su potrebe i sopstvene mogućnosti određene za svako područje tada treba posmatrati razlike između ovih dveju veličina. Ako sa P_i označimo potrebe područja i, a sa M njegove sopstvene mogućnosti da finansira te potrebe, tada, uopšte uzev, mogu da nastupe sledeći slučajevi:

a) Potrebe su veće od mogućnosti: $P_i > M_i$, tj. $P_i - M_i > 0$

b) Potrebe su jednake mogućnostima: $P_i = M_i$, tj. $P_i - M_i = 0$

c) Potrebe su manje od mogućnosti: $P_i < M_i$, tj. $P_i - M_i < 0$

U slučajevima b) i c) područje i može samo da finansira svoje potrebe. Zadržaćemo se na slučaju a).

Ako su ukupna dopunska sredstva sa kojima raspolaže zajednica dovoljna da se pokriju sve razlike $P_i - M_i$, tada daljih problema u raspodeli dopunskih sredstava zapravo i nema. Procedura rapodele je u tom slučaju

1) Videti:
a) *Finansiranje društveno-političkih zajednica u SR Srbiji* — naučnoistraživački projekt Instituta društvenih nauka, Beograd, 1968.
b) *Izučavanje problema dodele dopunskih sredstava republikama na trajnoj osnovi* — naučnoistraživački projekt Jugoslovenskog instituta za ekonomska istraživanja, Beograd, 1968.