PREGLED NAUČNE OBLASTI

FAKTORSKA ANALIZA

*Milivoje BOGDANOVIĆ**

I. UVOD

1. Pored manje-više poznatih statističkih tehnika (korelacione analize, analize varijanse, analize kovarijanse, regresione i diskriminacione analize i sl.) zadnjih godina se može primetiti ekspanzija još jedne matematičko-statističke tehnike, tzv. faktorske analize. Teorijske osnove faktorske analize s početka ovog veka vezane su za ime Charlesa Spearmana. Prvi praktični interes za razvoj faktorske analize pojavio se u psihologiji pri pokušajima da se dokaže ili opovrgne postojanje opšte intelektualne sposobnosti kod ljudi. Teorija o dva faktora kakvu je razvio C. Spearman nije uvek bila adekvatna pri psihološkim istraživanjima, zbog toga se počela razvijati višefaktorska analiza. Prva ideja o višefaktorskoj analizi nalazi se u radu Garnetta[1]) a dalji razvoj te teorije u najvećoj meri pripada L. L. Thurstoneu.

Kao i u mnogim drugim disciplinama razvijanje teorije i primenjivanje faktorske analize do sada je prošlo kroz tri faze. Prvo oduševljenje i masovno korišćenje pri istraživanjima na polju psihologije smenio je period teorijskog fundiranja i razrade analitičke tehnike za ekonomčniju primenu metoda. U tom periodu nađene su veze sa ostalim statističkim tehnikama i razgraničeni su domeni njihovih primena. Na početku razvoja teorija je često koristila pojmove iz oblasti psihologije i takav pristup je komplikovao primenjivanje faktorskih tehnika u drugim oblastima. S razvojem teorije ti se nedostaci uklanjaju, faktorska analiza se »matematizira« i postaje jedna od univerzalnih tehnika koja se može primenjivati u raznim oblastima društvenih i prirodnih nauka. Treći period je nastupio pre nekoliko godina od kada se može primetiti dalje razvijanje teorije faktorske analize uz detaljnu razradu praktičnih algoritama za dobijanje faktorskih rešenja. U tom periodu primećuje se širenje primena faktorske analize u oblastima kao što su: sociologija, lingvistika, ekonomija, meteorologija, politikologija, medicina, antropologija itd.

* Autor je magistar matematičkih nauka, radi kao istraživač u Institutu ekonomskih nauka u Beogradu.

[1]) Garnett, J. C. M. On certain indeprendent factors in mental measurement. Proc. Roy. Soc. Lon., A, 96.

2. Ako se posmatra neki skup elemenata (osnovni skup), npr. ljudi, geografska područja i sl., sa određenim karakteristikama,[2]) mere tih karakteristika daju izvesnu osnovnu informaciju o elementima iz skupa. Te mere u terminologiji faktorske analize nazivamo individualnim skorovima. Metodima korelacione analize na osnovu individualnih skorova ispitujemo statističku međuzavisnost korišćenih karakteristika. Dobijene korelacije predstavljaju stepen više u informisanju o osnovnom skupu elemenata. Često je broj mernih karakteristika na osnovnom skupu toliko veliki da je teško sa njima i njihovim korelacijama dalje manipulisati. U takvim slučajevima postavlja se pitanje njihove sinteze u manji broj kategorija (faktora) koje zadržavaju istu informativnu sposobnost kakvu imaju individualni skorovi i dobijene korelacije. Ova ideja je podstakla razvoj faktorske analize. Problem sinteze polaznih karakteristika izvršava se preko matematičkog modela. Najčešće se koristi linearni model, iako to nije i jedino mogući način interpretacije. Linearni model se koristi zbog svoje uprošćenosti i samim tim zato što omogućava najširu praktičnu primenu. U takvom modelu svaka karakteristika osnovnog skupa izražava se kao linearna kombinacija određenog broja faktora. Tehnički problem faktorske analize svodi se pri tome na određivanje broja zajedničkih faktora kao i koeficijenata uz faktore u linearnoj kombinaciji. Ovako formulisan problem ne daje jedinstvena rešenja. Postoji beskonačno mnogo mogućih načina za formiranje linearnih kombinacija, tj. koeficijenata uz faktore u faktorskom modelu. Za dobijanje jedinstvenog rešenja potrebna su dodatna ograničenja. Do sada su korišćena dva tipa tih ograničenja:

1) ograničenja koja obezbeđuju statističku uprošćenost faktorskog modela;
2) ograničenja koja se pojavljuju kao primarni zahtev oblasti u kojoj se primenjuje faktorska analiza. Ova ograničenja posle faktorske obrade problema omogućavaju lakše interpretacije dobijenih rezultata.

Prva ograničenja tiču se konstrukcije metoda za izdvajanje maksimalne varijanse posmatranih karakteristika. Smatra se da je optimalan rezultat u ovom slučaju dobio Karl Pearson na početku ovog veka svojim metodom »glavnih osa« (principal axes). Detaljnu razradu ovog metoda dao je 1930. H. Hotelling. Metod glavnih osa uključuje zametna računanja, pa je do pojave elektronskih računara bio potisnut u drugi plan. Ograničenja drugog tipa najdetaljnije je razmatrao L. Thurstone. Njegov rad se odnosio na probleme psihologije. Prilikom primene faktorske analize u psihologiji pojavio se zahtev invarijantnosti faktorskog rešenja. Pod invarijatnošću se podrazumeva činjenica da faktorska deskripcija jedne te iste karakteristike elemenata osnovnog skupa mora da ostane ista u slučaju izmene skupa karakteristika. Naravno posmatrana karakteristika mora da bude i u novom skupu, a skup zajedničkih faktora je isti kao i pre izmene skupa karakteristika.

Uslov invarijatnosti L. Thurstone je izrazio kroz princip »proste strukture«. Pokazalo se da su uslov invarijantnosti i princip proste strukture podjednako važni i u drugim oblastima istraživanja. U L. Thurstonovom originalnom tekstu uslovi za prostu strukturu su:

[2]) karakteristika = obeležje = varijabla.

1. Svaka vrsta faktorske strukture treba da ima najmanje jednu nulu.
2. Svaka kolona treba da ima najmanje m nula (ovde m predstavlja ukupan broj zajedničkih faktora).
3. Za svaki par kolona biće najmanje m varijabli čije je učešće u pojedinim kolonama 0, a u drugim se ne anulira.

U ovom slučaju faktorska struktura se posmatra u obliku pravougaone matrice. Elementi matrice su koeficijenti uz faktore u linearnim kombinacijama, pomoću kojih se izražavaju karakteristike osnovnog skupa. Svaka vrsta u matrici određena je odgovarajućom karakteristikom, a svaka kolona odgovarajućim zajedničkim faktorima.

Za dostizanje proste strukture postoji više metoda. U zadnjim godinama najčešće se koriste rotacije faktora. Postoji uverenje da »Varimax« rešenje postignuto ortogonalnom rotacijom najbolje odgovara uslovima invarijantnosti. Zbog toga se najčešće pri prvim i najgrubljim primenama faktorske analize na bazi matrice korelacija dobije rešenje metodom glavnih osa, a zatim se ortogonarnom rotacijom traži Varimax rešenje. Često je moguće eksplicitno odrediti transformaciju pomoću koje se od jednog rešenja može dobiti drugo. Interesantan problem u faktorskoj analizi javlja se pri merenju nepodudarnosti faktorskih rešenja. U slučaju kada se fiksiraju karakteristike na elementima osnovnog skupa, a menjaju pojedini uzorci iz tog skupa, menjaće se i rezultujući faktori. Takođe i u slučaju kada se na jednom te istom uzorku iz osnovnog skupa menjaju karakteristike, menjaće se i rezultujući faktori. Moguće je na razne načine meriti podudaranje faktora ali najčešće se u tu svrhu koristi tzv. koeficijent kongruentnosti.

Pitanje kvaliteta analitički dobijenog faktorskog rešenja određenog problema s matematičkog stanovišta uopšte se ne postavlja. Kvalitet dobijenog rezultata posle primene faktorske analize zavisi od preciznosti kojom se definiše određeni praktični problem kao i od izbora adekvatnog faktorskog modela. Ovo naravno zahteva solidno poznavanje strukture faktorskih modela. Pri primeni faktorske analize nije moguće izvršiti identifikaciju kvalitativnih karakteristika faktora nekim preciznim analitičkim sredstvima, pa je subjektivna ocena eksperta neophodna. Faktorska analiza ipak omogućava da se iz skupa korišćenih karakteristika izdvoje tzv. »čiste« karakteristike koje bolje od ostalih mere odgovarajuće faktore. Ovo omogućava u praktičnim istraživanjima da se velikim delom smanje dimenzije posmatranog problema. Efekat smanjenja broja karakteristika naročito je značajan ako se u posmatranim istraživanjima vrše projekcije uz pomoć višestrukih regresija. Vrlo efikasni rezultati se dobijaju i pri kombinovanju faktorske i diskriminacione analize.

II. MODEL FAKTORSKE ANALIZE

Neka uzorak iz osnovnog skupa ima N elemenata i neka se na njima posmatraju karakteristike x_j, $j = 1,2 \ldots, n$. Označimo sa x_{ji} vrednost karakteristike x_j na elementu i $(i = 1,2 \ldots, N)$ iz uzorka. Linearna kombinacija preko koje želimo da izrazimo karakteristiku x_j pomoću manjeg broja faktora ima oblik

$$(1) \qquad x_j = a_{j1} F_1 + a_{j2} F_2 + \ldots + a_{jm} F_m + d_j V_j, \quad (j = 1,2, \ldots n)$$

U ovom izrazu F_k $(k = 1,2 \ldots, m)$ predstavljaju zajedničke faktore a V_j specifični faktor koji odgovara karakteristici x_j. Specifični faktor se može shvatiti kao faktor greške koja se pravi prilikom aproksimacije x_j linearnom kombinacijom zajedničkih faktora. Koeficijenti a_{jk}, $(k = 1,2, \ldots, m)$ i d_j određuju učešće svakog faktora u izražavanju x_j.

Radi lakšeg rada uzećemo da su x_j, F_k i V_j $(j = 1,2, \ldots, n;\ k = 1,2, \ldots, m)$ standardizovane slučajne veličine tj. da im je aritmetička sredina jednaka nuli a varijansa jednaka jedinici. Po definiciji ćemo uzeti da su korelacije specifičnog faktora V_j sa svim ostalim specifičnim faktorima V_l $(l \neq j,\ l = 1,2, \ldots, n)$ i sa zajedničkim faktorima F_k, $(k = 1,2, \ldots, m)$ jednake nuli.

Ako levu i desnu stranu jednačine (1) pomnožimo sa F'_k i podelimo sa N dobijamo

$$(2) \qquad \frac{1}{N} \overline{F}'_k x_j = \frac{1}{N} a_{j1} F'_k F_1 + \frac{1}{N} a_{j2} F'_k F_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{N} a_{jk} F'_k F_k + \frac{1}{N} d_j F'_k V_j .$$

Izraz (2) je samo simbolički predstavnik složenijeg izraza. Ako sa F_{ki} i V_{ji} označimo vrednost koje zajednički faktor F_k i specifični faktor V_j uzimaju na elementu i iz uočenog uzorka, tada se x_j, F_k i V_j, $(j = 1,2, \ldots, n;$ $k = 1,2, \ldots, m)$ mogu pisati u vektorskoj formi

$$x_j = \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{jN} \end{bmatrix}; \quad F_k = \begin{bmatrix} F_{k1} \\ F_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{kN} \end{bmatrix}; \quad V_j = \begin{bmatrix} V_{j1} \\ V_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{jN} \end{bmatrix}$$

Množenje transponovanim F_k daje izraze oblika

$$\overline{F}'_k x_j = [F_{k1} \ldots F_{kN}] \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{jN} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} F_{ki}\, x_{ji} = N r_{F_k x_j},$$

$$(k = 1,2, \ldots, m;\ j = 1,2, \ldots, n)$$

$$F'_k F_l = [F_{k1}\ F_{k2} \ldots F_{kN}] \begin{bmatrix} F_{l1} \\ F_{l2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{lN} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} F_{ki} F_{li} = \begin{cases} N r_{F_k F_l}, (k \neq l = 1 \ldots, m) \\ N, \qquad (k = l) \end{cases}$$

$$F'_k V_j = [F_{k1}\ F_{k2} \ldots F_{kN}] \begin{bmatrix} V_{j1} \\ V_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{jN} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} F_{ki} V_{ji} = N r_{F_k V_j} = 0 \quad \text{(po def.)}$$

Na osnovu ovih jednakosti iz (2) se dobija

(3) $$r_{F_k x_j} = a_{j1} r_{F_k F_1} + a_{j2} r_{F_k F_2} + \ldots + a_{jk} + \ldots a_{jm} r_{F_k F_m}$$

Na sličan način množenjem jednakosti (1) sa V_j dobijamo

(4) $$r_{xj} V_j = d_j.$$

Iz jednačine (3) može se variranjem k i j dobiti sistem od $m + n$ jednačina sa nepoznatim a_{jk}. U slučaju kada se uzme da su koeficijenti korelacije međuzajedničkim faktorima jednaki nuli, jednačina (3) postaje

(5) $$r_{x_j} F_k = a_{jk} \quad (j = 1,2, \ldots, n;\ k = 1,2, \ldots, m)$$

Ako jednačinu (1) pomnožimo sa x'_p i podelimo sa N dobiće se

(6) $$\frac{1}{N} x'_p x_j = \frac{1}{N} a_{j1} x'_p F_1 + \frac{1}{N} a_{j2} x'_p F_2 + \ldots + \frac{1}{N} a_{jm} x'_p F_m + $$
$$+ \frac{1}{N} d_j x'_p V_j ,$$

dakle na sličan način kao i ranije dobijamo

(7) $$r^{\circ}_{jp} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} a_{pk} + \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{k=t+1}^{m} (a_{jt} a_{kp} + a_{kt} a_{jp}) r_{F_t F_p}$$
$$(j \neq p = 1,2, \ldots n)$$

ovde je r°_{jp} koeficijent korelacije dobijen iz linearne kombinacije (1). Za

slučaj kada je korelacija među zajedničkim faktorima jednaka nuli izraz (6) se svodi na

(8) $$r^{\circ}_{jp} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} a_{pk}, \quad (j \neq p = 1,2, \ldots, n).$$

Za slučaj kada je $j = p$ izraz (7) daje veličinu

(9) $$h_j^2 = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}^2$$

koju nazivamo komunalitetom karakteristike x_j. Ako se uzme u obzir da je $r_{jj} = r^{\circ}_{jj} = 1$ to iz (6) dobijamo da je

$$1 = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}^2 + d_j^2$$

Neposredno iz činjenice da je karakteristika x_j standardizovana sledi da je varijansa

$$s_j^2 = 1 = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}^2 + d_j^2.$$

Vrednost d_j^2 naziva se jedinstvenošću karakteristike x_j.

Ako u korelacionoj matrici $R = \{ r_{jp}, j,p = 1,2, \ldots, n \}$ karakteristika x_j, $(j = 1,2, \ldots, n)$, umesto dijagonalnih elemenata (jedinica) stavimo komunalitete, novu matricu ćemo nazivati redukovanom korelacionom matricom.

Za faktorsku analizu ključna je sledeća

TEOREMA. Ako je rang redukovane korelacione matrice m, tada je najmanji broj linearno nezavisnih faktora koji se mogu izračunati iz korelacija takođe jednak m.[3])

Pri fiksiranim korelacionim koeficijentima r_{jp} $(j \neq p)$ rang redukovane korelacione matrice zavisiće od izbora komunaliteta.

Uzmimo da je rang redukovane korelacione matrice unapred određen i jednak m. Iz osobina simetričnih matrica može se pokazati da će rang matrice biti m ako je neki glavni minor m-tog reda različit od nule a svi minori $m + 1$. i $m + 2$. reda dobijeni od spomenutog minora dodavanjem po jedne, odnosno dve vrste i kolone jednak nuli. Odavde se dobija $(n - m)\ (n - m + 1)/2$ jednačina za izračunavanje n komunaliteta. Da bi mogao da se rešava ovaj sistem jednačina dovoljno je da bude

$$\frac{(n - m)\ (n - m + 1)}{2} \leqq n$$

ili

$$\frac{m^2 - (2n + 1)\ m + n\,(n - 1)}{2} \leq 0.$$

[3]) Za dokaz teoreme vidi H. Harman, *Modern Factor Analysis*, str. 63.

Rešenje po m-ove nejednačine daje

(10) $$n \geqslant m \geqslant \frac{(2n+1) - \sqrt{8n+1}}{2}$$

Leva strana nejednakosti (10) sledi iz uslova faktorskog problema tj. iz činjenice da broj zajedničkih faktora ne može biti veći od broja karakteristika.

Precizno izračunavanje komunaliteta povezano je sa mnogim računskim teškoćama pa se zato koriste aproksimativne metode. Zbog svoje uprošćenosti najčešće korišćen izraz za dobijanje komunaliteta je

(11) $$h_j^2 = \frac{\left(\sum_{p=1}^{n} r_{jp}\right)^2}{\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} r_{pq}}$$

Sabirci u brojiocu i imeniocu kod kojih je $j = p$ i $p = q$ zamenjuju se najvećim korelacijama odgovarajućih karakteristika.

Posle određivanja komunaliteta moguće je metodom GLAVNIH OSA dobiti prvu aproksimaciju linearnog faktorskog modela. Pri određivanju koeficijenata a_{jk}, $(j = 1,2, \ldots, n;\ k = 1,2, \ldots, m)$ prvo se izračunavaju a_{j1}, $(j = 1,2, \ldots, n)$ na taj način što se učešće prvog faktora u ukupnom komunalitetu maksimizira. Drugim rečima potrebno je tako izabrati koeficijente $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ da izraz

(12) $$K_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{n1}^2$$

dostigne maksimalnu vrednost K_1° pod uslovom da je

(13) $$r_{jp} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, a_{pk} \qquad (j,\ p = 1, 2, \ldots, n)$$

Zadnji uslovi znače da se posmatrane korelacije r_{jp} mogu zameniti reprodukovanim korelacijama r_{jp}.

Za maksimiziranje funkcije (12) pod uslovima (13) koristi se metoda Lagranžovih multiplikatora.

Neka je

(14) $$T(\{a_{jk};\ \lambda_{jp}\}) = \sum_{j,\,p=1}^{n} \lambda_{jp}\left(r_{jp} - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, a_{pk}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{j1}^2$$

gde Lagranžovih multiplikatora λ_{jp} ima $n(n+1)/2$, tj. onoliko koliko ima različitih r_{jp}, $(j,\ p = 1,2,\ldots, n)$. Kako je uslov za ekstrem funkcije $T(\{a_{jk};\ \lambda_{jp}\})$

$$\frac{\partial T}{\partial a_{jk}} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots, n;\ k = 1,2,\ldots, m)$$

to iz (14) dobijamo

(15) $$\frac{\partial T}{\partial a_{j1}} = 2a_{j1} - \lambda_{jj}\, a_{j1} - \sum_{p=1}^{n} \lambda_{pj}\, a_{p1} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

i

(16) $$\frac{\partial T}{\partial a_{jk}} = -\lambda_{jj}\, a_{jk} - \sum_{p=1}^{n} \lambda_{pj}\, a_{pk} = 0, \qquad \begin{matrix}(j = 1, 2, \ldots, n)\\(k = 2, 3, \ldots, m)\end{matrix}$$

Iz sistema jednačina (13), (15) i (16) potrebno je odrediti nepoznate a_{jk}, $(j = 1,2,\ldots, n;\ k = 1,2,\ldots, m)$. Prvo ćemo izračunati a_{j1}, $(j = 1,2,\ldots, n)$ a zatim sličnim postupkom mogu da se nađu i ostale nepoznate a_{jk}.

Množeći jednačinu (16) sa a_{j1} dobijamo

(16′) $$-\lambda_{jj}\, a_{jk}\, a_{j1} - a_{j1} \sum_{p=1}^{n} \lambda_{pj}\, a_{pk} = 0, \quad (k = 2, 3, \ldots, m).$$

Sabirajući (16′) po svim mogućim j imaćemo

(16″) $$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj}\, a_{jk}\, a_{j1} - \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \sum_{p=1}^{n} \lambda_{pj}\, a_{pk} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj}\, a_{jk}\, a_{j1} - \sum_{p=1}^{n} a_{pk} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{pj}\, a_{j1} = 0, \quad (k = 2, 3, \ldots, m).$$

Iz (16″) uzimajući u obzir (15) može se dalje pisati

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj}\, a_{jk}\, a_{j1} - \sum_{p=1}^{n} a_{pk}\,(2a_{p1} - \lambda_{pp}\, a_{p1}) = 0$$

ili

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj}\, a_{jk}\, a_{j1} - 2\sum_{p=1}^{n} a_{pk}\, a_{p1} + \sum_{p=1}^{n} \lambda_{pp}\, a_{pk}\, a_{p1} = 0$$

odnosno

(17) $$-2\sum_{p=1}^{n} a_{pk}\, a_{p1} = 0, \qquad (k = 2, 3, \ldots, m)$$

Množeći (17) sa a_{jk}, $(j = 1,2,\ldots, n)$ i sumirajući po k dobija se

$$\sum_{k=2}^{m} a_{jk} \sum_{p=1}^{n} a_{pk}\, a_{p1} = 0.$$

Menjajući redosled sumiranja ovaj izraz postaje

$$\sum_{p=1}^{n} a_{p1} \sum_{k=2}^{m} a_{jk}\, a_{pk} = 0$$

ili

$$\sum_{p=1}^{n} a_{p1}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\,a_{pk} - a_{j1}\,a_{p1}\right) = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Iz (18) neposredno se dobija

$$a_{j1}\sum_{p=1}^{n} a^2_{p1} - \sum_{p=1}^{n} r_{jp}\,a_{p1} = a_{j1}\,K_1 - \sum_{p=1}^{n} r_{jp}\,a_{p1} = 0,\ (j = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

U razvijenoj formi homogeni sistem jednačina (19) ima oblik

$$\begin{aligned}(r_{11} - K_1)\,a_{11} + r_{12}\,a_{21} + \ldots + r_{1n}\,a_{n1} &= 0\\ r_{21}\,a_{11} + (r_{22} - K_1)\,a_{21} + \ldots + r_{2n}\,a_{n1} &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ r_{n1}\,a_{11} + r_{n2}\,a_{21} + \ldots + (r_{nn} - K_1)\,a_{n1} &= 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Ovde je $r_{jj} = h_j^2$, $(j = 1,2,\ldots, n)$.

Da bi sistem jednačina (20) imao netrivijalna rešenja neophodno je i dovoljno da matrica koeficijenata uz nepoznate a_{j1}, ima rang manji od broja n. To znači da mora biti

$$\begin{vmatrix} (h_1^2 - K_1) & r_{12} & \ldots & r_{1j} & \ldots & r_{1n}\\ r_{21} & (h_2^2 - K_1) & \ldots & r_{2j} & \ldots & r_{2n}\\ & \ldots\ldots & & & & \\ r_{j1} & r_{j2} & \ldots & (h_j^2 - K_1) & \ldots & r_{jn}\\ & \ldots\ldots & & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nj} & \ldots & (h_n^2 - K_1)\end{vmatrix} = 0$$

Rešenjem ove determinante dobićemo jednačinu n-tog stepena po K_1 (u algebri je ta jednačina poznata pod imenom karakteristična). Dobijena jednačina ima n korena. Poznato je da ako bilo koji koren karakteristične jednačine zamenimo umesto K_1 u sistem (20), tada je moguće rešiti taj sistem i dobiti familiju rešenja proporcionalnih u odnosu na neko od a_{j1}, $(j = 1,2, \ldots, n)$.[4])

Pošto je naš cilj bio traženje vrednosti a_{j1}, $(j = 1,\ldots, n)$ takvih koje će izraz (12) maksimizirati, to treba između svih korena karakteristične jednačine uzeti najveći. Označimo tu vrednost sa K_1°. Neka su neka rešenja sistema (20) $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}$ tada iz uslova proporcionalnosti sledi

[4]) Gotovo u svakom univerzitetskom kursu linearne algebre može se naći ovo tvrđenje i postupak za rešenje sistema (20).

$$a_{11} = \gamma\,\alpha_{11};\ \alpha_{21} = \gamma\,\alpha_{21} \ldots a_{n1} = \gamma\,\alpha_{n1} \tag{21}$$

gde je γ koeficijent proporcionalnosti. Kvadrirajući jednakosti (21) i izračunavanjem γ dobijamo

$$\gamma = \frac{\sqrt{K_1^\circ}}{\sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \ldots + \alpha_{n1}^2}}$$

i prema tome

$$a_{j1} = \frac{\alpha_{j1}\sqrt{K_1^\circ}}{\sqrt{\sum_{p=1}^{n} \alpha_{p1}^2}} \qquad (j = 1,2, \ldots, n). \tag{22}$$

Na taj način smo odredili prvi koeficijent u jednačini (1).

Koeficijente a_{j2} računamo za faktor koji uzima maksimalnu vrednost od preostalog ukupnog komunaliteta.

Uzmimo da je

$${}_1r_{jp} = r_{jp} - a_{j1}\,a_{p1} = a_{j2}\,a_{p2} + a_{j3}\,a_{p3} + \ldots + a_{jm}\,a_{pm} \qquad (p,j = 1,2,\ldots, n). \tag{23}$$

Slično kao i pri određivanju koeficijenata a_{j1} izračunaćemo a_{j2} tako da se maksimizira izraz

$$K_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{n2}^2 \tag{24}$$

koji predstavlja učešće faktora F_2 u preostalom komunalitetu. Za ograničavajuće uslove uzima se izraz (23).

Sav dalji rad za određivanje koeficijenata a_{j2} isti je kao kod faktora F_1.

Izračunavanje koeficijenata uz ostale faktore iz jednačine (1) obavlja se na isti način

Posle dobijanja rešenja metodom glavnih osa postavlja se problem kako transformisati to rešenje na oblik koji će zadovoljavati uslove proste strukture. Međutim, uslovi proste strukture su kvalitativne prirode pa ih je teško analitički izraziti. Postoje mnogi pokušaji da se nađu analitički izrazi za prostu strukturu. Mi ih ovde nećemo diskutovati već ćemo objasniti metod koji je razvio Henri Kaiser[5]) 1958. godine.

U cilju što ekonomičnijeg opisa karakteristika osnovnog skupa Kaiser postavlja sledeću funkciju kriterija

$$V = n\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{jk}}{h_j}\right)^4 - \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jk}^2}{h_j^2}\right)^2. \tag{25}$$

[5]) H. Kaiser, »The Varimax Criterion for Analitic Rotation in Factor Analisis«, *Psych.*, 23 (1958).

Ovaj izraz je nastao iz varijanse kvadrata koeficijenata b_{jk}, $(j = 1,2, \ldots, n;\ k = 1,2, \ldots m)$. Komunaliteti h_j $(j = 1,2, \ldots, n)$ uvedeni su u izraz (25) u cilju normiranja b_{jk}. Bez takvog normiranja ovaj metod bi izazivao velike diskrepance u uticajima pojedinih karakteristika na faktore. Za dostizanje rešenja koje bar aproksimativno zadovoljava prostu strukturu potrebno je da se b_{jk} odrede tako da izraz (25) dostigne maksimum. Zbog toga se metod naziva VARIMAX metod. Ovim metodom ćemo jednovremeno transformisati po dva faktora. Transformativni obrasci imaju oblik

$$(26)\qquad \begin{aligned} b_{jk} &= a_{jk}\cos\varphi + a_{jl}\sin\varphi \\ b_{jl} &= -a_{jk}\sin\varphi + a_{jl}\cos\varphi \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k, l = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Ovi obrasci podsećaju na obrasce za rotaciju koordinatnog sistema u ravni oko svog početka. Zbog toga se ovaj metod naziva rotacijom.

Kako treba rotirati dva faktora istovremeno to funkcija kriterijuma dobija oblik

$$(27)\qquad V_{kl} = n\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{jk}}{h_j}\right)^4 - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jk}^2}{h_j^2}\right)^2 + n\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{jl}}{h_j}\right)^4 - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jl}^2}{h_j^2}\right)^2$$

Smenom (26) u (27) dobija se funkcija od φ. Označimo je sa V_{kl} (φ).

Za maksimalnu vrednost potrebno je da bude

$$(28)\qquad \frac{dV_{kl}(\varphi)}{d\varphi} = 0.$$

Iz (28) može se dobiti da je

$$tg4\varphi = \frac{D - \dfrac{2AB}{n}}{C - \dfrac{A^2 - B^2}{n}}$$

gde je:

$$A = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{jk}^2 - a_{jl}^2}{h_j^2}\right)$$

$$B = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{jk}\,a_{jl}}{h_j^2}$$

$$C = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{a_{jk}^2 - a_{jl}^2}{h_j^2}\right)^2 - 4\,\frac{a_{jk}^2\,a_{jl}^2}{h_j^4}\right]$$

$$D = 4\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_{jk}^2 - a_{jl}^2}{h_j^2}\cdot\frac{a_{jk}\,a_{jl}}{h_j^2}\right].$$

Nalaženjem ugla φ određuju se u potpunosti transformacioni obrasci (26). Označimo dobijenu transformaciju sa T_{kl}. Ako se piše u matričnom obliku (26) dobija sledeći oblik

$$B_{kl} = A_{kl}T_{kl}$$

gde su

$$B_{kl} = \begin{bmatrix} b_{1k} & b_{1l} \\ b_{2k} & b_{2l} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ b_{nk} & b_{nl} \end{bmatrix};\quad A_{kl} = \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ a_{2k} & a_{2l} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{nk} & a_{nl} \end{bmatrix};\quad T_{kl} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ovaj postupak treba izvesti za sve parove faktora. Tako se dobija izraz

$$B = AT_{12}\,T_{13}\ldots T_{kl}\ldots T_{m-1,\,m};\quad (k = 1, \ldots, m-1;\ l = k+1, \ldots, m).$$

Izračunavanja se završavaju kada se u (25) dobije dovoljno stabilna vrednost. Pod stabilnom vrednošću podrazumevamo da se do izvesnog broja decimala, unapred određenog, vrednost za V iz (25) ne menja posle transformisanja preko T_{kl}.

U zaključku još da kažemo da izračunavanja koja bi na konkretnim podacima trebalo obaviti prema obrascima datim u ovom radu, veoma su zametna. Tako, već u slučaju 10—15 karakteristika i 3—4 faktora neophodno je koristiti brze elektronske računske mašine.

U našoj zemlji prva iskustva u primeni faktorskih metoda dobijena su 1966—67. godine u Institutu ekonomskih nauka u Beogradu. Napravljen je program Varimax metoda za mašinu Eliot 803 B i proveren na problemima iz oblasti psihologije, agronomije i ekonomike.

(Rad primljen septembra 1970).

LITERATURA

[1] H. Harman, *Modern Factor Analysis*, The University of Chicago Press, 1967.

[2] L.L. Thurstone, *Multiple-Factor Analysis*, The University of Chicago Press, 1965.

[3] P. Horst, *Factor Analysis of Data Matrices*, Holt, Rinehart and Winston, INC. 1965.