CUBO, Vol. 2, Marzo 1986
Págs. 75-82

SOLUCION A PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1:

Si $a > 1$, $x > 0$, demuestre que,

$$-\log\left[1-(1-e^{-x})^{a}\right] < x^{a}$$

DEMOSTRACION

Sea $y = 1-e^{-x}$, entonces $0 < y < 1$; tenemos:

$$-\log\left[1-(1-e^{-x})^{a}\right] = -\log(1-y^{a}) = - - \sum_{n \geq 0} \frac{y^{(n+1)a}}{n+1}$$

$$= y^{a} \sum_{n \geq 0} \frac{y^{na}}{N+1}$$

$$< y^{a} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{y^{n}}{n+1} \right)^{a}$$

$$= (-\log(1-y))^a$$

pero $-\log(1-y) = x$ ya que: $y = 1-e^{-x}$

$$\therefore\ -\log\left[1-(1-e^{-x})^a\right] < x^a$$

PROBLEMA 2:

Demuestre que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

DEMOSTRACION

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 e^{x\log x} dx = \int_0^1 \sum_0^\infty \frac{(x\log x)^n}{n!} dx$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \log x)^n dx$$

Pero: $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \log x)^n dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1} n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt$

En efecto:

Sea $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t}dt$, $\log x = -t$

$$\int_0^1 (x \log x)^n dx = (-1)^n \int_0^\infty e^{-nt} t^n e^{-t} dt.$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-(n+1)t} t^n dt$$

Sea $(n+1)t = Z$

Luego: $\int_0^1 (x \log x)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-Z} Z^n \, dZ$

$$\therefore -\sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \log x)^n \, dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1} n!} \int_0^\infty e^{-Z} Z^n \, dZ$$

Así tenemos finalmente que:

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1} n!} \Gamma(n+1), \text{ ya que } \int_0^\infty e^{-Z} Z^n \, dZ = \Gamma(n+1)$$

$$\therefore \int_0^1 x^x \, dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

PROBLEMA 3:

Sea $f(x) \in C^2(0,\infty)$ tal que $f(0) = 0$, f continua en 0 y $f''(x) > 0$ $\quad x > 0$.

Demuestre que:

a) Existe $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

b) $\frac{f(t)}{t} < f'(t)$

c) La función

$$F(t) = \int_1^t \frac{f(x)}{x} \, dx \text{ es estrictamente convexa.}$$

DEMOSTRACION

a) Aplicamos Lagrange en $[0,x]$, o sea $\exists C_x \in (0,x)$ tal que

$f(x) - f(0) = x f'(C_x)$, pero $f(0) = 0$

luego $f(x) = x\, f'(C_x)$, o sea $\dfrac{f(x)}{x} = f'(C_x)$

pero como $f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ es monótona entonces:

$$\exists \lim_{x \to 0} f'(C_x) \quad \therefore \quad \exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$x \to 0$

b) Puesto que $f''(x) > 0$, tenemos que $f'(x)$ es creciente y puesto que $C_x < x$ tenemos $f'(C_x) < f'(x)$

es decir $\dfrac{f(x)}{x} < f'(x)$

c) $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{f(x)}{x}\, dx \Rightarrow F'(t) = \frac{f(t)}{t} \Rightarrow F''(t) = \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2}$

$$= \frac{f'(t)}{t} - \frac{f(t)}{t^2}$$

pero t es positivo y de (b) sabemos que $f'(x) - \dfrac{f(x)}{x} > 0$

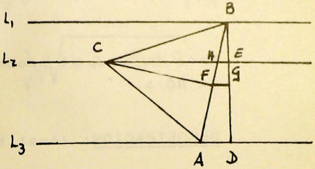
dividiendo por $t > 0$ tenemos $\dfrac{f'(t)}{t} - \dfrac{f(t)}{t^2} > 0 \quad \therefore \quad F''(t) > 0$

y la función es convexa.

PROBLEMA 4:

Dadas tres rectas paralelas, construya un triángulo equilátero con vértices en cada recta.

Análisis:



Sean L_1, L_2, L_3 rectas tales que $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ con $d(L_1,L_2) = a$, $d(L_2,L_3) = b$. Consideremos $\Delta\, ABC$ pedido con $B \in L_1$, $A \in L_3$ y $C \in L_2$.

Al fijar dos vértices se resuelve el problema.

Inicialmente fijemos $B \in L_1$ de modo que $\overline{BD} \perp L_3$ con $D \in L_3$ y $\overline{BD} \cap L_2 = \{E\}$

Sea $\frac{b}{2} \neq a < b$

Tracemos $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ en $F \in \overline{AB}$ Y $\overline{FG} \perp \overline{BD}$ en $G \in \overline{BD}$.

$\overline{AF} \cong \overline{FB} \Rightarrow \overline{BG} \cong \overline{GD}$ Por Thales, luego $\Delta\, BFG \cong \Delta BAD \cong \Delta\, BHE$ [Rectángulos]

Para fijar A se considera la construcción de $\overline{FG}$ solo en función de los valores a y b.

Siendo $\overline{AB} \cap L_2 = \{H\} \Rightarrow \frac{FH}{FB} = \frac{GE}{GB}$ Por Thales

Como $GB = \frac{a+b}{2}$ y $GE = \frac{b-a}{2}$ y si $FB = \frac{c}{2} \Rightarrow FH = \frac{c}{2} \cdot \frac{b-a}{B+a}$

como $\Delta\, ABC$ es equilátero $\Rightarrow CF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot C$

siendo $\sphericalangle FCH \cong \sphericalangle GBF$ (de igual naturaleza y lados respectivamente perpendiculares)

$\sphericalangle\, CFH \cong \sphericalangle BEH$ (Rectos)

Entonces por A.A. de semejanza, se llega a que: $\triangle CFH \sim \triangle BGF$

Donde $\frac{CF}{HF} = \frac{BG}{FG} \Rightarrow FG = \frac{FH.BG}{CF} = \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}}$

Lo que conduce a que $AD = \frac{b-a}{\sqrt{3}}$

Para fijar C se procede con $\otimes(A, AB) \cap L_2$ de modo que $C \in \overline{BD}/A$.

<u>DEMOSTRACION:</u> (Analítica)

P.d.q. en $\triangle ABC$ es $AB = BC = AC$.

Sea L_3 el eje de Abscisas, $\overleftrightarrow{DB}$ el eje de Ordenadas y D el origen.

Luego $A\left(-\frac{b-a}{\sqrt{3}}, 0\right)$; $B(0, a+b)$; $F\left(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \frac{a+b}{2}\right)$

Sean $m_{AB} = \frac{a+b}{b-a}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow m_{FC} = -\frac{b-a}{(a+b)\cdot\sqrt{3}}$ de modo que la recta CF se representa por:

$$Y - \frac{a+b}{2} = -\frac{b-a}{(a+b)\cdot\sqrt{3}}\left(x + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)$$

Como $\overline{CF} \cap L_2 = \{C\}$ e $y = b$ representa a la recta L_2, entonces:

$$b - \frac{a+b}{2} = -\frac{b-a}{(a+b)\cdot\sqrt{3}}\left(x + \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}}\right) \rightarrow x = -\frac{3(a+b)}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ C\left(-\frac{\sqrt{3}(a+b)}{2} - \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}}, b\right)$$

Luego:

$$AB = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{3} + (a+b)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

$$BC = \sqrt{\left[\frac{3}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2\;3}\right]^2 + a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(a+2b)^2 + 3a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$$

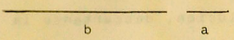
$$AC = \sqrt{\left[-\frac{b-a}{3} + \frac{3(a+b)}{2} + \frac{b-a}{2\;3}\right]^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(2a+b)^2 + 3b^2} =$$

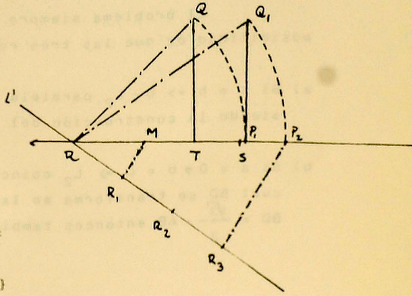
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

$\therefore$ ΔABC equilátero con $A \in L_3$, $B \in L_1$, $C \in L_2$.

<u>CONSTRUCCION:</u>

Dados dos trazos de medidas a y b





Primero se construye $\overline{AD}$.

Se traza L construyendo en ella: b-a

Sean RS = b; TS = a => RT=b-a

En T haga $\overline{QT} \perp L$ $\overline{QT} \cong \overline{RT}$

R(<->) Q y ⓧ (R, RQ) $\cap$ L = $\{P_1\}$

En P_1 haga $\overline{Q_1P_1} \perp L$ $\overline{Q_1P_1} \cong \overline{RT}$

R (<->) Q_1 y ⓧ (R, RQ_1) $\cap$ L = $\{P_2\}$

Como $RP_1 = \sqrt{2}\,(b-a)$ => $RP_2 = \sqrt{3}\,(b-a)$

Por R se traza L' $\nparallel$ L, ubicando en L' los puntos R_1, R_2, R_3

$RR_1 = R_1R_2 = R_2\,R_3$ siendo $R_1 - R_2 - R_3$.

R_3 (<->) P_2 y considerando $\overline{R_1M}$ // $\overline{R_3P_2}$ con $M \in L$ => $RM = \frac{\sqrt{3}(b-a)}{3}$

de donde $AD = RM = \frac{b-a}{\sqrt{3}}$

A continuación se trazan las rectas L_1, L_2, L_3 paralelas entre sí de modo que L_2 esté entre L_1 y L_3 siendo $d(L_1, L_2) = a$ y $d(L_2, L_3) = b$.

Siguiendo el delineamiento sugerido en el Análisis se construye $\overline{BD} \perp L_3$ de modo que $B \in L_1$ y $D \in L_3$.

Con ⓧ $(D, RM) \cap L_3 = \{A\}$

A(->) B genera el lado AB y con ⓧ $(A, AB) \cap$ ⓧ $(B, AB) = \{C\}$ con C obviamente en L_2.

<u>DISCUSION</u>

El problema siempre tiene solución, descartando la posibilidad de que las tres rectas coincidan.

a) Si $a = b$ => $C \in L_2$ paralela media => $AB = BD$ pues $FG = AD = 0$ siendo la construcción del ΔABC inmediata.

b) Si $a = 0 \vee b = 0$ => L_2 coincide con L_1 o bien con L_3 con lo cual BD se transforma en la altura del ΔABC pedido y como $BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB$ entonces también la construcción es inmediata.