CUBO, Vol. 2, Marzo 1986
Pág. 14-24

EL GRUPO DE LOS DIFEOMORFISMOS, dif(X), DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE CONEXA, SIN BORDE, X, OPERA TRANSITIVAMENTE SOBRE LA VARIEDAD X

Gustavo Avello J. *

Se probará el siguiente:

TEOREMA

Sea X una variedad, conexa, sin borde, de clase C^p, $p \geq 1$, de dimensión d. Para todo par (a,b) de puntos de X, existe f en dif(X) tal que f(a) = b.

Este es un resultado conocido de topología diferencial y, afirma, en otros términos, que una variedad conexa sin borde es homogénea, esto es, ella se ve exactamente igual en todos sus puntos, no hay partes "distinguidas", [1].

La demostración que se presenta sigue en general el esquema de [2], pág.74, aunque se complementa con algunas partes que allí no aparecen desarrolladas.

*Depto. de Matemática, Universidad de Concepción

Este resultado puede también obtenerse como un caso particular de un teorema que aparece en [3] , pág. 189, cuya demostración es completamente diferente.

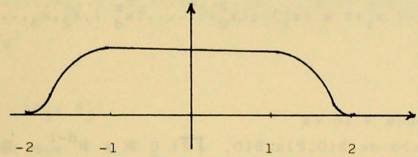
Para demostrar el teorema probaremos, previamente, tres lemas.

Lema 1

Existe $\xi > 0$, tal que para todo t, $|t| \leq \xi$, existe $g = g_t \in \mathrm{dif}(\mathbb{R})$, tal que $g(0) = t$, $g(x) = x$ para $|x| \geq 2$.

Demostración

Sea $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como en la figura:



tal que ϕ es de clase C^∞, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ sobre $[-1, 1]$ y $\phi = 0$ para $|x| \geq 2$.

Consideremos la función $g = t\phi + I_{\mathbb{R}}$, donde $|t| \leq \xi$, ξ es una constante cuyo valor se va a determinar, e, $I_{\mathbb{R}}$ = identidad de $\mathbb{R}$.

Se tiene $g' = t\,\phi' + 1$, luego existe $\xi > 0$ tal que $\xi \,\|\phi'\| < 1$, donde $\|\phi'\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)|$

Es claro que para todo t tal que $|t| \leq \xi$, $g'(x) > 0$ para todo x en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto la función g es de clase C^{∞}, estrictamente creciente, luego g es un C^{∞}-difeomorfismo. Se tiene $g(o)=t$ y para $|x| \geq 2$, $g(x) = x$.

Lema 2.

Existe $\xi > 0$, tal que para todo $y \in B(o, \xi) \subset \mathbb{R}^d$, existe $g = g^{(y)}$ en dif $(\mathbb{R}^d)$ tal que $g(o) = y$, $g = I_{\mathbb{R}^d}$ sobre $\mathbb{R}^d - B(o,1)$.

Sea ϕ la función considerada en la demostración de Lema 1.
Sea $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, definida por:
$h(x_1, \ldots, x_d) = [\, x_1 + t\,\phi\,(x_1)\,\phi(x_2^2 + \ldots\ldots x_d^2), x_2, x_3, \ldots\ldots x_d]$

Se tiene:

1) h es C^{∞}, pues ϕ lo es
2) $h = I_{\mathbb{R}^d}$ fuera de $B(0,2) \times B(0, \sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} = \mathbb{R}^d$,
esto es, $h(x) = x$ para $x \in A_1 = \mathbb{R}^d - B(0,2) \times B(0,\sqrt{2})$
pues, $x = (x_1, x_1')$ con $x_1' = (x_2, \ldots\ldots, x_d)$
$x \in A_1 \iff |x_1| \geq 2$ o $\|x_1'\|^2 = x_2^2 + \ldots + x_d^2 \geq 2$
así, $h(x) = x$ por definición de h.
3) h es inyectiva: pues de la relación
$h(x) = h(z)$, resulta: $x = (x_1, x_1')$, $z = (z_1, z_1')$
$x_1' = z_1'$, $x_1 + t\,\phi\,(x_1)\,\phi\,(\|x_1'\|^2) = z_1 + t\,\phi\,(z_1)\,\phi\,(\|z_1'\|^2)$;
si ponemos $K = \phi\,(\|x_1'\|^2) = \phi\,(\|z_1'\|^2)$ se obtiene
$x_1 + t\,\phi\,(x_1)\,K = z_1 + t\,\phi\,(z_1)\,K$, por lo tanto
$|x_1 - z_1| = |tK\,(\phi\,(z_1) - \phi\,(x_1))| \leq |tK\,\phi'(\xi)|\,|z_1 - x_1|$

$|x_1 - z_1| \leq |t\,\phi'(\xi)|\,|z_1 - x_1| \leq |t|\,\|\phi'\|\,|z_1 - x_1|$, como $|t| \, \| \phi' \| < \varepsilon \| \phi' \| < 1$, resulta $z_1 = x_1$; por lo tanto $u = z$

4) Para todo x en $\mathbb{R}^d$, $h'(x) \in Isom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

En efecto, $\det [h'(x)] = 1 + \xi\phi'(x_1)\,\phi(x_2^2 + \ldots + x_d^2) > 0$

Es claro que h depende de t, con $|t| \leq \xi$, escribamos entonces $h = h_t$. De 1), 2), 3) y 4) resulta $h_t \in$ dif $(\mathbb{R}^d)$, $h_t(0,\ldots,0) = (t,0,\ldots,0)$, $h = I_{\mathbb{R}^d}$ sobre $\mathbb{R}^d - B(0,2) \times B(0, \sqrt{2})$.

Para $j \in \{1,2,\ldots..d\}$ y $|t| \leq \xi$, consideremos la función $H(j,t) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, definida por:

$$H(j,t)\,(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_d) = (x_1,\ldots x_{j-1},\; x_j + t\,\phi(x_j)\,\phi(\|x'_j\|^2),\; x_{j+1},\ldots x_d)$$

donde $x = (x_j, x'_j)$

Es fácil ver que

$H(j,t) = \sigma_j \circ h_t$, donde $\sigma_j : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ está definida por:

$$\sigma_j\,(x_1,\ldots,x_j,\ldots.x_d) = (x_j, x_2,\ldots,x_{j-1}, x_1, x_{j+1},\ldots,x_d)$$

y h_t es el difeomorfismo que acaba de construirse, luego, para todo $j \in \{1,2,\ldots d\}$ y para todo t, $|t| \leq \xi$, se tiene $H(j,t) \in$ dif $(\mathbb{R}^d)$.

Además cualesquiera que sean $j \in \{1,2,\ldots.d\}$ y $t_1, t_2 \ldots t_d$, con $|t_j| \leq \xi$, se tiene:

$H(j,t_j)(t_1,\dots,t_{j-1},0,\dots,0) = (\xi_1,\dots,\xi_{j-1}, \xi_j, 0\dots0)$

$H(j,t) = I_{\mathbb{R}^d}$ sobre $\mathbb{R}^d - A_j$, donde $A_j = \{ (x_1,\dots,x_j,\dots,x_d):$
$|x_j| < 2,\ \|x_j'\| < \sqrt{2} \}$

Puede notarse también que:

$H(1,t_1) = h_{t_1}$

$H(1,t_1)(0,\dots,0) = (t_1,0,\dots,0)$

Así:

$$(0,\dots,0) \xrightarrow{H(1,t_1)} (t_1,0,\dots,0) \xrightarrow{H(2,t_2)} (t_1,t_2,0,\dots,0) \to \dots \xrightarrow{H(d,t_d)} (t_1,t_2,\dots,t_d)$$

Considerando:

$G = H(d,t_d) \circ H(d-1,t_{d-1}) \circ \dots \circ H(1,t_1)$

Se obtiene:

$$\begin{cases} G \in \mathrm{dif}(\mathbb{R}^d) \\ G(0,\dots,0) = (t_1,\dots,t_d) \\ G = I_{\mathbb{R}^d} \text{ sobre } \mathbb{R}^d - B(0,r\ ) \end{cases}$$

donde $B(0, r\ )$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^d$ que contiene al conjunto acotado $\bigcup_{j=1}^{d} A_j$

Es claro que G depende de $(t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{R}^d$, con $|t_j| \leq \xi$. Pongamos entonces $G = G^{(t_1,\dots,t_d)}$

considerando ahora $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definida para todo $x \in \mathbb{R}^d$ por $g(x) = \frac{1}{r} G(r x)$ se obtiene:

$$\begin{cases} g \in \mathrm{dif}(\mathbb{R}^d) \\ g = I_{\mathbb{R}^d} \text{ sobre } \mathbb{R}^d - B(0,1) \\ g(0) = \frac{1}{r}\,(t_1,\ldots t_d) \end{cases}$$

De aquí se concluye que para todo $y = (y_1,\ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que $||y|| < \frac{1}{r}\,\xi = \xi_1$, existe $g = g^{(y)}$ en $\mathrm{dif}(\mathbb{R}^d)$ que verifica $g(0) = y$, $g = I_{\mathbb{R}^d}$ sobre $\mathbb{R}^d - B(0,1)$

COROLARIO

Existe $\xi > 0$ tal que para todo $\beta \in]0,\xi[$, y para todo $y \in \mathbb{R}^d$, con $||y|| < \beta$ existe $g = g^{(y)}$ en $\mathrm{dif}(\mathbb{R}^d)$ tal que $g(0)=y$, $g = I_{\mathbb{R}^d}$ sobre $\mathbb{R}^d - B(0, \beta)$.

DEMOSTRACION

Basta considerar la función $x \longmapsto g(\beta x)$, con g y ξ como en Lema 2.

Lema 3.-

Para todo x en X, existe un abierto **U** de X que contiene x, tal que para todo y en **U** existe $f = f^{(y)}$ en $\mathrm{dif}(X)$, tal que $f(x) = y$.

Demostración

Sea (V, ϕ_1) una carta de X en x. Como $\phi_1(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^d$, existe ψ en $\mathrm{dif}(\mathbb{R}^d)$ tal que:

$$\bar{B}(0,1) \subset \psi(\phi_1(V))$$

En efecto, existe una bola cerrada $\bar{B}(a,r) \subset \phi_1(V)$, esto es porque $\phi_1(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^d$, sea ψ en $\mathrm{dif}(\mathbb{R}^d)$, tal que $\psi(\bar{B}(a,r)) = \bar{B}(0,1)$, por ejemplo sea $\psi(y) = \frac{1}{r}(y-a)$, se tiene:

$\bar{B}(0,1) = \psi(\bar{B}(a,r)) \subset \psi(\phi_1(V)) = \phi(V)$, con $\phi = \psi \circ \phi_1$. Es claro que el par (V, ϕ) es también una carta de X con x, pues $\phi : V \to \phi(V)$ es biyección, y para toda carta (V_i, ϕ_i) de X, se tiene: $\phi(V_i \cap V)$ y $\phi_i(V_i \cap V)$ abiertos en $\mathbb{R}^d$, $\phi \circ \phi_i^{-1}$ y $\phi_i \circ \phi^{-1}$ de clase C^p.

Se puede además suponer a esta carta (V, ϕ) centrada en x, esto es, $\phi(x) = 0$. Si así no fuera, se considera $\tilde{\phi} = \phi - \phi(x)$, $\tilde{\phi} = \tau \circ \phi$, $\tau(y) = y - \phi(x)$, así $(V, \tilde{\phi})$ es una carta de X en x, tal que $\tilde{\phi}(x) = 0$.

Es claro que $\bar{B}(0,1) \subset \phi(V)$, pero no se puede asegurar que $\bar{B}(0,1) \subset \tilde{\phi}(V)$. Sin embargo, existe $\beta \in \,]0, \xi[$, donde ξ es el número cuya existencia asegura el corolario precedente, tal que:

$\bar{B}(0, \beta) \subset \tilde{\phi}(V)$, esto es porque $0 = \tilde{\phi}(x) \in \tilde{\phi}(V)$ y $\tilde{\phi}(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^d$.

Pongamos $U = (\tilde{\phi})^{-1}[B(0,\beta)]$, U es abierto en X, $x \in U$ pues $\tilde{\phi}(x) = 0 \in B(0, \beta)$.

Para todo y en U, considerando $z = \tilde{\phi}(y) \in B(0, \beta)$ existe, por corolario precedente, $g = g^{(y)}$ en $\mathrm{dif}(\mathbb{R}^d)$ tal que: $g(0) = z = \tilde{\phi}(y)$

$$g = I_{\mathbb{R}^d} \text{ sobre } \mathbb{R}^d - B(0, \beta).$$

Definamos $f = f^{(y)}: X \to X$, por:

$f = I_X$ sobre $X - (\tilde{\phi})^{-1} [\bar{B}(0, \beta)]$

$f = (\tilde{\phi})^{-1} \circ g \circ (\tilde{\phi})$ sobre $(\tilde{\phi})^{-1} [\bar{B}(0, \beta)]$

Se tiene:

(1) f es biyección:

Se tiene $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Si $a, b \in Y = (\tilde{\phi})^{-1} [B(0, \beta)]$, o si $a, b \in Y^c$, resulta $f(a) \neq f(b)$ pues $f|Y$ y $f|Y^c$ son inyectivas.

Supongamos, por ejemplo, $a \in Y$, $b \in Y^c$ se tiene:

$f(b) = b$

$f(a) = [(\tilde{\phi})^{-1} \circ g \circ \tilde{\phi}](a)$

Con $\tilde{\phi}(a) \in \bar{B}(0, \beta)$, si se tuviera $f(a) = f(b)$, resultaría, $(\tilde{\phi})^{-1} g(\tilde{\phi}(a)) = b$, por lo tanto, se tendría, $g(\tilde{\phi}(a)) = \tilde{\phi}(b)$, ...: (1)

Pero $g(\tilde{\phi}(b)) = \tilde{\phi}(b)$, pues $\tilde{\phi}(b) \notin B(0, \beta)$, ya que $b \notin (\tilde{\phi})^{-1} [B(0, \beta)]$, luego de (1) se tendría $\tilde{\phi}(a) = \tilde{\phi}(b)$, ¡absurdo!

(2) f es de clase C^p: pues $X = Y^c \cup V$, ya que $Y = (\tilde{\phi})^{-1}[\bar{B}(0,\beta)]^c$ $(\tilde{\phi})^{-1}[(\tilde{\phi})(V)]^c$ V y $f|Y^c$, $f|V$ son de clase C^p.

(3) $f(x) = y$: pues $f(x) = [(\tilde{\phi})^{-1} \circ g \circ \tilde{\phi}](x) =$

$= (\tilde{\phi})^{-1}[g(\tilde{\phi})(x))] = (\tilde{\phi})^{-1}(g(0)) = (\tilde{\phi})^{-1}(\tilde{\phi})(y)) = y.$

(4) f^{-1} es la clase C^p: Viene de la definición de f

Demostración del Teorema

Sean $x, y \in X$

Para x fijo en X, sea $A = A_x$ el conjunto definido por:

$A = \{y \in X |$ existe $g = g^{(y)} \in \text{dif}\ (X)$, tal que $g^{(y)}(x) = y\}$

Es claro que A no es vacío, se probará enseguida que A es abierto y cerrado en X, como X es conexo resultará $A = X$ y el teorema estará probado.

A es abierto:

Sea $y \in A$, por Lema 3, existe abierto U de X que contiene y tal que para todo z en U, existe $f^{(z)}$ en dif(X) tal que $f^{(z)}(y) = z$.

Probemos que $U \subseteq A$. Sea $z \in U$, $f^{(z)} \in \text{dif}\ (X)$ tal que $f^{(z)}(y) = z$.

Como $y \in A$, existe $g^{(y)} \in \operatorname{dif}(X)$ tal que $g^{(y)}(x)=y$

Por lo tanto $f^{(z)}(g^{(y)}(x)) = f^{(z)}(y) = z$

Así, $(f^{(z)} \circ g^{(y)})(x) = z$. Luego $z \in A$.

A es cerrado

Sea $z \in \bar{A}$, se probará que $z \in A$. Por Lema 3, existe un abierto U de X que contiene z, tal que, para todo y en U, existe $g^{(y)} \in \operatorname{dif}(X)$ tal que $g^{(y)}(z) = y$, por definición de $\bar{A}$, $A \cap U \neq \emptyset$, sea $x_o \in A \cap U$

Por lo tanto existe $f^{(x_o)} \in \operatorname{dif}(X)$ tal que $f^{(x_o)}(x) = x_o$ (pues $x_o \in A$).

Además, existe $g^{(x_o)} \in \operatorname{dif}(X)$ tal que $g^{(x_o)}(z) = x_o$ pues $x_o \in U$.

De donde: $g^{(x_o)}(z) = f^{(x_o)}(x)$, y,

$z = [(g^{(x_o)})^{-1} \circ f^{(x_o)}](x)$.

Así, $z \in A$ y A es cerrado.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Berger, B. Vostiaux' Geometrie Differentielle (Armand Collin, 1971)

[2] M. W. Hirsch; Differential Topology (Armand Collin, 1971)

[3] J. D ieudonneé: Elements d' Analyse. Tomo III, Gauthiers-Villars, 1970