CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 131-141

CAMPOS CUADRATICOS EN EL PLANO

Rodrigo Bamón *

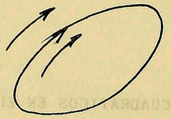
INTRODUCCION:

Llamaremos campo polinomial en el plano a cualquier ecuación diferencial en dos variables del tipo siguiente

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{x} = P(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \\ \dot{y} = Q(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j \end{cases}$$

* Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

Una solución $\phi(t) = (x(t), y(t))$ de (1) (ver definiciones en Capítulo I) se llama <u>órbita periódica</u> de (1) si existe algún $T > 0$ tal que $\phi(T) = \phi(0)$. Un <u>ciclo límite</u> de un campo polinomial es una órbita periódica tal que en una vecindad de ella no hay ninguna otra órbita periódica. Gráficamente un ciclo límite es como en la figura.



En el año 1900 David Hilbert planteó 23 problemas que a su juicio ocuparían la atención de los matemáticos del siglo XX. Entre ellos, el problema 16 contenía una pregunta sobre ciclos límites de campos polinomiales. Esta era la siguiente:

"Describir la posición en el plano y dar una cota para el número de ciclos límites de campos polinomiales de grado n".

Contrariamente a lo ocurrido con los restantes problemas enunciados por Hilbert, el 16 está aún lejos de ser resuelto. Basta decir que para grado $n \geq 3$ nada se sabe y que para grado $n = 2$ se saben algunas cosas y se conjeturan otras. Este cursillo trata justamente sobre los resultados ya obtenidos para campos cuadráticos en el plano.

Dividiré estas notas en tres Capítulos:

En el primero veremos generalidades sobre ecuaciones diferenciales en el plano: interpretación geométrica, solución, singularidad, contacto, conjunto invariante, transformación afín y un corolario del Teorema de Poincaré-Bendixon. En el segundo Capítulo veremos con demostración todos los resultados referentes a la posición en el plano de las órbitas periódicas de campos cuadráticos. Finalmente en el Capítulo tercero nos dedicaremos al problema del número de ciclos límites de campos cuadráticos.

CAPITULO I.-

Preliminares.

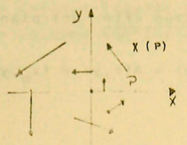
Un campo en el plano es una ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

donde P y Q son funciones diferenciables.

Escribiremos también este campo en la forma $X(p) = (P(p), Q(p))$, donde $p = (x,y)$. Esto nos permite una interpretación geométrica útil: en cada punto p del plano ponemos el vector X(p) basado en p. Obtenemos un campo de vectores en el plano.

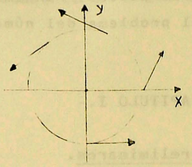
Ejemplo: $X(x,y) = (-y,x)$



Por *solución* de un campo entenderemos cualquier curva $\phi : I \to \mathbb{R}^2$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, tal que $\phi'(t) = X(\phi(t))$. Gráficamente vemos que una solución debe tener exactamente la velocidad predicha por X.

Ejemplo: $\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

es solución de $X(x,y) = (-y,x)$.



Por la teoría general de ecuaciones diferenciales sabemos que dado un campo X y dado $p \in \mathbb{R}^2$ entonces existe una única solución $\phi(t)$ de X, tal que $\phi(0) = p$. Este hecho es crucial pués nos hace ver que dos soluciones nunca se interceptan.

Definiremos a continuación algunos conceptos que nos serán útiles en los Capítulos siguientes:

Una *singularidad* de un campo X es un punto $p \in \mathbb{R}^2$ donde $X(p) = 0$. En estos puntos $\phi(t) = p \;\; \forall \; t \in \mathbb{R}$. Un *conjunto invariante* por X es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que las órbitas de X no entran ni salen de A. Dado un campo X y una recta ℓ en $\mathbb{R}^2$, entonces X tiene un *contacto* con ℓ en p si $X(p) = 0$ ó $X(p)$ tiene la dirección de ℓ. En caso contrario X es *transversal a ℓ en p*.

Una *transofrmación afín* del plano es una aplicación de la forma

$$(u,v) = T(x,y) = A(x,y) + (x_0, y_0)$$

donde A es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ y $(x_o, y_o) \varepsilon \mathbb{R}^2$ un vector. Dado un campo X en coordenadas (x,y) y dada una transformación afín $(u,v) = T(x,y)$ entonces el transformado de X a las nuevas coordenadas (u,v) es el campo

$$\tilde{x}(u,v) = (A \circ X \circ T^{-1})(u,v).$$

Observamos en este punto que una transformación afín del plano lleva campos polinomiales de grado n en campos polinomiales de grado n, rectas invariantes en rectas invariantes y contactos en contactos. Esto nos será útil posteriormente.

Para terminar este Capítulo presentamos un resultado básico en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y que se obtiene del llamado Teorema de Poincaré-Bendixon. Dice así: En la región acotada por una órbita períodica γ de un campo X , existe por lo menos una singularidad de X.

CAPITULO II.-

Posición relativa de las órbitas periódicas de un campo cuadrático.-

El problema de la posición en el plano de las órbitas periódicas de un campo cuadrático fue abordado por los chinos Tung Chin Chu y Yeh Yan Quian a finales de la década del 50. La respuesta es completa y pasamos ahora a exponerla.

LEMA:

Dado un campo cuadrático X y dada una recta ℓ entonces ó ℓ es invariante por X ó tiene a lo más dos contactos con X.

DEMOSTRACION:

Supongamos primero que la recta ℓ es exactamente la recta $x = 0$. Los contactos de X con ℓ se obtienen de la ecuación $P(0,y) = a_{00} + a_{01}y + a_{02}y^2 = 0$. Si $P(0,y) \equiv 0$ la recta $x = 0$ es invariante. En caso contrario se tienen a lo más dos contactos.

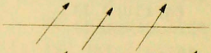
Supongamos ahora que la recta ℓ no es la recta $x = 0$. Con un cambio de coordenadas afín $(u,v) = T(x,y)$ llevamos la recta ℓ a la recta $u = 0$ y caemos en la situación anterior.

c.e.d.

COROLARIO:

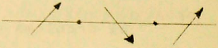
Si ℓ no es invariante entonces X cumple una de las tres posibilidades siguientes:

i) es transversal a ℓ (sin contactos)



ii) tiene un contacto con ℓ. En este caso:

iii) tiene dos contactos con ℓ. En este caso:



Es decir, cuando tiene un contacto atraviesa a la recta ℓ en un mismo sentido y cuando tiene dos contactos cambia de sentido al cruzar un contacto.

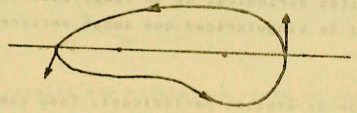
Veamos ahora algunas proposiciones:

PROPOSICION 1.

En la región acotada por una órbita periódica de un campo cuadrático existe a lo más una singularidad.

DEMOSTRACION:

Sabemos del Capítulo I que por lo menos hay una singularidad en la región acotada por la órbita periódica. Supongamos ahora que haya dos. Entonces la recta ℓ que une estas dos singularidades tiene dos contactos y gráficamente verifica



Esto contradice la parte (iii) del corolario.

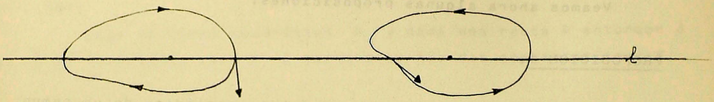
q.e.d.

PROPOSICION 2:

Si dos órbitas períodicas de un campo cuadrático encierran regiones acotadas disjuntas, entonces estas órbitas giran en sentidos opuestos.

DEMOSTRACION

Sea ℓ la recta que une las singularidades en las regiones acotadas por las órbitas periódicas. Entonces gráficamente



Por la parte (iii) del Corolaterio tenemos demostrada la Proposición 2.

q.e.d.

DEFINICION:

Dos órbitas periódicas de un campo cuadrático se dicen concéntricas si la singularidad que ambas encierran es la misma.

TEOREMA:

(Posición de órbitas periódicas). Todo campo cuadrático tiene a lo más dos series de órbitas periódicas concéntricas. Las de una serie giran en un sentido, en tanto que las de la otra giran en sentido opuesto.

DEMOSTRACION

Puesto que por la Proposición 2, dos órbitas no concéntricas giran en sentidos opuestos y sólo hay dos posibles sentidos de giro, las órbitas se ubican en dos series de órbitas concéntricas. Además en una misma serie deben girar todas en un mismo sentido, en caso contrario existiría una recta no invariante con tres contactos contradiciendo el Lema.

q.e.d.

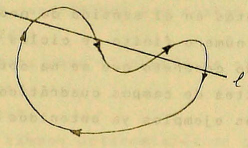
Para terminar este Capítulo damos una última proposición:

PROPOSICION 3:

La región acotada por una órbita periódica de un campo cuadrático es una región convexa.

DEMOSTRACION:

Si no lo es entonces gráficamente tendríamos la situación siguiente:



De aquí resulta que existe una recta no invariante con tres contactos, lo que como hemos visto es una contradicción.

q.e.d.

CAPITULO III.-

Número de ciclos límites.-

Si observamos los ejemplos conocidos de campos cuadráticos con ciclos límites, saltan a la vista dos cosas: primero que no es fácil encontrar éstos ejemplos y segundo que todos tienen un reducido número de ciclos límites.

Esta constatación viene a confirmar lo propuesto por Hilbert en el problema 16 en el sentido de que existe una cota para el número de ciclos límites de campos polinomiales de grado n , n cualquiera.

No obstante lo anterior, es bastante sorprendente que aún no se sepa si existe o no una cota para el número de ciclos límites de campos cuadráticos, Más todavía, hasta hace muy poco tiempo no era sabido si existía o no campos cuadráticos con infinitos ciclos límites. Esto último fue resuelto en 1985 por el autor de estas notas en el sentido de probar que todo campo cuadrático tiene un número finito de ciclos límites. Este es casi el único resultado concreto que se ha obtenido respecto al número de ciclos límites de campos cuadráticos. Los otros resultados corresponden a los ejemplos ya obtenidos y que ahora pasaremos a explicitar:

M. Frommer., 1934: un ciclo límite (figura (a))

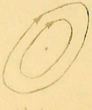
N. Bautin, 1952-1954: dos y tres ciclos límites concéntricos (figuras (b_1) y (b_2))

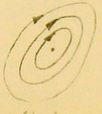
Yeh Yan Quiam., 1957: dos ciclos límites no concéntricos (figura (c))

Tung Chin-Chu., 1959: tres ciclos límites, dos de ellos concéntricos (figura (d))

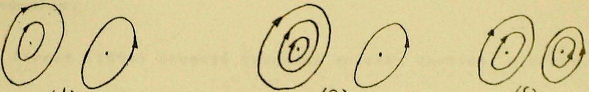
Shi-Song Lin., 1980: cuatro ciclos límites, tres de ellos concéntricos (figura (e))


(a)


(b_1)


(b_2)


(c)



(d) (e) (f)

Terminaremos este Capítulo planteando algunas preguntas que quedan por responder:

1.- ¿Existen campos cuadráticos con cuatro ciclos límites como en la figura (f)?.

2.- ¿Es cuatro la cota para el número de ciclos límites de campos cuadráticos?.

3.- ¿Existe tal cota?

4.- ¿Qué pasa para campos polinomiales de grado superior?

BIBLIOGRAFIA:

[1] W.A. Coppel., A. Survey of Quadratic Systems. Journal of Differential Equations, 2 (1966), 293-304.

[2] J. Palis and W. de Melo., Introducao aos Sistemas Dinámicos. Proyeto Euclides.

[3] Ye Yan Quiam,. Some problems in the qualitative theory of ordinary differential equations, Jdurnal of Differential Equations 46 (1982) 153-164

[4] Ye Yan Quian., Theory of limit cycles. Translations of Mathematical Monographs. Vol 66. Am. Math. Soc.