CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 81-91

CONTROLABILIDAD DIRECCIONAL BIPARAMETRICA EN EL PLANO (*)

M. Elena San Martín A. **

RESUMEN:

Se plantea el problema de establecer regiones del plano en las cuales sea factible mover el estado inicial a través de trayectorias rectilíneas que tengan una dirección preestablecida.

* Proyecto RS - 83 - 34 Direcc. Investigación y Desarrollo, Universidad Autral de Chile.

** Instituto de Matemática, Universidad Austral de Chile, Valdivia.

INTRODUCCION:

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = A x + B \bar{u} \quad , \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

donde x es un vector de IR^n , $\bar{u}$ un control medible con valores en $U \subseteq IR^m$ y A y B matrices de orden apropiado.

Se dice que (x_0, y_0) pertenece a una región de controlabilidad direccional del sistema (1) si existe un control $\bar{u}$ para el cual la correspondiente solución es una trayectoria rectilínea en una dirección prefijada. La determinación de tales regiones es útil cuando se trabaja con restricciones de estado de tipo poliédricas.

El problema que se desea abordar es determinar regiones de controlabilidad direccional para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a x + b y + u \quad ; \quad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= c x + d y + v \quad ; \quad y(0) = y_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

donde $\bar{u} = (u, v)$ toma valores en $U = [-M, M] \times [-M, M]$.

SOLUCION DEL PROBLEMA:

Consideremos primero el caso en que la trayectoria deseada no es paralela al eje y.
Entonces, dada una constante m, sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ solución de (2) tal que

$$y = m x - m x_0 + y_0 . \tag{3}$$

Luego,

$$\dot{y} = m \dot{x}$$

de donde

$$c x + d y + v = m a x + m b y + m u \tag{4}$$

y sustituyendo (3) en (2) y (4) se obtiene

$$\dot{x} = (a + b m) x + b (y_0 - m x_0) + u \tag{5}$$

$$v = m u + (bm^2 + am - dm - c) x + (m b - d)(y_0 - m x_0). \tag{6}$$

Esta última relación indica que la trayectoria rectilínea está sujeta a restricciones que dependen de la condición inicial y de las constantes a, b, c, d, m, M. Además, indica que se tiene un grado de libertad para la elección de u y v. En base a ello, en adelante supondremos el control u constante y analizaremos el problema por casos. Por supuesto, cada región de controlabilidad direccional resultará dependiente del control u elegido.

Caso A. $a + b m = 0$

De (5) se obtiene

$x(t) = (a\,x_0 + b\,y_0 + u)\,t + x_0.$

Si $a\,x_0 + b\,y_0 + u = 0$ entonces $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ lo cual indica que no se puede salir de (x_0, y_0) mediante una trayectoria rectilínea. Es decir, la recta $ax+by+u = 0$ es una recta de puntos estables para nuestro problema, de pendiente m.

Si $a\,x_0 + b\,y_0 + u \neq 0$, de

$\dot{x} = a\,x_0 + b\,y_0 + u \quad , \quad \dot{y} = m\,\dot{x}$

se obtiene información inmediata en cuanto al sentido de movimiento de la trayectoria y de (6) se tiene que

$$v(t) = mu-(dm+c)\left[(ax_0+by_0+u)t+x_0\right] + (a+d)(mx_0-y_0). \qquad (7)$$

De aquí resultan los siguientes sub casos:

A 1. Si $d\,m + c = 0$, $a + d = 0$ entonces $ad-bc = 0$ y $v = m\,u$, condición que limita la posibilidad de elección de u; cuando $|m| \geq 1$ debe tenerse $|u| \leq \frac{M}{|m|}$.

La región de controlabilidad direccional son los semi-planos abiertos determinados por la recta

$a\,x + b\,y + u = 0$

A 2. Si $d\,m + c - 0$, $a + d \neq 0$ entonces

$v\,(t) = m\,u + (a + d)(m\,x_0 - y_0)$,

en consecuencia los puntos $(x_0\,,\,y_0)$ deben estar en la franja

$$-M-mu \leq (a+d)(mx_0-y_0) \leq M-mu.$$

A 3. Si $d\,m + c \neq 0$; $a + d = 0$ entonces

$v(t) = mu - (dm + c)\ [\,(ax_0 + by_0 + u)\ t+x_0\,]$

de donde, haciendo $A = \dfrac{mu-M}{dm+c}$ y $B = \dfrac{mu+M}{dm+c}$,

se tiene

$A \leq x_0 < B$ si $ax_0 + by_0 + u > 0$, $dm + c > 0$

$B \leq x_0 < A$ si $ax_0 + by_0 + u > 0$, $dm + c < 0$

$A < x_0 \leq B$ si $ax_0 + by_0 + u < 0$, $dm + c > 0$

$B < x_0 \leq A$ si $ax_0 + by_0 + u < 0$, $dm + c < 0$.

A 4. Si $d\,m + c \neq 0$, $a + d \neq 0$ entonces de (7) se obtiene

$- M - mu < (am - c)x_0 - (a + d)y_0 \leq M - mu$

si $(a\,x_0 + b\,y_0 + u)\ (d\,m + c) > 0$;

$- M - mu \leq (am - c)x_0 - (a + d)y_0 < M - mu$

si $(a\,x_0 + b\,y_0 + u)(d\,m + c) < 0$.

Caso B. $a + bm \neq 0$

De (5),

$$x(t) = \frac{1}{a + bm} \left[(ax_0 + by_0 + u)e^{(a+bm)t} + b(mx_0 - y_0) - u \right]$$

de donde se deduce que, nuevamente, $ax + by + u = 0$ es una recta de puntos estables.

Si $ax_0 + by_0 + u \neq 0$, de (6) resultan los siguientes sub casos:

B 1. Si $bm^2 + am - dm - c = 0$, $bm - d = 0$ entonces $v = mu$ y se tiene un caso análogo a A 1.

B.2. Si $bm^2 + am - dm - c = 0$, $bm - d \neq 0$ entonces

$v(t) = mu + (bm - d)(y_o - mx_0)$

y por lo tanto el estado inicial (x_0, y_0) debe estar en franja

$- M - mu \leq (bm - d)(y_0 - mx_0) \leq M - mu.$

B.3. Si $bm^2 + am - dm - c \neq 0$, $ad - bc = 0$ entonces, haciendo $L = \dfrac{a + bm}{bm^2 + am - dm - c}$ y suponiendo $L > 0$, se deduce que

$- L(M + mu) \leq ax_0 + by_0 < L(M - mu)$

si $ax_0 + by_0 + u > 0$, $a + bm > 0$;

$ax_0 + by_0 \leq L\,(M - mu)$, u $\dfrac{dm + c}{a + bm} \geq -M$ (*)

si $ax_0 + by_0 + u > 0$, $a + bm < 0$;

$-L\,(M + mu) < ax_0 + by_0 \leq L\,(M - mu)$

si $ax_0 + by_0 + u < 0$, $a + bm > 0$;

$ax_0 + by_0 \geq -L\,(M + mu)$, u $\dfrac{dm + c}{a + bm} \leq M$ (*)

si $ax_0 + by_0 + u < 0$, $a + bm < 0$.

Nótese que en (*) aparece una restricción sobre el control u.

B 4. Si $bm^2 + am - dm - c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ entonces de (6) se obtiene

$-M - mu \leq (am - c)x_0 + (bm - d)y_0 < M - mu$

si $ax_0 + by_0 + u > 0$, $a + bm > 0$;

$(am - c)x_0 + (bm - d)y_0 \leq M - mu$

$(mx_0 - y_0)(ad - bc) \leq -M\,(a + bm) - u(dm + c)$

si $ax_0 + by_0 + u > 0$, $a + bm < 0$;

$-M - mu < (am - c)x_0 + (bm - d)y_0 \leq M - mu$

si $ax_0 + by_0 + u < 0$, $a + bm > 0$;

$(am - c)x_0 + (bm - d)y_0 \geq -M - mu$

$(mx_0 - y_0)(ad - bc) \geq M\,(a + bm) - u\,(dm + c)$

si $ax_0 + by_0 + u < 0$, $a + bm < 0$.

Supongamos ahora que la trayectoria deseada es paralela al eje y. Entonces, debe tenerse

$$\dot{x} = ax_0 + by + u = 0 \tag{8}$$

$$\dot{y} = cx_0 + dy + v$$

de donde

$$u = -ax_0 - by. \tag{9}$$

Como y depende de v, resulta que en este caso también tenemos un grado de libertad para la elección de u y v, por lo tanto supondremos v constante. (Si u fuera constante y $b \neq 0$ no se podría salir de ningún estado inicial).

Si $d = 0$, $b \neq 0$, de (9) y (8) se tiene

$$y(t) = (cx_0 + v)\, t + y_0$$

$$u(t) = -b\,(cx_0 + v)\, t - (ax_0 + by_0). \tag{10}$$

La recta de puntos estables será $c\,x + v = 0$. Si el estado inicial no pertenece a esta recta, de (10) se obtiene

$$-M \leq ax_0 + by_0 < M \quad \text{si} \quad b\,(cx_0 + v) > 0;$$

$$-M < ax_0 + by_0 \leq M \quad \text{si} \quad b\,(cx_0 + v) < 0. \tag{11}$$

Supongamos ahora $d \neq 0$, $b \neq 0$; entonces (9) implica

$$y(t) = \frac{1}{d}\left[(cx_0 + dy_0 + v)\, e^{d\,t} - cx_0 - v \right]$$

$$u(t) = -ax_0 - \frac{b}{d} \left[(cx_0 + dy_0 + v)\, e^{d\,t} - cx_0 - v \right]$$

de donde se deduce que si el estado inicial pertenece a la recta $cx + dy + v = 0$ será un punto estable para nuestro problema.

Supongamos $cx_0 + dy_0 + v \neq 0$ entonces, suponiendo $\frac{b}{d} > 0$, resultan los siguientes casos:

$-M \leq ax_0 + by_0 < M$ si $cx_0 + dy_0 + v > 0$, $d > 0$;

$ax_0 + by_0 \leq M$, $x_0 (ad - bc) \leq bv - dM$

si $cx_0 + dy_0 + v > 0$, $d < 0$;

$-M < ax_0 + by_0 \leq M$ si $cx_0 + dy_0 + v < 0$, $d > 0$;

$ax_0 + by_0 \geq -M$, $x_0 (ad - bc) \geq bv + dM$

si $cx_0 + dy_0 + v < 0$, $d < 0$.

Finalmente, si $b = 0$ entonces $|x_0| \leq \frac{M}{|a|}$ si $a \neq 0$ o bien (8) implica $u = 0$, en cuyo caso las regiones de controlabilidad direccional son semiplanos abiertos o el plano todo, dependiendo de como sean los coeficientes c y d.

EJEMPLO:

Consideremos el sistema

$\dot{x} = y + u$, $x(0) = x_0$, $|u| \leq 1$

$\dot{y} = -x + v$, $y(0) = y_0$, $|v| \leq 1$

para el cual $a + bm = m$, $c + dm = -1$, $a + d = 0$,

$bm^2 + am - dm = c = m^2 + 1$, $ad - bc = 1$.

Si $m = 0$, de A 3. se obtiene

$-1 \leq x_0 < 1$ si $y_0 + u > 0$,

$-1 \leq x_0 \leq 1$ si $y_0 + u < 0$, (fig. 1)

Si $m > 0$, de B 4. se deduce que

$- 1 - mu \leq x_0 + m\, y_0 < 1 - m\, u$ si $y_0 + u > 0$,

$- 1 - mu < x_0 + m\, y_0 \leq 1 - m\, u$ si $y_0 + u < 0$, (fig. 2)

Finalmente, si la trayectoria deseada es paralela al eje y, de (11) se tiene

$- 1 \leq y_0 < 1$ si $v - x_0 > 0$

$- 1 < y_0 \leq 1$ si $v - x_0 < 0$. (fig. 3)

La figura 4 ilustra una posiblidad de deslizamiento por la frontera al considerar una restricción de estado $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Nótese que ello no es posible si se consideran las restricciones $|x| \leq 1$ o bien $|y| \leq 1$.

REFERENCIAS:

1.- Blagodatskikh, V.I., "Sufficient conditions for optimality in problems with state constraints", Appl. Math. optim. 7, 149-157 (1981).

2.- Lee, E.B. and Markus, L., "Foundations of optimal control theory", Wiley (1962).

3.- Pontryagin, L.S. et al., "The mathematical theory of optimal processes", Wiley (1962).

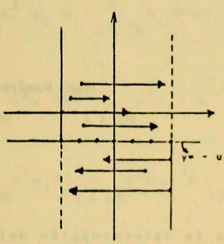

Fig. 1

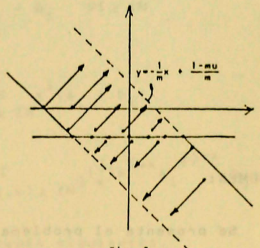

Fig. 2

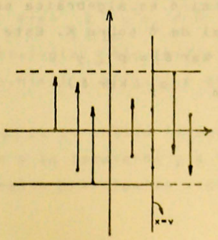

Fig. 3

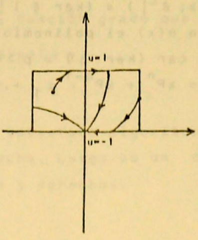

Fig. 4