CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 71-80

CONJUNTOS DE DISCONTINUIDADES

Carlos Méndez Olave*

RESUMEN:

En la primera parte se muestran resultados acerca del conjunto de discontinuidades de una función f, en que su gráfico, G(f), es cerrado, y además se caracteriza a los cerrados nunca densos en espacios métricos completos. En la segunda parte se muestra un resultado que generaliza un teorema (O.T. Alas, presentado en 1973, en la Universidad de Sao Paulo), que tiene relación con los espacios uniformes y puntos de discontinuidad.

* Dpto. Matemática, Física y Computación. Universidad de Talca.

PRIMERA PARTE:

Previo presentaré una definición y algunos resultados básicos, que serán de gran utilidad en los teoremas que se presentarán posteriormente:

Sea $f : X \to Y$, donde X e Y son espacios topológicos, entonces:

Definición 1.1.

Para cada $x \in X$ se define el conjunto de acumulación de f en x, denotado por $C(f;x)$, como aquel que consiste de los y en Y, tal que existe una red(x_α) en X, en que, $x_\alpha \to x$ y $f(x_\alpha) \to y$.

Resultado 1.2.

El gráfico de f, $G(f)$, es cerrado si y sólo si $C(f;x) = \{ f(x) \}$, para todo $x \in X$.

Resultado 1.3.

Si Y es Haussdorff y f es continua, entonces $G(f)$ es cerrado.

Resultado 1.4.

Si Y es compacto y $G(f)$ es cerrado, entonces f es continua.

Resultado 1.5.

Si $G(f)$ es cerrado entonces :

i) $A \subset X$, A compacto ====> $f(A)$ cerrado

ii) $B \subset Y$, B compacto ====> $f^{-1}(B)$ cerrado

Resultado 1.6.

Si $f : X \to Y$ continua y $g : Y \to Z$ con gráfico cerrado, entonces el gráfico de $g \circ f$ es cerrado.

Definición 1.7.

Un espacio métrico se dice ser b-compacto si cada sub-conjunto acotado tiene clausura compacta.

Definición 1.8.

Un espacio normal T_1 se dice que es perfectamente normal si cada conjunto cerrado en él es una intersección contable de abiertos.

Definición 1.9.

Se define:

$D(f) = \{ x \in X \ / \ f$ no es continua en $x \}$.

Teorema 1.10.

Si $f : X \to Y$ es una función con gráfico cerrado, donde Y es un espacio métrico b-compacto, entonces $D(f)$ es cerrado.

Demostración:

Asumamos que $D(f) \neq X$, pues de lo contrario no hay nada que demostrar. Sea $x \in X$, tal que x no está en $D(f)$. Sea V una vecindad de $f(x)$, tal que su clausura sea compacta. Como f es continua en x, existe U, vecindad de x, tal que $f(U) \subset V \subset \bar{V}$. Así $f/_U : U \to \bar{V}$ tiene su gráfico cerrado y como $\bar{V}$ es compacto, por 1.4., f es continua en U y luego $U \subset X \setminus D(f)$. Luego $D(f)$ es cerrado.

Teorema 1.11.

Sea $f : X \to Y$, una función con gráfico cerrado, donde X es un espacio de Baire, Y un espacio métrico b-compacto, entonces $D(f)$ es cerrado y nunca denso.

Demostración:

Por teorema anterior $D(f)$ es cerrado.

Supóngase que existe un abierto U, tal que $U \subset D(f)$, se tiene que $\bar{U} \subset D(f)$. Sea x en $\bar{U}$, fijo. Para cada entero positivo n sea $B_n = \{ y/d(y, f(x)) \leq n\} \subset Y$. Por hipótesis, B_n es compacto, para cada n, y de 1.5. ii) se tiene $f^{-1}(B_n)$ es cerrado. Consideremos ahora $\bar{U} = \bigcup \{ \bar{U} \cap f^{-1}(B_n) : n \geq 1 \}$, unión contable de conjuntos cerrados. Como $\bar{U}$ es de segunda categoría, existe un entero k y un abierto V, tal que $V \subset \bar{V} \subset \bar{U} \cap f^{-1}(B_k)$. La función es acotada en $\bar{V}$ y así $\overline{f(\bar{V})}$ es compacto, como: $f/V : V \to \overline{f(\bar{V})}$ tiene gráfico cerrado, entonces por 1.4. f es continua en V, pero esto es imposible, ya $V \subset D(f)$. Luego $D(f)$ es nunca denso.

Teorema 1.12.

Sea F un subconjunto cerrado y nunca denso de un espacio perfectamente normal, X. Entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$, tal que f tiene gráfico cerrado y $D(f) = F$.

Demostración:

Sea $x \in X \setminus F$, fijo, por la naturaleza de X, existe una función continua $t : X \to [0,1]$ tal que $t^{-1}(0) = F$ y $t^{-1}(1) = x$. Defínase $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como $g(y) = \frac{1}{y}$, si $y \neq 0$, $g(0) = 0$. Pero se tiene que g tiene gráfico cerrado y t es continua, entonces por 1.6. $f = g \circ t$ tiene gráfico cerrado. Además f es continua en $X \setminus F$.

Sea $y \in F$, arbitrario, V una vecindad de y. Considérese el intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, vecindad de $f(y) = g(t(y)) = g(0) = 0$. Como F es cerrado y nunca denso, $V \not\subset F$, luego existe z en V, tal que $g(t(z)) \geq 1$. Así se tiene que $f(V)$ no está contenido en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, y esto para cualquier vecindad de y. Luego se tiene $D(f) = F$.

Corolario 1.12.1.

Si X es un espacio de Baire perfectamente normal. Un conjunto $F \subset X$, es cerrado y nunca denso, si y sólo si, existe una función $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $G(f)$ es cerrado y $D(f) = F$.

Demostración:

Para la condición necesaria use el teorema 1.12. Para la suficiencia use el teorema 1.11.

Corolario 1.12.2.

Sea X un espacio métrico completo. Un subconjunto F de X es cerrado y nunca denso, si y sólo si, existe $f : X \to \mathbb{R}$, tal que G(f) es cerrado y D(f) = F.

Demostración:

Por el corolario 1.12.1.

SEGUNDA PARTE:

O.T. Alas presentó un teorema que generaliza a uno muy conocido en espacios métricos. Presento en esta parte un teorema, del cual lo propuesto por O.T. Alas es un corolario.

Lema 2.1.

Si, X es un espacio topológico, (Y, μ) un espacio uniforme, y $f : X \to Y$, entonces

$D(U) = \{ x \in X / f(v) \times f(V) \not\subset U, \text{ todo } V \in V(x) \}$, es un conjunto cerrado, para todo U simétrico en μ.

Demostración:

Supóngase que existe $x \in \overline{D(U)} \setminus D(U)$, entonces existe (x_α) red en D(U), tal que $x_\alpha \to x$. Pero $x \notin D(U)$, así existe V vecindad abierta de x, tal que $f(V) \times f(V) \subset U$.

Por otra parte para V, existe α_0, tal que, si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $x_\alpha \in V$ y así $V \in V(x_\alpha)$ y $f(V) \times f(V) \subset U$, luego

$x_\alpha \notin D(U)$ lo que es una contradicción.

Luego para cada U, simétrico en U, se tiene que D(U) es cerrado.

Teorema 2.2.

Si, X es un espacio topológico, (Y, μ) es un espacio uniforme y $(f_n)_{n \geq 1}$, una sucesión de funciones continuas de X en Y, tal que $f_n \xrightarrow{P.P.} f$ en X, entonces :
$D(U) = \{ x \in X / f(V) \times f(V) \not\subset U$, todo $V \in V(x)\}$, es de primera categoría, para todo U, simétrico y cerrado de μ.

Demostración:

Sea U simétrico y cerrado, entonces existe W simétrico y cerrado, tal que $W \circ W \circ W \subset U$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considérese:

$$\begin{aligned} A_k &= \{ x \in X / (f_n(x), f_k(x)) \in W, \text{ todo } n \geq k \} \\ &= \{ x \in X / f_n(x) \in W [f_k(x)], \text{ todo } n \geq k \} \\ &= \{ x \in X / x \in f_n^{-1} (W [f_k(x)]), \text{ todo } n \geq k \} = \\ &\bigcap_{n \geq k} f_n^{-1} (W [f_k(x)]) \end{aligned}$$

Luego para cada $k \in \mathbb{N}$, A_k es cerrado, pues cada f_n es continua y $W[f_k(x)]$ es cerrado en Y.

Por otra parte, $X = \bigcup_{k \geq 1} A_k$, pues sea $x \in X$, entonces $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, así se tiene que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ es μ - Cauchy, luego para W, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \geq N$, entonces

$(f_n(x), f_m(x)) \in W$, y así $(f_n(x), f_N(x)) \in W$, para cada $n \geq N$, luego $x \in A_N \subset \bigcup_{k \geq 1} A_k$.

Como $X = \bigcup_{k \geq 1} A_k$, se tiene que:

$$D(U) = \bigcup_{k \geq 1} A_k \cap D(U) = \bigcup_{k \geq 1} (D(U) \cap A_k)$$

Se demostrará que $D(U) \cap A_k$ es nunca denso, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Supóngase que existe n_0, tal que $D(U) \cap A_{n_0}$, no es nunca denso, entonces existe un abierto no vacío V, tal que:

$$V \subset D(U) \cap A_{n_0} = \overline{D(U) \cap A_{n_0}}, \text{ es decir}$$

$$V \subset D(U) \quad y \quad V \subset A_{n_0}$$

Sea $x_0 \in V$, así existe O abierto tal que

$x_0 \in O \subset V$ y $f_{n_0}(O) \subset W[f_{n_0}(x)]$, y por la simetría de W, $f_{n_0}(O) \times f_{n_0}(O) \subset W$.

Por otro lado si $y, z \in O$ se tiene que:

$(f_{n_0}(y), f_{n_0}(z)) \in W$, y para cada $n \geq n_0$, se cumple que

$(f_n(y), (f_{n_0}(y)) \in W$, $(f_n(z), f_{n_0}(z)) \in W$, y por ser

W cerrado, $(f(y), f_{n_0}(y)) \in W$, $(f(z), f_{n_0}(z)) \in W$.

y se tiene $(f(y), f(z)) \in W_0 \, W_0 \, W \subset U$, es decir que

$f(0) \times f(0) \subset U$ y así $x_0 \in D(U)$, lo que es una contradicción.

Luego $D(U) = \bigcup_{k \geq 1} (D(U) \cap A_k)$, en que cada $D(U) \cap A_k$ es nunca denso, así $D(U)$ es de primera categoría.

Corolario 2.2.1. (O.T.Alas)

Si, X es un espacio topológico, (y, μ) un espacio uniforme, metrizable, $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X en Y, y f es una función de X en Y, tal que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, para cada $x \in X$.

Entonces : D(f) es de primera categoría.

Demostración:

Como (Y, μ) es un espacio uniforme metrizable, μ tiene una base contable ξ que consiste de cerrados y simétricos. Por el teorema 2.2., para cada $U \in \xi$, $D(U)$ es de primera categoría. Pero $D(f) = \bigcup_{U \in \xi} D(U)$, por lo tanto se tiene que $D(f)$ es de primera categoría.

BIBLIOGRAFIA:

- "The closed Graph and p-closed Graph properties in general topology".
  Por T.R. Hamlett y L.L. Herrington. De la serie Contemporany Mathematics. Volumen 3, parte primera, sección 6. (American Mathematical Society). Providence-Rhode Island.

- "On set points of discontinuity"
  Por O.T.Alas. Amer. Math Monthly 80 (1973), 186-187.

- "Functions with a closed Graph" Proc. Amer. Math. Soc. 43(1974) 439-442.
  Por Iván Baggs.

- "General topology"
  Por S. Willard., de la Addison-Wesley. Reading, Mass 1970.

- "Espacios Uniformes" Seminario de Título de J. Frigerio, J. Muñoz. Dirigido por Prof. Carlos Méndez O. Marzo de 1985. U. de Talca.