CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 32-36

SOLUCION DE LA CUARTICA

Lionel Henríquez B. *

RESUMEN:

Este trabajo presenta un nuevo método simplicado para resolver la Cuártica definida sobre $\mathbb{C}$. Mediante elementos básicos de Matrices se encuentra la Resolvente Cúbica y con una de sus raíces, por medio de álgebra elemental se obtienen dos polinomios de 2° grado, cuyas raíces son las de la Cuártica dada.

El objetivo de este artículo es presentar una nueva metodología para resolver la cuártica, esencialmente distinta de la presentada por Yang Yu-Cheng (Yu-Cheng, 1966 : 877-879), ya que este nuevo método sólo utiliza elementos básicos de álgebra y no necesita de interpretación geométrica como lo hace el trabajo citado.

* Instituto de Matemática, Universidad Austral de Chile

1.- Sea $p(x) = c_4 x^4 + c_3 x^2 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$

2.- $p(x) = q(x) \, . \, r(x)$, con $gr\,(q(x)) = gr\,(r\,(x)) = 2$.

3.- Hagamos $\bar{q}^t \, . \, \bar{r} = (a_{ij}) = A$, donde $\bar{q} = (a_2 \; a_1 \; a_0)$ y

$\bar{r} = (b_2 b_1 b_0)$ son las matrices filas formadas con los coeficientes de $q(x)$ y $r(x)$ (Henríquez, 1966 p.62)

4.- Entonces:

$$A = \begin{bmatrix} a_2 b_2 & a_2 b_1 & a_2 b_0 \\ a_1 b_2 & a_1 b_1 & a_1 b_0 \\ a_0 b_2 & a_0 b_1 & a_0 b_0 \end{bmatrix}$$

5.- Sea

$$B = A + A^t = \begin{bmatrix} 2a_2 b_2 & a_2 b_1 + a_1 b_2 & a_2 b_0 + a_0 b_2 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 & 2a_1 b_1 & a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ a_2 b_0 + a_0 b_2 & a_1 b_0 + a_0 b_1 & 2a_0 b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2c_4 & c_3 & z \\ c_3 & 2\,(c_2 - z) & c_1 \\ z & c_1 & 2c_0 \end{bmatrix}$$

6.- Sea r raíz de $|B| = z^3 - c_2 z^2 + (c_3 c_1 - 4c_4 c_0) z +$

$$+ (4c_4 c_2 c_0 - c_3^2 c_0 - c_4 c_1^2) = 0$$

con este valor de r se determinan las ecuaciones:

$$b_2 q(x) = a_{11} x^2 + a_{21} x + a_{31} = 0$$

$$y \quad a_2 r(x) = a_{11} x^2 + a_{12} x + a_{13} = 0$$

cuyas raíces son las de $p(x)$.

7.- En efecto, hagamos $u_1 = a_2 b_1$, $u_2 = a_1 b_2$, $t_1 = a_2 b_0$,

$$t_2 = a_0 b_2,$$

$$y_1 = a_1 b_0, \; y_2 = a_0 b_1$$

8.- O sea :

$$A = \begin{bmatrix} c_4 & u_1 & t_1 \\ u_2 & c_2 - r & y_1 \\ t_2 & y_2 & c_0 \end{bmatrix}$$

9.- t_1 y t_2 se obtienen de $c_4 k^2 - kr + c_0 = 0$, ya que $t_2 = k\, c_4$, $k\, t_1 = c_0$ y $t_1 = r - t_2$, 10.- Además u_1 y u_2 se determinan de:

$c_4h^2 - c_3h + c_2 - r = 0$, puesto que $c_4h = u_2$,

$u_1 + u_2 = c_3$ y $u_1h = c_2 - r$.

11.- Finalmente:

$b_2\, q(x) = c_4x^2 + u_2x + t_2 = 0$

$a_2\, r(x) = c_4x^2 + u_1x + t_1 = 0$

cuyas raíces son las de p(x).

Nota: y_1, y_2 pueden ser también obtenidos, ya que

$t_1 + r + t_2 = c_2$, $h\,t_1 = y_1$,

$u_1 + u_2 = c_3$, $y_1 + y_2 = c_1$

pero es inoficioso, puesto que se obtendrían ecuaciones equivalentes a las dadas en (11).

Ejemplo:

$$2x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 19x + 15 = 0$$

Primero encontramos r, resolviendo la ecuación

$$z^3 - 17z^2 + 13z + 583 = 0$$

Por tanteo obtenemos z = 11

Ahora por (9) , tenemos

$$2k^2 - 11k + 15 = 0,$$

obteniéndose $k = 3$ y así $t_1 = 10$ y $t_2 = 12$.

Por otro lado con (10), se tiene que:

$$2h^2 - 7h + 6 = 0$$

obteniéndose $h = 2$, valor con el cual determinamos que

$$y_1 = 6 \quad y \quad u_2 = 8.$$

Finalmente de (11), obtenemos:

$$x = -1 \pm \sqrt{2}\ i, \quad \frac{-3 \pm \sqrt{31}\ i}{4}$$

BIBLIOGRAFIA:

1.- Yang Yu-Cheng, Classroom Notes. The American Mathematical Monthly.
73 (8) : 877 - 879, 1966.

2.- Henríquez Lionel, Cubo, Revista de Matemática.
Vol. 2 : 57 - 65, 1986.
Universidad de la Frontera