CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 12-31

ALGEBRAS DE BERNSTEIN DE DIMENSION CUATRO Y CINCO

Ana Laura Fuenzalida Cammas *

INTRODUCCION:

S. Bernstein dió una descripción de las álgebras que satisfacen la ecuación $(X^2)^2 = (W(X))^2 X^2$ donde W es un epimorfismo no nulo del álgebra en el cuerpo.

Sus resultados los obtuvo a partir de consideraciones sobre las leyes de herencia y el principio estacionario de una población.

Posteriormente (1975) P. Holgate obtuvo resultados estudiando el problema desde un punto de vista algebraico. Descompuso el álgebra en sub-espacios y a partir de ellos obtuvo resultados sobre la estructura del álgebra, lo cual le permitió

Departamento de Matemática, Universidad de Talca

determinar los posibles tipos de álgebras de Bernstein de dimensión tres y cuatro.

En esta comunicación se presentan resultados para el caso de dimensión cinco, utilizando métodos similares a los de Holgate.

En el caso de dimensión 3, S. Bernstein en 1923 - 1924 dió una descripción completa de las posibilidades de transformaciones cuadráticas que representan sistemas no selectivos de herencia en los cuales una distribución estacionaria se alcanza después de una única generación.

Basó su clasificación sobre el número de tipos puros que existen en una población sometida a las leyes de herencia que satisfacen el principio estacionario y obtuvo el resultado siguiente. Existen 5 sistemas dados por:

1.- Las tres clases son razas puras; las transformaciones cuadráticas correspondientes son:

$$X' = X (X + Y + Z) p.$$

$$Y' = Y (X + Y + Z) p.$$

$$Z' = Z (X + Y + Z) p.$$

en que los genotipos se denotan por F,G,H; sus coeficientes en la generación inicial por X,Y,Z y los coeficientes en la próxima generación por X',Y', Z' respectivamente.

2.- Dos de las clases son razas puras;

$$X' = \left(X + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} Y\right)\left[X + (1-\alpha) Z + \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) Y\right] p.$$

$$Y' = (\alpha+\beta)\left(X + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} Y\right)\left(Z + \frac{\beta}{\alpha+\beta} Y\right)$$

$$Z' = \left(Z + \frac{\beta}{\alpha+\beta} Y\right)\left[Z + (1-\beta) X + \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) Y\right] p.$$

Con las mismas designaciones anteriores y $0 \leq \alpha , \beta \leq 1$.

3.- Una de las clases es una raza pura:

$$X' = (X + Z)\left[\tfrac{1}{2}(1+\alpha)(X+Z) + (1-\beta) Y\right]$$

$$Y' = Y(X + Y + Z) \quad p.$$

$$Z' = (X + Z)\left[\tfrac{1}{2}(1-\alpha)(X+Z) + \beta Y\right]$$

4.- Otro sistema no isomorfo al sistema anterior en que una de las razas es pura :

$$X' = X(X + Y + Z) + \alpha X(-\beta Z + Y) \quad p.$$

$$Y' = \frac{\beta (Z + X)(X + Y + Z) - \alpha\beta X(-\beta Z + Y)}{1 + \beta}$$

$$Z' = \frac{(Z+Y)(X+Y+Z) - \alpha X(-\beta Z + Y)}{1+\beta}$$

5.- Ninguna de las razas es pura:

$$X' = \alpha (X+Y+Z)^2$$

$$Y' = \beta (X+Y+Z)^2 \qquad \text{con } \alpha + \beta + \delta = 1$$

$$Z' = \delta (X+Y+Z)^2$$

En el caso de dimensión 4, S. Bernstein obtuvo resultados parciales : demostró que los únicos dos sistemas que involucran cuatro tipos puros son:

a) El mendeliano,

$$X_1' = X_1 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \qquad p.$$

$$X_2' = X_2 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \qquad p.$$

$$X_3' = X_3 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \qquad p.$$

$$X_4' = X_4 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \qquad p.$$

en que los genotipos se designan por G_1, G_2, G_3 y G_4, sus coeficientes en la generación inicial por X_1, X_2, X_3, X_4 y los coeficientes en la próxima generación por X_1', X_2', X_3', X_4' respectivamente.

b) La ley del cuádruple (identificada biológicamente por Lyubich (1971)) :

$$x_1' = (x_1 + x_3) (x_1 + x_4) \qquad p.$$

$$x_2' = (x_2 + x_3) (x_2 + x_4) \qquad p.$$

$$x_3' = (x_1 + x_3) (x_2 + x_3) \qquad p.$$

$$x_4' = (x_1 + x_4) (x_2 + x_4) \qquad p.$$

P. Holgate en 1975, retoma la clasificación efectuada por S. Bernstein y empleando estructura de "álgebra" obtiene los siguientes resultados:

i) En dimensión 3 las leyes de herencia que satisfacen el principio estacionario son de 5 tipos.

Las correspondientes familias de álgebras son denotadas por:

B_0 en la cual no hay razas puras

B_2 en la cual hay dos razas puras

B_3 en la cual hay tres razas puras

B_{11} en la cual hay una raza pura

B_{12} en la cual hay una raza pura pero $B_{12} \not\cong B_{11}$

ii) En dimensión 4, las familias de álgebras correspondientes a los sistemas Mendeliano y Ley del cuádruple se denotan por :

B_{41} y B_{42} respectivamente.

DESCRIPCION DE LAS ALGEBRAS EN i)

En todos los casos, sean F, G, H los genotipos, sus coeficientes en la generación inicial X, Y, Z y sus coeficientes en la próxima generación X', Y', Z' respectivamente. Las transformaciones cuadráticas dadas por S. Bernstein en cada uno de los sistemas dan origen a las respectivas álgebras de base [F, G, H] cuyas tablas de multiplicación son las siguientes:

$$B_0 : F^2 = G^2 = H^2 = FG = FH = GH = \alpha F + \beta G + \delta H$$

$$B_2 = F^2 = F \ , \ H^2 = H$$

$$G^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) F + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} G + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) H$$

$$FG = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta}\right] F + \frac{1}{2}\beta G + \frac{1}{2}\left[\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha+\beta}\right] H$$

$$FH = \frac{1}{2}(1-\alpha) F + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) G + \frac{1}{2}(1-\beta) H$$

$$GH = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha(1-\alpha}{\alpha+\beta}\right] F + \frac{1}{2}\alpha G + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}\right] H$$

$$B_3 : F^2 = F,\ G^2 = G,\ H^2 = H$$

$$FG = \tfrac{1}{2} F + \tfrac{1}{2} G,\ FH = \tfrac{1}{2} F + \tfrac{1}{2} H,\ GH = \tfrac{1}{2} G + \tfrac{1}{2} H$$

$$B_{11}: F^2 = H^2 = FH = \tfrac{1}{2} (1 + \alpha) F + \tfrac{1}{2} (1 - \alpha) H$$

$$G^2 = G$$

$$FG = GH = \tfrac{1}{2} (1 - \beta) F + \tfrac{1}{2} G + \tfrac{1}{2} \beta H$$

$$B_{12}: F^2 = F$$

$$G^2 = H^2 = GH = \frac{(\beta G + H)}{1 + \beta}$$

$$FG = \tfrac{1}{2} (1 + \alpha) F + \frac{\tfrac{1}{2} (1 - \alpha)(\beta G + H)}{1 + \beta}$$

$$FH = \tfrac{1}{2} (1 - \alpha\beta) F + \frac{\tfrac{1}{2} (1 + \alpha\beta)(\beta G + H)}{1 + \beta}$$

DESCRIPCION DE LAS ALGEBRAS EN ii)

En los dos casos sean G_1, G_2, G_3, G_4 los genotipos, sus coeficientes en la generación inicial x_1, x_2, x_3, x_4 y sus coeficientes en la próxima generación x_1', x_2', x_3', x_4' respectivamente. Las transformaciones cuadráticas dadas por S. Bernstein en cada uno de los dos sistemas dan origen a las respectivas álgebras de base $[G_1, G_2, G_3, G_4]$ cuyas tablas son las siguientes:

B_{41}: $G_i G_j = \frac{1}{2}(G_i + G_j)$, $1 \leq i \leq 4$

B_{42}: $G_1^2 = G_1$, $G_2^2 = G_2$, $G_3^2 = G_3$, $G_4^2 = G_4$

$$G_1G_2 = \tfrac{1}{2}(G_3 + G_4) = \tfrac{1}{2}G_3 + \tfrac{1}{2}G_4$$

$$G_1G_3 = \tfrac{1}{2}G_1 + \tfrac{1}{2}G_3$$

$$G_1G_4 = \tfrac{1}{2}G_1 + \tfrac{1}{2}G_4$$

$$G_2G_3 = \tfrac{1}{2}G_2 + \tfrac{1}{2}G_3$$

$$G_2G_4 = \tfrac{1}{2}G_2 + \tfrac{1}{2}G_4$$

$$G_3G_4 = \tfrac{1}{2}G_1 + \tfrac{1}{2}G_2$$

Es conveniente expresar todas estas álgebras en nuevas bases que les dan una tabla de multiplicación canónica; a continuación mencionaremos para cada álgebra, en dimensión 3 o en dimensión 4 las nuevas bases y sus tablas de multiplicación canónicas:

B_0 : $\{b_0 = \alpha F + \beta G + \delta H$, $b_1 = F - G$, $b_2 = F - H\}$

$b_0^2 = b_0$, $b_i b_j = 0$ a menos que $i = j = 0$

$0 \leq i, j \leq 2$

B_2 : $\{b_0 = F$, $b_1 = F - H$, $b_2 = \alpha F - (\alpha + \beta) G + \beta H\}$

$b_0^2 = b_0$, $b_0 b_1 = \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2$, $b_0 b_2 = 0$

$b_1^2 = b_2$, $b_1 b_2 = b_2^2 = 0$

B_3 : $\{b_0 = F$, $b_1 = F - G$, $b_2 = 2G - 2H\}$

$b_0^2 = b_0$, $b_0 b_1 = \frac{1}{2} b_1$, $b_0 b_2 = \frac{1}{2} b_2 = b_1^2 = b_1 b_2 = b_2^2 = 0$

B_{11} : $\{b_0 = G$, $b_1 = (1 - \beta)\, 2F - 2G + 2\beta H$, $b_2 = \frac{1}{2} (\alpha + 2\beta - 1)(F - H)\}$

$b_0^2 = b_0$, $b_0 b_1 = \frac{1}{2} b_1$, $b_1^2 = 4\, b_2$, otros productos cero.

B_{12} : $\{b_0 = F$, $b_1 = F - G$, $b_2 = F - \left[\frac{\beta}{1 + \beta}\right] G - \left[\frac{1}{1 + \beta}\right] H\}$

$b_0^2 = b_0$, $b_0 b_1 = \frac{1}{2} (1 - \alpha)\, b_2$, $b_0 b_2 = \frac{1}{2} b_2$

$b_1^2 = -\alpha\, b_2$, $b_1 b_2 = -\frac{1}{2} \alpha b_2$, $b_2^2 = 0$

$$B_{41}: \left\{ b_1 = G_1,\ b_i = G_1 - G_i,\ 2 \le i \le 4 \right\}$$

$$b_1^2 = b_1,\ b_1 b_i = \tfrac{1}{2} b_i\ ,\ 2 \le\ i \le 4$$

el resto de los productos cero.

$$B_{42}: \left\{ b_0 = \tfrac{1}{4}\ (G_1 + G_2 + G_3 + G_4\ ),\ b_1 = G_1 - G_3\ ,\right.$$

$$\left. b_2 = G_1 - G_4,\ b_3 = G_1 + G_2 - G_3 - G_4 \right\}$$

$$b_0^2 = b_0,\ b_0 b_1 = \tfrac{1}{2}\ b_1,\ b_0 b_2 = \tfrac{1}{2}\ b_2,\ b_1 b_2 = \tfrac{1}{2}\ b_3$$

Todas las álgebras descritas son álgebras conmutativas sobre $\mathbb{C}$, provistas de un homorfismo no trivial W: $B \to \mathbb{C}$, $X \to W(X) := \Sigma X_i$ tal que $(X^2)^2 - (W(X))^2 X^2 = 0$ $\forall\ X \in B$. Estas álgebras se llaman " Algebras de Bernstein ".

P. Holgate (1975) dió una clasificación alternativa de los tipos de Algebras de Bernstein de dimensión 3 y 4, en términos de las dimensiones de ciertos sub-espacios en que se descompone el álgebra.

Señalaremos la descomposición y algunas propiedades que se verifican en toda álgebra de Bernstein B.

1.- Toda Algebra de Bernstein admite un idempotente, por Ej.: $Y^2 \,/\, W(Y) = 1$, $Y \in B$.

2.- Sea e un idempotente en B, $\mathbb{C}e$ es una sub-álgebra de B.

3. $Z = \{ z \in B / w(z) = 0 \}$ es un ideal de B.

4. $B = Ce \oplus Z$ pues $X = w(X)\ e + (X - W(X)\ e)\ \forall\ X \in B$

5. $U = \langle u = ze \rangle_C$ sub-espacio de B. $U^2 = V = \langle v = u_i u_j \rangle_C$

6. $ue = \frac{1}{2} u$, $ve = 0\ \forall\ u \in U$, $\forall\ v \in V$

7. $U \oplus V$ es un ideal del álgebra $Ce \oplus U \oplus V$

8. $B = Ce \oplus U \oplus V \oplus W$ con W sub-espacio complementario a $Ce \oplus U \oplus V$

9. $V^2 \subseteq U$, $UV \subseteq U$, $VW \subseteq U$, $UW \subseteq U \oplus V$

$W^2 \subseteq U \oplus V$; $(u_1 v)\ u_2 + (u_2 v)\ u_1 = 0\ \forall\ u_1, u_2 \in U$, $\forall\ v \in V$.

10. $C = Ce \oplus U \oplus V$ es ideal en B tal que $B^2 = C$

11. C se llama el corazón de B y es independiente de la elec - ción del idempotente.

12. B se dice un álgebra de "Bernstein Ortogonal " (B.O.) si $UV = [0]$.

13. En un álgebra de B.O. el ideal $U \oplus V$ es nilpotente de grado 4.

14. En un Algebra de Bernstein B los elementos idempotentes son exactamente de la forma $e + u + u^2$, $u \in U$.

15. Sea $U^* = [u \in U / u\ (U \oplus V) = [0]]$; $U = U^+ \oplus U^*$.

16. Sea B un álgebra de Bernstein ortogonal entonces:

$V^3 = [0]$, $V^2 \subseteq U^*$, $w \in W$, si $we \neq 0$ entonces $w^2 \in V$, si $we = 0$ entonces $w^2 \in U$.

$W^2 \subseteq U^*$, $UW \subseteq U^*$, $VW \subseteq U^*$

17. Si en un álgebra de Bernstein ortogonal $V^2 = [\,0\,]$, entonces $U \oplus V$ es nilpotente de grado 3.

18. Si todo elemento en V es el cuadrado de algún elemento en U, entonces $V^2 = [\,0\,]$.

19. Si $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ entonces $V^2 = [\,0\,]$.

20. Si $d_v = \dim_{\mathbb{C}} V$ y $d_u = \dim_{\mathbb{C}} U$ entonces $d_v \leq \frac{1}{2}\, d_u (d_u + 1)$, $d_v > 0 \Rightarrow d_u > 0$.

21. $B = \mathbb{C}e \oplus Z = \mathbb{C}e \oplus U \oplus V \oplus W = \mathbb{C}e \oplus U^+ \oplus U^* \oplus V \oplus W$.

La distribución de la dimensión de [illegible] entre los sub-espacios U^+, U^*, V y W en un álgebra de Bernstein dan origen a los diferentes tipos de Algebras de Bernstein. (Notación por cuaternas).

En dimensión 3; existen 4 tipos de álgebras de Bernstein:

i) (0, 0, 0, 2)

ii) (0, 2, 0, 0)

iii) (0, 1, 0, 1)

iv) (2, 0, 1, 0)

En dimensión 4, existen 7 tipos de álgebras de Bernstein:

i) (0, 0, 0, 3)

ii) (0, 3, 0, 0)

iii) (1, 1, 1, 0)

iv) (2, 0, 1, 0)

v) (0, 2, 0, 1)

vi) (1, 0, 1, 1)

vii) (0, 1, 0, 2)

Conocido el tipo de álgebra de Bernstein, es posible determinar la tabla de multiplicación para cierta base, del modo siguiente: (Escojeremos un tipo en cada dimensión).

<u>En dimensión 3</u>:

ii) (0, 2, 0, 0)

$\therefore\ U^* = V = W = [0]$, dim U = dim U^* = 2 .

$\therefore\ U^* = \langle c_1 , c_2 \rangle$

$c_0 = e$

	c_0	c_1	c_2
c_0	c_0	$\frac{1}{2}c_1$	$\frac{1}{2}c_2$
c_1		0	0
c_2			0

Esta álgebra corresponde al "álgebra gamética de la herencia mendeliana simple" y corresponde a B_3 en la clasificación anterior.

En dimensión 4 :

iv) (2, 0, 1, 0)

$\therefore U^{*} = W = [0]$, $\dim U^{+} = 2$, $\dim V = 1$

$\therefore U^{+} = \langle C_1, C_2 \rangle$, $V = \langle C_3 \rangle$, $C_0 = e$

	C_0	C_1	C_2	C_3
C_0	C_0	$\frac{1}{2}C_1$	$\frac{1}{2}C_2$	0
C_1		θC_3	λC_3	0
C_2			ξC_3	0
C_3				0

$(\theta, \lambda) \neq (0, 0)$

$(\lambda, \xi) \neq (0, 0)$

Nota:

Para que esta álgebra sea de Bernstein se necesita $UV = [0]$ (ortogonalidad)

Si $\theta = \xi = 0$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ esta álgebra corresponde al álgebra que define la "ley del cuádruple" en la clasificación anterior.

Veamos ahora la clasificación de álgebras de Bernstein de dimensión 5.

Existen 12 tipos de álgebras de Bernstein :

i) (0, 0, 0, 4)

ii) (0, 1, 0, 3)

iii) (0, 4, 0, 0)

iv) (0, 3, 0, 1)

v) (3, 0, 1, 0)

vi) (0, 2, 0, 2)

vii) (2, 0, 2, 0)

viii) (2, 1, 1, 0)

ix) (1, 2, 1, 0)

x) (1, 0, 1, 2)

xi) (2, 0, 1, 1)

xii) (1, 1, 1, 1)

Analizaremos las tablas de multiplicación de algunas de ellas:

ii) (0, 1, 0, 3)

$\therefore \dim W = 3, \dim U^* = 1, V = U^+ = \{0\}$

$\therefore W = < C_2, C_3, C_4 > , U^* = < C_1 >, C_0 = e$

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	$\frac{1}{2}C_1$	αC_1	βC_1	λC_1
C_1		0	δC_1	$\S C_1$	ρC_1
C_2			ωC_1	πC_1	ξC_1
C_3				θC_1	τC_1
C_4					$\jmath C_1$

Observación:

Como $ew \neq 0$ implica $w^2 \in V = [0]$ $\forall$ $w \in W$
y $ew = 0$ implica $w^2 \in U^*$ $\forall$ $w \in W$.

Considerando las posibilidades de nulidad para los elementos ew obtendremos cuatro álgebras de Bernstein no isomorfas del tipo (0, 1, 0, 3) a saber:

B^0_{ii} en que ninguno de los parámetros α, β, λ es cero

B^1_{ii} en que uno de los parámetros α, β, λ es cero

B^2_{ii} en que dos de los parámetros α, β, λ son cero

B^3_{ii} en que los tres parámetros α, β, λ son cero

iii) (0, 4, 0, 0)

$\therefore$ $\dim U^* = 4$, $U^+ = V = W = [0]$

$\therefore$ $U^* = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$, $c_0 = e$

Luego la tabla de multiplicación es:

$c_0^2 = c_0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$ $\forall$ $i \in [1, 2, 3, 4]$

y el resto de los productos cero.

Observación:

Esta álgebra corresponde al álgebra gamética de la herencia mendeliana simple.

v) (3, 0, 1, 0)

$\therefore$ dim $U^+ = 3$, dim $V = 1$, $U^* = W = [\,0\,]$

$\therefore$ $U^+ = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, $V = \langle c_4 \rangle$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
c_0	c_0	$\frac{1}{2}c_1$	$\frac{1}{2}c_2$	$\frac{1}{2}c_3$	0
c_1		$\alpha_1 c_4$	$\alpha_2 c_4$	$\alpha_3 c_4$	0
c_2			$\gamma_2 c_4$	$\gamma_3 c_4$	0
c_3				$\xi\, c_4$	0
c_4					0

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$

$(\alpha_2, \gamma_2, \gamma_3) \neq (0,0,0)$

$(\alpha_3, \gamma_3, \xi) \neq (0,0,0)$

Nota:

Para que esta álgebra sea de Bernstein se necesita $UV = [\,0\,]$ (ortogonalidad).

vi) (0, 2, 0, 2)

$\therefore$ dim $W = 2 = \dim U^*$, $U^+ = [\ 0\ ] = V$

$\therefore$ $W = < C_3, C_4 >$, $U^* = < C_1, C_2 >$

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	$\frac{1}{2}C_1$	$\frac{1}{2}C_2$	$\alpha_i C_1 + \alpha_2 C_2$	$\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2$
C_1		0	0	$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2$	$\delta_1 C_1 + \delta_2 C_2$
C_2			0	$\xi_1 C_1 + \xi_2 C_2$	$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$
C_3				$\theta_1 C_1 + \theta_2 C_2$	$\pi_1 C_1 + \pi_2 C_2$
C_4					$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2$

Con la misma observación del caso ii) obtenemos <u>tres</u> álgebras no isomorfas del tipo (0, 2, 0, 2) a saber:

B^0_{vi} en que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ y

$(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$

B^1_{vi} en que $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)\ \underline{v}\ (\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$

B^2_{vi} en que $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) = (\beta_1, \beta_2)$

Las álgebras de tipo : (2, 0, 2, 0)
(2, 1, 1, 0)
(1, 2, 1, 0)

son de Bernstein si $UV = [0]$

x) (1, 0, 1, 2) $\dim U^{+} = 1 = \dim V$, $\dim W = 2$, $U^{*} = \{0\}$

$\therefore \quad U^{+} = \langle c_1 \rangle$, $V = \langle c_2 \rangle$, $W = \langle c_3, c_4 \rangle$

B_x	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
c_0	c_0	$\frac{1}{2}c_1$	0	αc_1	βc_1
c_1		γc_2	δc_1	$\xi_1 c_1 + \xi_2 c_2$	$\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2$
c_2			0	ξc_1	πc_1
c_3				$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$	$\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$
c_4					$\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2$

$(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$

es álgebra de Bernstein con restricción de los parámetros. Si $UV = \{0\}$ y $eW \subseteq U^{*}$, B_x es álgebra de Bernstein ortogonal.

Análogamente las álgebras de tipo : (2, 0, 1, 1)
(1, 1, 1, 1)

son de Bernstein si $UV = \{0\}$ y $eW \subseteq U^{*}$.

CONCLUSION:

En dimensión 5 existen 12 tipos de álgebras de Bernstein ortogonales con la condición $eW \subseteq U^*$.

REFERENCIAS:

1.- "Demonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel" (1923) S. Bernstein.

2.- "Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity" (1924) S. Bernstein.

3.- "Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel" (1923) S. Bernstein.

4.- "Basic Concepts and theorems of the evolutionary genetics of free populations" (1971). Y.I. Lyubich

5.- "Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle" (1975) P. Holgate.