CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 3-11

CONTROLABILIDAD DIRECCIONAL UNIPARAMETRICA PARA SISTEMAS LINEALES EN EL PLANO (*)

Víctor Delgado A. **

RESUMEN:

Dado un sistema de control lineal autónomo en el plano se plantea el problema de mover el estado inicial a través de trayectorias rectilíneas en una dirección preestablecida. Su solución conduce a la delimitación de regiones del plano donde es factible tal dinámica.

* Proyecto RS - 83 - 34 Dir. de Invest. y Des. UACH
** Instituto de Matemáticas, Universidad Austral de Chile

INTRODUCCION:

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = ax + by \qquad ; \qquad x(0) = x_o$$

$$\dot{y} = cx + dy + u \qquad ; \qquad y(0) = y_o \tag{1}$$

$u = u(t)$ control medible con valores en $U = [-M, M], M > 0$

El problema que nos planteamos es determinar soluciones del sistema anterior que permitan mover el estado inicial a través de trayectorias rectilíneas y en una dirección prefijada.

En otras palabras, dada una constarte m y un punto (x_o, y_o) del plano, el objetivo es determinar, si existe, una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema (1) tal que

$$y = mx - mx_o + y_o \tag{2}$$

Este problema de controlabilidad direccional conduce a soluciones que son útiles, por ejemplo, para la controlabilidad con restricciones de estado de tipo poliédrico, cuestión que puede originar la necesidad de determinar secciones de trayectorias sobre la frontera del poliedro.

Reemplazando (2) en el sistema (1) resulta

$$\dot{x} = (a + bm)\, x + b\,(y_o - mx_o) \tag{3}$$

$$\dot{y} = m\,\dot{x} = m\,ax + m\,by = cx + dy + u$$

de donde

$$u = (bm^2 + am - dm - c)\, x + (mb - d)(y_o - mx_o) \tag{4}$$

Esta última relación, junto al acotamiento de u, indica que la trayectoria rectilínea está sujeta a restricciones que dependen de la condición inicial y de las constantes a, b, c, m d, M. Lo cual nos induce a resolver el problema por casos.

SOLUCION DEL PROBLEMA.

Caso A.

Para $a + bm = 0$ se obtiene de (3) que

$x = b(y_o - mx_o)\ t + x_o = (ax_o + by_o)\ t + x_o$

Si el estado inicial (x_o, y_o) pertenece a la recta $ax+by=0$ resulta $x(t) = x_o$, $y(t) = y_o$ para todo t. Es decir, desde tal punto no es posible salir mediante una trayectoria rectilínea. En otras palabras es un punto "estable" para nuestro problema.

Notar además que, en este caso, m es igual a la pendiente de la mencionada recta de puntos estables.

Si $ax_o + by_o \neq 0$ se obtiene información inmediata en cuanto al sentido del movimiento de la trayectoria puesto que

$\dot{x} = (ax_o + by_o) \qquad \dot{y} = m\ (ax_o + by_o)$

Por otra parte, de la relación (4) resulta

$$u = -(c+dm)\ ((ax_o+by_o)t+x_o) + (a + d)(mx_o - y_o) \qquad (5)$$

y se concluye lo siguiente:

A.1.- Si $c+dm = 0$, $a+d = 0$ entonces $u = 0$, $ad-bc = 0$ lo cual transforma (1) en un conocido sistema detallado, por ejemplo, en Engel ([2]).

A.2.- Si $c+dm = 0$, $a+d \neq 0$ entonces $u = (a+d)(mx_o - y_o)$ en consecuencia

$$|y_o - mx_o| \leq \frac{M}{|a+d|} \qquad (6)$$

Es decir, los puntos iniciales (x_o, y_o) deben estar ubicados en la franja determinada por (6). Tal información como las que se obtendrán en los casos siguientes, es útil si se desea trabajar con una restricción de estado de tipo poliédrica.

A.3.- Si $c+dm \neq 0$, $a+d = 0$ entonces de (5) se obtiene

$$|(ax_o + by_o)\, t - x_o| \leq A \quad \text{con } A = \frac{M}{|c+dm|}$$

de donde se concluye que

$$-A < x_o \leq A, \text{ si } ax_o + by_o > 0$$

$$-A \leq x_o < A, \text{ si } ax_o + by_o < 0$$

A.4.- Si $c+dm \neq 0$, $a+d \neq 0$ entonces de (5) se obtiene

$$-M+B \leq (c+dm)(ax_o+by_o)\, t \leq M+B \quad \text{con } B = (am-c)x_o - (a+d)y_o$$

de donde $-M < (am-c)x_o - (a+d)y_o \leq M$, si $(c+dm)(ax_o+by_o) > 0$

$-M \leq (am-c)x_o - (a+d)y_o < M$, si $(c+dm)(ax_o+by_o) < 0$

Caso B.

Para $a + bm \neq 0$ se obtiene de (3) que

$$x = \frac{1}{a+bm} \left((ax_o + by_o)\, e^{(a+bm)t} + b(mx_o - y_o) \right)$$

Entonces, nuevamente, si (x_o, y_o) pertenece a la recta $ax + by = 0$ resulta

$$x(t) = \frac{-b(y_o - mx_o)}{a+bm} = x_o \quad ; \quad y(t) = y_o \text{ para todo } t$$

Ahora si $ax_o + by_o \neq 0$ y $L = \dfrac{a+bm}{bm^2+am-dm-c} > 0$

(el caso $L < 0$ se trata por analogía)

Entonces de (4) se obtiene

$$A \leq (ax_o + by_o)\, e^{(a+bm)t} \leq B \qquad (7)$$

donde $A = L(-M + (d-mb)(y_o - mx_o)) + b(y_o - mx_o)$

$B = L(M + (d-mb)(y_o - mx_o)) + b(y_o - mx_o)$

Finalmente de (7) y denotando

$E = (ad-bc)(mx_o - y_o)$; $F = (am-c)x_o + (bm-d)\, y_o$

Se concluye que

B.1. $ax_o + by_o > 0$; $a + bm > 0$ implica

$-M(a+bm) \leq E < M(a+bm)$; $-M \leq F < M$

B.2. $ax_o + by_o > 0$; $a+bm < 0$ implica

$M(a+mb) < E \leq -M(a+bm)$; $-M < F \leq M$

B.3. $ax_o + by_o < 0$; $a + bm > 0$ implica

$$-M(a+bm) < E \leq M(a+bm) \quad ; \quad -M \leq F < M$$

B.4. $ax_o + by_o < 0$; $a + bm < 0$ implica

$$M(a+bm) \leq E < -M(a+bm) \quad ; \quad -M < F \leq M$$

B.5. $ad - bc = 0$ implica

$$e^{(a+bm)t} \leq \frac{LM}{|ax_o+by_o|}$$

de donde

$$|ax_o + by_o| \leq LM \quad \text{si } a+bm \leq 0$$

$$|(ax_o + by_o| < LM \quad \text{si } a+bm > 0$$

B.6. $bm^2+am-dm-c = 0$ entonces de (4) se obtiene

$$|mb-d|\,|u_o-mx_o| \leq M$$

si además $mb-d = 0$ resulta $u = 0$, lo cual transforma (1) en un sistema cuyo retrato fase es conocido en sus diferentes casos, como aparece por ejemplo en Hirsch ([3]) .

EJEMPLOS:

1.- Consideremos el sistema que usa Blagodatskikh ([1]) para aplicar su resultado sobre cero controlabilidad optimal con restricción de estado

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = u \quad u \text{ en } [-1,1]$$

En este caso, $ax + by = y = 0$ es la recta de puntos estables para nuestro problema y $a + bm = m = 0$ implica paralelismo al eje x (Fig. 1).

Blagodatskikh considera la restricción de estado $|y| \leq 1$ y allí es factible el deslizamiento rectilíneo sobre la frontera de tal región (Fig.2). Sin embargo, ello no es posible si se considera por ejemplo la restricción $0 \leq y \leq 1$.

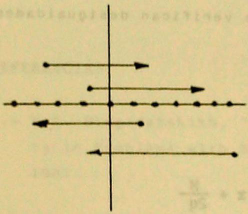

Fig. 1

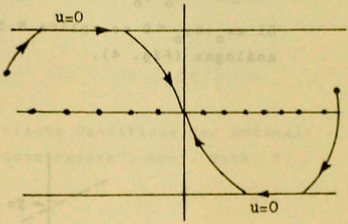

Fig. 2

2.- La dinámica del oscilador lineal amortiguado tiene como modelo el sistema

$$\dot{x} = y \qquad x(0) = x_o$$

$$\dot{y} = -p^2 x - 2q\, y + u \qquad y(0) = y_o \qquad |u| \leq M$$

p , q constantes positivas (Knowles [4])

En este caso

$a + bm = m$; $c + dm = -p^2 - 2qm$; $a + d = -2q$; $ad - bc = p^2$

$$L = \frac{m}{m^2 + 2qm + p^2}$$

Si $m = 0$ se obtiene de A.4 que

$$-M < p^2 x_o + 2qy_o \leq M \quad \text{si} \quad -p^2 y_o > 0$$

$$-M \leq p^2 x_o + 2qy_o < M \quad \text{si} \quad -p^2 y_o < 0 \qquad \text{(Fig. 3)}$$

Si $m > 0$ se obtiene de B.1 que para $ax_o + by_o > 0$ se cumple

$$-Mm \leq p^2(mx_o - y_o) < Mm \ ; \quad -M \leq p^2 x_o + (m+2q)y_o < M$$

Si $ax_o + by_o < 0$ se aplica B.3 y se verifican desigualdades análogas (Fig. 4).

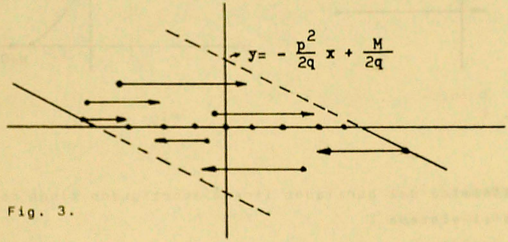

Fig. 3.

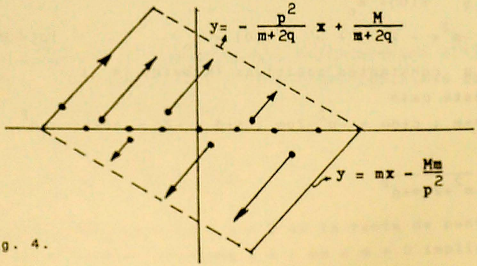

Fig. 4.

COMENTARIO FINAL:

Creemos que la información anterior constituye una motivación para iniciar un camino de generalizaciones al caso lineal considerado. Así, la extensión del problema presentado a sistemas lineales de control multiparamétrico y a sistemas no lineales en el plano y su posterior adaptación a R^n está en proceso de estudio.

REFERENCIAS:

1.- V.I. Blagodatskikh, "Sufficiente Conditions for Optimality in Problems with State Constraints", Appl. Math, 7, 1981.

2.- A. Engel, "Elementos de Biomatemática", O.E.A. Serie de Matemática Nº 20, 1978.

3.- M. Hirsch and S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra", Academic Press, Inc. 1974.

4.- G. Knowles, "An Introduction to Applied Optimal Control" Academic Press, 1981.