APROXIMACION POLINOMIAL

C. MIGUEL BLAZQUEZ

Al trabajar en problemas concretos matemáticos o de aplicación uno se encuentra muchas veces con la existencia teórica de funciones contínuas, valores de ellas en algunos puntos, etc..., obtenidos ya sea por métodos experimentales o computacionales. Es en esos momentos en que adquiere importancia el espacio de las funciones contínuas y el Teorema de Weierstrass, el cual pretendo presentar, junto con algunas aplicaciones en este curso.

Quiero agradecer a mis colegas de la Universidad de la Frontera, por su gentil invitación a dictar este curso y a compartir con ellos algunos días en esta tan agradable ciudad de Temuco.

Universidad Técnica Federico Santa María.

I.- EL ESPACIO C [a, b]

El espacio fundamental en todo este curso será el espacio de las funciones contínuas sobre un intervalo.

DEFINICION 1.-

$C[a,b] = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$

Notemos que $C[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y además su dimensión es infinita, ya que $1, x, x^2 \ldots, e^x, e^{2x} \ldots$ sen x, sen 2x, ... etc., son linealmente independientes.
Como sobre un compacto cualquier función contínua toma su máximo y mínimo, entonces está bien definida.

DEFINICION 2.-

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)| \quad \text{norma de } f$$

Con esta definición se satisfacen

PROPIEDADES:

1) $\|f\| \geq 0$

2) $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$

3) $\|cf\| = |c| \, \|f\|$ donde $C \in \mathbb{R}$

4) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Al cumplir estas propiedades la norma el espacio vectorial $C[a,b]$ se le llama un espacio normado.
En forma natural se puede definir el concepto de distancia o métrica para un espacio normado.

DEFINICION 3.-

$d(f,g) = \|f-g\|$

que cumplen

PROPIEDADES:

1) $d(f,f)=0$

2) $d(f,g)>0$ para $f\neq g$

3) $d(f,g)=d(g,f)$

4) $d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$

que son consecuencia de las propiedades de la norma. O sea, el espacio $C[a,b]$ al satisfacer estas propiedades también es un espacio métrico.
Al estar provisto de una métrica podemos definir el concepto de convergencia que es uno de los más difíciles de dominar en matemática.

DEFINICION 4.-

Sea $\{fn\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C[a,b]$. Diremos que esta sucesión converge a una función $f\in C[a,b]$ en norma, $fn\to f$ <=> cuando $n\to\infty$, $d(fn,f)\to 0$, o sea $\|fn-f\|\to 0$.
Esta definición es equivalente a la convergencia uniforme funciones o sea, $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ tal que $\forall n>N$ $|fn(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall a\leq x\leq b$

ya que $|fn(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall a\leq x\leq b$

$\Longleftrightarrow \sup_{a\leq x\leq b}|fn(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \|fn-f\|<\varepsilon$

Debemos notar que esta convergencia no es equivalente a la convergencia puntual o punto a punto. O sea $\forall\ \varepsilon>0$ $\exists\ N(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}$ tal que $\forall\ n>N$ $|fn(x)-f(x)|<\varepsilon$ donde el índice N depende del punto x en consideración

Ejemplo:

Sea $fn(x)=x^n$ para $0\leq x\leq 1$.
La sucesión $\{fn(x)\}$ converge puntualmente a 0 para $x\neq 1$ y a 1 si $x=1$, sin embargo no es convergente en norma.

TEOREMA 1.-

Si $\{fn\}\subseteq C[a,b]$ y $\{fn\}\to f$ uniformemente $\Rightarrow f\in C[a,b]$

DEMOSTRACION

Si $\{f_n\} \to f$ uniformemente $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3\ \forall\ a\leq x\leq b$, por lo tanto $\forall x$, y $\in[a,b]$ se tiene
$|f(x)-f(y)|\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon$

si además de la convergencia usamos la continuidad de fn.

DEFINICION:

Un espacio métrico es completo <=> toda sucesión de CAUCHY es convergente.

Por supuesto toda sucesión convergente es una sucesión de CAUCHY, pero a la inversa no siempre es cierto como veremos en los ejemplos, pero nuestro espacio C[a,b] si lo es.

TEOREMA 2.-

C[a,b] es un espacio métrico completo.

DEMOSTRACION

Solo debemos demostrar que si $\{f_n\} \subseteq C[a,b]$ es una sucesión de CAUCHY entonces $\exists f\in C[a,b]$ tal que $\|f_n-f\|\to 0$ o sea, si $\forall\varepsilon\ \exists N(\varepsilon)$ tal que n, $m>N \Rightarrow \|f_m-f_n\|<\varepsilon \Leftrightarrow \max\limits_{a\leq x\leq b}$
$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\ \forall x\in[a,b]$
Por lo tanto $\forall x\in[a,b]$ fijo, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de CAUCHY en $\mathbb{R}$, el cual es un espacio completo,

por lo tanto $\exists \bar{x}\in\mathbb{R}$ tal que $f_n(x)\to\bar{x}$ cuando $n\to\infty$.
Esto nos permite definir una función f , de [a,b] a los reales,

tales que $f(x)=\bar{x}$ y la forma en que es definida nos asegura que $\{f_n\}\to f$ pero puntualmente.
Pero $|f_m(x)-f_n(x)|<\ \varepsilon\ \ \forall x\in\ [a,b]$ por lo tanto si tomamos $m\to\infty$, se tiene $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\forall x\in[a,b]$ lo que es convergencia uniforme, de acuerdo al Teorema 1 $f\ \in C[a,b]$.
C[a,b] es por lo tanto un espacio métrico completos, los que reciben el nombre de Espacios de Banach

Obviamente no todos los espacio métricos son Banach, como por ejemplo

Ejemplo 1.-

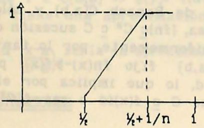
P={polinomios en x} $\subseteq$ C[a,b] no es completo, ya que como veremos"aproximan"cualquier función contínua y bastaría considerar una no suave en algún punto para que no sea un polinomio.

Ejemplo 2.-

$F=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f$ contínua$\}$ con la norma definida por

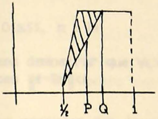
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

es un espacio ,métrico, pero la sucesión $\{fn\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas por el gráfico



forman una sucesión de CAUCHY, ya que $\|f-g\|_1 = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$

corresponde al área del triángulo achurado



P=½ + 1/m

Q=½ + 1/n

sin embargo converge a una función no contínua.
La completación de C[a,b] con esta norma corresponde al Espacio de Banach

$$L^1[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(x)|dx<\infty\}$$

donde $C[a,b] \subseteq L^1[a,b]$

En general, son espacios de Banach los espacios para $p \geq 1$

$$L^p[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty\}$$

con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Otros espacios de Banach que nos interesan son

Ejercicio 3.-

$$C^* = \{f : [a,b] \to [c,d] \mid f \text{ es continua}\}$$

Es un subespacio del espacio de Banach $C[a,b]$ y sólo bastaría demostrar que es cerrado, o sea, $\{f_n\} \subseteq C^* \subseteq C$ sucesión de CAUCHY $\Rightarrow \exists\, f \in C$, tal que $\{f_n\} \to f$ uniformemente, por lo tanto $\{f_n\} \to f$ puntualmente, o sea $\forall x \in [a,b]$ fijo $f_n(x) \to f(x)$, pero cada $f_n \in C^*$ o sea, $c \leq f_n(x) \leq d$, lo que implica por el teorema de acotamiento (sandwich) que $c \leq f(x) \leq d$ o sea $f \in C^*$

Ejemplo 4.-

$$C^k[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f, f^1, \ldots, f^{(k)} \text{ continuas}\}$$

son espacios de Banach, con la norma

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{k} \sup_x |f^{(i)}(x)|$$

II.- TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si designamos por

$$P(x) = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_u x^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ x \in [a,b]\} \subseteq C[a,b]$$

el conjunto de los polinomios considerados como funciones reales, entonces se tiene que $P(x) \subseteq C[a,b]$, pero $C \not\subseteq P[a,b]$ ya que como mencionamos antes, bastaría tomar una función contínua no derivable en algún punto, para que no se trate de un polinomio, pero si se tiene que toda función contínua en C[a,b] es aproximable por polinomios, este se conoce como el Teorema de Weierstrass, que se puede enunciar:

I) $\forall f \in C[a,b],\ \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in P_n(x)$ tal que $|p(x)-f(x)| < \varepsilon\ \forall a \le x \le b$

II) En toda vecindad de f existe algún polinomio $p \in P_n(x)$

III) P(x) es denso en C[a, b]

O si consideramos una familia de vecindades de radio 1/n

III) $\forall f \in C[a,b],\ \exists \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P(x)$ tal que $\{p_n\} \to f$ en C[a, b] o sea $\|p_n - f\| \to 0$, o $p_n(x) \to f(x)$ uniformemente.

Este Teorema es válido para todo intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, pero para la demostración es suficiente sólo considerar solo [0,1] ya que $f \in C[a,b] \Rightarrow g(y) = f(a+(b-a)y)$ con $0 \le y \le 1 \Rightarrow g \in C[0,1]$ Si se tiene una aproximación Q de g en C[0,1], entonces

$P(x) = Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ sería la aproximación f en C[a, b]

DEMOSTRACIONES

Tomemos los polinomios de Bernstein de orden n, definidos por:

$$Bn(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k} f(k/n)$$

donde $0 \le x \le 1$, $n \in \mathbb{N}$

queremos demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ tal que $n \ge N$, entonces $\|f - Bn\| < \varepsilon$.

Debemos recordar que $(p+q)^{n} = \sum \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k}$

de donde $\sum \binom{n}{k} x^{k} (1-x)^{n-k} = 1$ y si derivamos 2 veces respecto a p y reemplazamos, se tiene

$$\sum_{K=0}^{n}\left(\frac{K}{n}-x\right)^2\binom{n}{K}x^b(1-x)^{n-K}=\frac{x(1-x)}{n}\quad 0\le x\le 1$$

Tomando la definición, se tiene

$$f(x)-Bn(x)=\sum_{K=o}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{K}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^K(1-x)^{n-K}$$

suma que descompondremos en 2 sumandos $\Sigma_1+\Sigma_2$. Como f es contínua, dado $\varepsilon>0,\exists\partial>0$ tal que si $|x-y|<\partial$ entonces $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

Tomemos N, tal que $\frac{1}{\sqrt[4]{N}}<\partial$ y $\frac{1}{\sqrt{N}}<\frac{\varepsilon}{4\|f\|}$

Definiremos como Σ_1, todos los sumandos donde se tenga que $\left|\frac{K}{n}-x\right|<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ y Σ_2 contiene el resto.

Si $\left|\frac{K}{n}-x\right|\ge\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ entonces $(K-nx)^2=n^2\left|\frac{K}{n}-x\right|^2\ge\sqrt{n^3}$

o sea $\frac{(K-nx)^2}{\sqrt{n^3}}\ge 1$

Por lo tanto

$$|\Sigma_2|\le\Sigma\Big[|f(x)|+|f(K/n)|\Big]\binom{n}{k}x^K(1-x)^{n-K}$$

$$\le 2\|f\|\Sigma\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-K}$$

$$\le 2\|f\|\frac{\Sigma(K-nx)^2}{\sqrt{n3}}\binom{n}{k}(1-x)^{n-K}$$

$$\le 2\left\|\frac{f}{\sqrt{n^3}}\right\|nx(1-x)$$ de la igualdad del comienzo

Pero de las condiciones para N tenemos

$$|\Sigma_2|\le\frac{2\|f\|nx(1-x)}{\sqrt{n3}}\le\frac{2\|f\|}{\sqrt{n}}<\varepsilon/2$$

Para Σ_1, se tiene

$$|\Sigma_1|=\left|\Sigma\left[f(x)-f\left(\frac{K}{n}\right)\right]\binom{n}{n}x^K(1-x)^{n-K}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

por continuidad de f y que la suma del resto de los términos es menor que uno.

Al aproximar funciones contínuas en la práctica aparecen algunas preguntas:
Hasta qué grado se deben considerar los polinomios?
ó Es necesario tomar todas las potencias en x?
Para responder la primera pregunta debemos tener en cuenta la condición impuesta en la demostración

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$$

la cual nos permite, al definir el error obtenido el grado necesario del polinimo.
Para la segunda pregunta se tiene

TEOREMA MUNTZ-SZASZ

Si $P_N(x)=\{a_0+a_1x^{n_1}+\ldots+a_kx^{n_k}\}$

Entonces P_N es denso en $C[0,1] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} 1/n_i=\infty$

lo que nos permite por ejemplo tomar sólo los pares o impares, etc., no es posible tomar potencias de n mayores que 1 ya que $\Sigma \frac{1}{n^p}$ es convergente para $p > 1$.

III.- APLICACIONES

3.1.- ECUACIONES DIFERENCIALES

Cualquier ecuación diferencial de orden n $y^n=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ haciendo el cambio de variables $y_1=y, y_2=y', y_3=y'', \ldots, y_n=y^{(n)}$ se puede transformar en un sistema de n ecuaciones de primer orden, del tipo

$$\begin{aligned} y'_1&=y_2\\ y'_2&=y_3\\ y'_{n-1}&=y_n\\ y'_n&=f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \end{aligned}$$

lo que nos motiva a estudiar sistemas en general de ecuaciones de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} y'&=f(x,y) \qquad (3.1)\\ y(x_0)&=y_0 \end{aligned}$$

donde y_0, y son vectores en $\mathbb{R}^n$ y f una función de $\mathbb{R}^{n+1}$ a $\mathbb{R}^n$

DEFINICION:

φ es una solución local de la ecuación (3.1) si está definida en un intervalo $I_\partial=[x_0-\partial, x_0+\partial]$, satisface la ecuación o sea

$\varphi^1(x)=f(x,\varphi(x))$ y cumple la condición inicial $\varphi(x_0)=y_0$.
Integrando la ecuación(3.1) de x_0 a x se obtiene
$$\varphi(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt$$

o bien $$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \qquad (3.2)$$

Previo a estudiar la existencia de estudiar la existencia de tales soluciones, damos un lema que será nuestra herramienta básica.

DEFINICION:

$T:B\to B$, B espacio normado, T se llama una contracción en B $\Longleftrightarrow \|T(x)-T(y)\|\leq K\|x-y\| \;\forall\; x,y\in B,\; 0<K<1$

LEMA(contracción)

Si $T:B\to B$ es una contracción y B es un espacio completo, entonces T tiene un único punto fijo, o sea, $\exists!\; p\in B$ tal que $T(p)=p$.

DEMOSTRACION

Sea $x\in B$, $x_n=T^n(x)$
entonces $\|x_{n+r}-x_n\|=\|T^{n+r}(x)-T^n(x)\|\leq K^n\|T^r(x)-x\|$

$$\leq K^n\{\|x-T(x)\|+\|T(x)-T^2(x)\|+\ldots$$
$$\ldots+\|T^{r-1}(x)-T^r(x)\|\}$$
(por desigualdad triangular)

$$\leq K^n(1+K+\ldots+K^r)\|x-T(x)\|$$
(usando definición de contracción)

$$\leq \frac{K^n}{1-K}\|x-T(x)\|$$

(usando la suma de la serie geométrica)

O sea, la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de CAUCHY en B, por completitud de B existe $x_0 \in$ B, tal que $\{x_n\} \to x_0$. Además $T(x_0)=T(\lim x_n)=\lim T(x_n)=\lim x_{n+1}=x_0$

Con este lema podemos demostrar

TEOREMA (PICARD)

Si f es continua en el rectángulo $I_a \times I_b \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ donde $I_a=\{x \mid \|x-x_0\| \le a\}$ $I_b=\{y \mid \|y-y_0\| \le b\}$ tal que f es lipschuiziana en y, o sea
$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\| \le K\|y_1-y_2\|$ $K \in \mathbb{R}^+$

Entonces existe una única solución $y=\varphi(x)$ definida en I_α, donde
$\alpha = \min\{a, b/m\}$ y $\alpha K < 1$, $M = \max\limits_{\substack{x \in I_\alpha \\ y \in I_\beta}} \|f(x,y)\|$

DEMOSTRACION

Ya vimos que $C^*=C[I_a, I_b]$ es un espacio de Banach, definamos
$T: C^* \to C^*$ mediante
$$T(\varphi)_{(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt$$
Entonces
i) $T(C^*) \subseteq C^*$
ya que
$$\|T(\varphi)_{(x)}-y_0\| \le \int_{x_0}^{x} \|(t,\varphi(t))\|dt \le \int_{x_0}^{x} Mdt$$
$$\le M\alpha \le b$$
ii) T es una contracción
ya que
$$\|T(\varphi)-T(\psi)\| \le \int_{x_0}^{x} \|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))\|dt \le K\|\varphi-\psi\|\|x-x_0\| \le K\alpha\|\varphi-\psi\|$$

donde $K\alpha < 1$ por lo tanto, se satisfacen las condiciones del lema y el punto fijo es la solución buscada.
Se puede debilitar, perdiendo la unicidad, las condiciones de la función f, como por ejemplo solo solicitando continuidad.

DEFINICION

Una familia $y \subseteq C[a,b]$ se dice equicontínua $\iff \forall\, \varepsilon$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \;\; \forall f \in y$

Note que ε es independiente de f,x,e y.

TEOREMA ARZELA-ASCOLI

Toda sucesión equicontínua y acotada en C[a,b] tiene una subsucesión convergente a una función en C[a,b] en forma uniforme.

Con esto demostraremos

TEOREMA (PEANO)

Si $f \in C\,[I_a, I_b]$ y $\|f\| \leq M$ en $I_a \times I_b$ entonces existe solución definida en I_x, donde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

DEMOSTRACION

Como f es una función contínua por el Teorema de Weierstrass es aproximable por polinomios, o sea, $\exists\{p_n\}$ tal que $\{p_n\} \to f$ uniformemente. Si n es grande p_n satisface las condiciones del Teorema de Picard, por lo tanto

$\exists\, \varphi_n$ solución de la ecuación $y^1 = p_n(x,y)$ con $y(x_0) = y_0$

$\{\varphi\}$forman una familia equicontínua y acotada, ya que

$$\|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)\| \leq \int_{x_1}^{x_2} \|p_n(t, \varphi_n(t))\| dt \leq M|x_2 - x_1|$$

$$y \quad \|\varphi_n - x_0\| \leq \int_{x_0}^{x} \|p_n(t, \varphi_n(t))\| dt \leq M\|x - x_0\| \leq b$$

Por Arzela-Ascoli existe una subsucesión que converge a $\varphi \in C(I_\alpha, I_\beta)$.

Además

$$\|p_n(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))\| \leq \|p_n(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi_n(t))\|$$
$$+ \|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi_n(t))\|$$

de la convergencia y continuidad de f se ve que $\{p_n(t, \varphi_n(t))\}$ converge uniformemente a $f(t, \varphi_n(t))$.

por lo tanto, si tomamos límite a

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} p_n(t,\varphi_n(t))dt$$

obtenemos $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))dt$

lo que demuestra la existencia de solución.

3.2.- INTERPOLACION

Si se conoce la existencia de una función contínua y los valores que ella toma en algunos puntos podemos determinar aproximaciones de dicha función mediante polinomios.
Un método alternativo para este problema es el uso de mínimos cuadrados, donde puede ser aproximada por funciones no necesariamente polinomiales, sin embargo, esta aproximación no pasará exactamente por dichos puntos, como ocurre en la interpolación.
En resumen, nuestra idea queda manifiesta en el siguiente teorema

TEOREMA

Dados $(n+1)$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y $(n+1)$ valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$, existe un único polinomio de grado n, $p(x)$, tal que $p(x_i)=\omega_i$ $i=0,1,\ldots,n$

DEMOSTRACION

Sea $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ si le imponemos las condiciones obtenemos

$$p(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_nx_i^n \quad i=0,1,2,\ldots,n$$

que es un sistema de $(n+1)$ ecuaciones con $(n+1)$ incognitas, cuya matriz de los coef.(Van-Der-Monde)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^n \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^n \end{bmatrix}$$

es convertible.

Para trabajar en la práctica este no es el camino mas indicado siendo más sencillo determinar bases para los polinomios en que el cálculo de los coeficientes sea mas simple. Las bases mas usuales están dadas por:

3.2.1 POLINOMIOS DE LAGRANGE

DEFINICION

Polinomios de Lagrange de grado n

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=\prod_{i\neq j}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

para $i=0, 1, 2, \ldots, n$.
los cuales satisfacen
$l_i(x_0)=0, \quad l_i(x_1)=0\ldots$
pero $l_i(x_i)=1$
o sea $l_i(x_j)=\delta_{ij}$
por lo que en forma simple se cumple

$$\boxed{p(x)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i l_i(x)}$$

es el polinomio buscado, ya que

$p(x_j)=\Sigma\, \omega_i l_i(x_j)=\omega_j$

Otra manera de escribir los polinomios la obtenemos si definimos

$\omega(x)=\prod_i (x-x_i)$

entonces

$l_i(x)=\dfrac{\omega(x)}{(x-x_i)M}$

por lo tanto

$\lim_{x\to x_i} l_i(x)=\lim_{x\to x_i} \dfrac{\omega'(x)}{M}=\dfrac{\omega'(x_i)}{M}=l_i(x_i)=1$

o sea $m=\omega'(x_i)$

lo que resulta $l_i(x)=\dfrac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}$

La ventaja más importante, aparte de su fácil construcción es que si queremos cambiar algún valor ω_j por otro es fácil determinar el nuevo polinomio

$p(x)=\Sigma\ \omega_i\ \ l_i(x)$

ω_i ⟶ valores dados

$l_i(x)$ ⟶ de partición

su desventaja la constituye que si se quiere agregar o cambiar los puntos, se deben reconstruir completamente los polinomios.

3.2.2.- POLINOMIOS DE NEWTON

Tomaremos como base

$1,\ (x-x_0),\ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$

Por lo tanto

$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

se quiere determinar $a_0, a_1, \dots a_n$

pero

$p(x_0)=a_0=\omega_0$

$p(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)=\omega_1$

$\Rightarrow\ a_1=\dfrac{\omega_1-\omega_0}{x_1-x_0}$

$p(x_2)=\omega_2 \Rightarrow a_2=\dfrac{\omega_2-\omega_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\dfrac{\omega_1-\omega_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$

etc...

Si definimos $[\omega_i, \omega_j] = \dfrac{\omega_j-\omega_i}{x_j-x_i}$

$$[\omega_1, \omega_j, \omega_r] = \frac{[\omega_1, \omega_2]-[\omega_0, \omega_1]}{x_2-x_0}$$

etc...

definición que es invariante al cambio de orden de los puntos.
Se obtiene, formando las diferencias en forma progresiva (diferencias divididas)

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & \omega_0 & & & & \\
 & & [\omega_0, \omega_1] & & & \\
x_1 & \omega_1 & & [\omega_0, \omega_1, \omega_2] & & \\
 & & [\omega_1, \omega_2] & & [\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] & \\
x_2 & \omega_2 & & [\omega_1, \omega_2, \omega_3] & & \\
 & & [\omega_2, \omega_3] & & & \\
x_3 & \omega_3 & & [\omega_2, \omega_3, \omega_4] & & \\
 & & [\omega_3, \omega_4] & & & \\
x_4 & \omega_4 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
x_n & \omega_n & & & &
\end{array}$$

donde $AI = [\omega, \omega_1, \ldots \omega_i]$
lo que se encuentra calculado en la primera diagonal.
El error está dada por el resto $R_n(f, x)$

$$R_n(f, x) = f(x) - p_n(f, x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(2z)$$

3.2.3 POLINOMIOS DE HERMITE

Son usados cuando son dados los valores de la función en n puntos y sus respectivas derivadas, lo que hace necesario considerar polinomios de grado 2n-1.

Sea $r_k(x) = (x-x_k)\, l^2_k(x)$ de grado 2n-1 y

$$r_k(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] l^2_k(x)$$

El polinomio buscado queda dado por

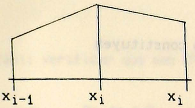
$$p(x) = \sum_{K=1}^{n} \omega_K r_K(x) + \sum_{K=1}^{n} \omega'_K r_K(x)$$

donde ω_K y ω'_K son los valores dados para la función y su derivada en x_K.

3.3 SPLINES

Su uso es importante cuando se necesita además de una buena aproximación de la función que pase por determinados puntos, de que sea suave, C_2 al menos lo cual es necesario, por ejemplo, en diseño aerodinámico, como barcos, aviones, etc.
La idea es aproximar la función por tramos, para eso consideremos tres puntos consecutivos x_{i-1}, x_i, x_{i+1}

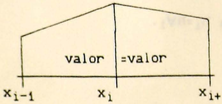
a) lineal



Si las interpolaciones son rectas, o sea,
$y=ax+b$
$y=cx+d$

Se tiene 4 incógnitas y 4 condiciones, no teniendose suavidad.

b)cuadráticas



En este caso estarán dadas por
$y=a+bx+cx^2$
$y=d+ex+fx^2$

Con lo que se tiene 6 incógnitas y 4 condiciones para continuidad, lo que nos deja 2 grados de libertad, la solicitud de suavidad nos agrega 3 condiciones, lo que nos obliga a excluir una, obteniendo asimetría.

c) cúbicas

Ahora disponemos de 8 incógnitas, que al imponerle 4 condiciones para la continuidad y 3 para la suavidad, nos permite todavía agregar una extra, como continuidad de la segunda derivada en x_i, transformándolas por esto en las mas útiles.

Una forma simple de obtener es considerar polinomios tales que

	F_0		F_1		G_0		G_1	
	0	1	0	1	0	1	0	1
ω	1	0	0	1	0	0	0	0
ω_i'	0	0	0	0	1	0	0	1

Si $h_i=x_i-x_{i-1}$
un spline que satisface las condiciones será

$$s(x)=\omega_{i-1}F_0\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)+\omega_i F_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)+\omega'_{i-1}h_i G_0\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$+\ \omega'_i h_i G_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)$$

Un ejemplo para tales funciones lo constituyen

$$F_0(x) = 1-3x^2+2x^3$$
$$F_1(x) = 3x^2-2x^3$$
$$G_0(x) = x-2x+3x^3$$
$$G_1(x) = -x^2+x^3$$

B - SPLINES

Lo que se pretende es una base que generen Splines que sean C^2. Para eso asumiremos que

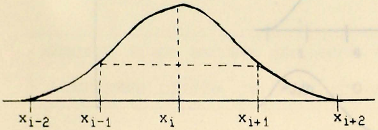
1) Puntos equidistantes, o sea $h_i=h\forall_i$.
2) Cúbicos.

DEFINICION

B-Splines cúbicos simétricos (Bernstein)

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x-x_{i-2})^3 & x_{i-2} \le x \le x_{i-1} \\ h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3 & x_{i-1} \le x \le x_i \\ h^3+3h^2(x_{i+1}-x)+3h(x_{i+1}-x)^2-3(x_{i+1}-x)^3 & x_i \le x \le x_{i+1} \\ (x_{i+1}-x)^3 & x_{i+1} \le x \le x_{i+2} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

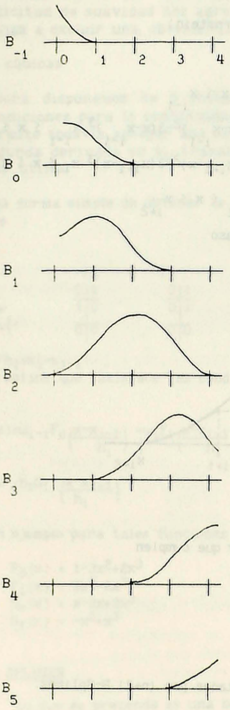
que tiene la forma



Es fácil verificar que son C^2 y que cumplen

$B_i(x_i)=4$ $\quad B'_i(x_i)=0$
$B_i(x_{i\pm 1})=1$ $\quad B'_i(x_{i-1})=3/h$
$B_i(x_{i\pm 2})=0$ $\quad B'_i(x_{i+1})=-3/h$

Si se tiene n puntos, son afectados por (n+2) B-Splines.
Por ejemplo, si n=5



TEOREMA

Dado (n+3) valores

$\omega'_2,\ \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n,\ \omega'_n$

Existe una única combinación lineal $S(x)$ de B_{-1}, B_0, B_1, ..., B_{n+1} tal que

$$S'(x_0)=\omega'_0,\ S(x_0)=\omega_0,\ S(x_1)=\omega \ldots\ S(x_n)=\omega_n\ S'(x_n)=\omega'_n$$

DEMOSTRACION

Sea $S(x)=a_{-1}\,B_{-1}(x)+a_0B_0(x)+\ldots+a_{n+1}B_{n+1}(x)$ si tabulamos en los puntos se obtiene un sistema de $(n+3)$ ecuaciones con $(n+3)$ incógnitas, cuya matriz de coeficientes es:

$$\begin{bmatrix}
-3/h & 0 & 3/h & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & -3/h & 0 & 3/h
\end{bmatrix}_{(n+3)\times(n+3)}$$

la que no es singular, por ser diagonal dominante.