"Clasificación de las Algebras de Bernstein de Dimensión 4"

AVELINO SUAZO DELGADO

Una K-álgebra, A conmutativa de dimensión finita con caract (K) $\neq 2$, se dice que es una K-álgebra de Bernstein, si existe un homomorfismo no nulo de K-álgebra $w:A \to K$ tal que todo elemento de A verifica la ecuación $(x^2)^2 = w^2(x)x^2$. El homomorfismo $w:A \to K$ es único y el núcleo de W es un ideal de A. Dado que toda álgebra de Bernstein posee un idempotente e, A se puede descomponer en la suma directa $A=\langle e \rangle \oplus U \oplus Z$ donde: $U=\{ey, y \in Ker\ w\}$, $Z=\{x \in A, ex=0\}$; además las dimensiones de los subespacios U, U^2 y $UZ+Z^2$, no dependen del idempotente e, es decir, estos números son invariantes del álgebra A.

La álgebra de Bernstein A se dice que es de tipo (r+1,d) si dim U=r y dim Z=d.

Considerando el tipo (r+1,d) del álgebra y las dimensiones de los subespacios U^2 y $UZ+Z^2$ de A, se mostrará una clasificación de las álgebras de Bernstein de dimensión 4; entregando además los casos en que las álgebras de Bernstein son Normales;esto es, satisfacen $x^2y=w(x)xy$; $x,y \in A$; y los casos en que las álgebras de Bernstein son Special Train; es decir: $M:=Ker\ w$ es nilpotente y las potencias principales M^i; $i \in N$ son ideales de A.

1).- Sea A de tipo (1, 3); dim U=0 y dim Z=3
$U=\langle 0 \rangle$, $Z=\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$
$e^2=e$, $ez_i=0$, $z_iz_j \in Z^2 \subset U=\langle 0 \rangle$

Prof. Depto de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad de la Serena

Se sabe que si A es de Bernstein y $UZ=Z^2=<0>$ entonces A es normal, además toda álgebra de Bernstein normal es un special train álgebra y la ecuación rango es $x^3-w(x)x^2=0$ o $x^2-w(x)x=0$

([4], capítulo 9)

En este caso: $UZ=Z^2=<0> \Rightarrow$ A es normal y special train, ecuación rango de A: $x^3-w(x)x^2=0$

2).- Sea A de tipo (4, 0); dim$U$=3 y dim$Z$=0
$U=<u_1,u_2,u_3>$, $Z=<0>$

$$e^2=e,\quad eu_i=\frac{1}{2}u_i,\quad u_iu_j\in U^2\subset Z=<0>$$

$UZ=Z^2=<0> \Rightarrow$A es normal y special train
Ecuación rango: $x^2-w(x)x=0$

3).- Sea A de tipo (2, 2); dim$U$=1 y dim$Z$=2
$U=<u_1>$, $Z=<z_1,z_2>$; dim $(UZ+Z^2)\leq 1$, dim $U^2\leq 1$

a).- Supongamos que dim $(UZ+Z^2)=0$ y dim$U^2=0$

$$e^2=e,\quad u_1z_i=0,\quad u_1^2=0,\quad z_iz_j=0,\quad eu_1=\frac{1}{2}u_1$$

$UZ=Z^2=<0> \Rightarrow$ A normal y special train
Ecuación rango: $x^3-w(x)x^2=0$

b).- Sea dim $(UZ+Z^2)=0$ y dim$U^2=1$

$$e^2=e,\quad eu_1=\frac{1}{2}u_1,\quad u_1z_i=0,\quad z_iz_j=0,\quad u_1^2=\alpha z_1+\beta z_2$$

con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

Si $x=e+x_1u_1+y_1z_1+y_2z_2$; entonces $(x^2)^2=w^2(x)x^2$ y A de Bernstein

$UZ=Z^2=<0> \Rightarrow$ A normal y special train
Ecuación rango: $x^3-w(x)x^2=0$

c).- Supongamos dim$(UZ+Z^2)=1$ y dim$U^2=<0>$

$$e^2=e,\quad eu_1=\frac{1}{2}u_1,\quad u_1^2=0,\quad u_1z_1=\alpha u_1,\quad u_1z_2=\beta u_1,$$

$$z_1^2=\gamma u_1,\quad z_1z_2=\delta u_1,\quad z_2^2=\epsilon u_1 \text{ con } (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon)\neq(0,0,0,0,0)$$

A es un álgebra de Bernstein y como $\dim(UZ+Z^2)=1$, A no es normal.

Sea $x=w(x)e+x_1u_1+y_1z_1+y_2z_2$ y $L_x: A \to A$ la función lineal definida por:

$L_x(y)=xy \ \forall y \in A$

$$Lx(e)=w(x)e+\frac{1}{2}x_1\,u_1$$

$$Lx(u_1)=\frac{1}{2}w(x)u_1+y_1\,\alpha\,u_1+y_2\,\beta\,u_1$$

$$Lx(z_1)=x_1\,\alpha\,u_1+y_1\,\gamma\,u_1+y_2\,\delta\,u_1$$

$$L_x(z_2)=x_1\,\beta\,u_1+y_1\,\delta\,u_1+y_2\,\epsilon\,u_1$$

De lo anterior se obtiene que la matriz $M(L_x)$ de L_x con respecto a la base $\{e, u_1, z_1, z_2\}$ de A es:

$$M(L_x)\begin{bmatrix} w(x) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}w(x)+y_1\alpha+y_2\beta & x_1\alpha+y_1\beta+y_2\delta & x_1\beta+y_1\delta+y_2\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de L_x es:

$p(x)=x^2(x-w(x))\left(x-\left(\frac{1}{2}w(x)+y_1\,\alpha+y_2\,\beta\right)\right)$ y el polinomio rango del álgebra es un divisor de $xp(x)$ ([4], capítulo 2), luego:

i).-Si $\alpha=\beta=0$, el álgebra es train, además $M=\langle u_1, z_1, z_2\rangle$, $M^2=\langle \gamma u_1, \delta u_1, \epsilon u_1\rangle=\langle u_1\rangle$ y $M^3=\langle 0\rangle$, de donde A es special train (dado que M^2 es ideal de A)

Ecuación rango en este caso: $x^4-\frac{3}{2}w(x)x^3+\frac{1}{2}w^2(x)x^2=0$

ii).-Si $(\alpha, \beta)\neq(0,0)$, $M^2=\langle u_1\rangle$; en general $M^t=\langle u_1\rangle$ para $t\geq 2$; A no es special train.

d) Supongamos que A es un álgebra de Bernstein, tal que dim $(UZ+Z^2)=1$ y dim $U^2=1$

$e^2=e$; $eu_1=\frac{1}{2}u_1$, $u_1z_1=\alpha u_1$, $u_1z_2=\beta u_1$, $z_1^2=\gamma u_1$

$z_1z_2=\delta u_1$, $z_2^2=\epsilon u_1$; $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon)\neq(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ y u_1^2 es un vector no nulo de Z.

$(u_1z_1)^2=\alpha^2u_1^2=0 \Rightarrow \alpha=0$

$(u_1z_2)^2=\beta^2u_1^2=0 \Rightarrow \beta=0$; ([5])

$(z_1^2)^2=\gamma^2u_1^2=0 \Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow z_1^2=0$

$(z_2^2)^2=\epsilon^2u_1^2=0 \Rightarrow \epsilon=0 \Rightarrow z_2^2=0$ ([4], capítulo 9)

Se cumple que: $x^2y^2=-2(xy)^2\ \forall x,\ y\in M$ ([2])

$-2(z_1z_2)^2=z_1^2z_2^2=0 \Rightarrow (z_1z_2)^2=0 \Rightarrow \delta^2u_1^2=0 \Rightarrow \delta=0$

Se obtiene: $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\epsilon=0$ ($\rightarrow\leftarrow$)
No existe álgebra de Bernstein de dimensión 4 con estas características

4).- Sea A de tipo (3, 1), dim$U=2$, dim$Z=1$
$U=\langle u_1u_2\rangle$, $Z=\langle z_1\rangle$, dim $(UZ+Z^2)\leq 2$, dim$U^2\leq 1$

a).- Sea dim$(UZ+Z^2)=0$ y dim$U^2=0$

$e^2=e$, $eu_i=\frac{1}{2}u_i$, $u_iz_1=0$, $z_1^2=0$, $u_iu_j=0$

A es álgebra de Bernstein, $UZ=Z^2=\langle 0\rangle$ de donde A es normal y specila train.
Ecuación rango: $x^3-w(x)x^2=0$

b).- Sea dim $(UZ+Z^2)=0$ y dim $U^2=1$

$e^2=e$, $eu_i=\frac{1}{2}u_i$, $u_iz_1=0$, $z_1^2=0$, $u_1^2=\alpha z_1$, $u_2^2=\beta z_1$,

$u_1u_2=\gamma z_1$, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\neq(0,\ 0,\ 0)$

A es álgebra de Bernstein, $UZ=Z^2=\langle 0\rangle$, es decir A es normal y special train.

Ecuación rango: $x^3-w(x)x^2=0$

c).- Supongamos $\dim(UZ+Z^2)=1$ y $\dim U^2=0$

$$e^2=e,\quad eu_i=\frac{1}{2}u_i,\quad u_1z_1=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\quad u_2z_1=\beta_1u_1+\beta_2u_2,$$

$$z_1^2=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2,\quad u_iu_j=0;\quad (\alpha_1,\ \beta_1\ \gamma_1),\ (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$$

linealmente dependientes y no ambos nulos.

$\dim(UZ+Z^2)=1 \Rightarrow$ A no es normal

Sea $x=w(x)e+x_1u_1+x_2u_2+y_1z_1$; $L_x: A\to A$ lineal

$$L_x(e)=w(x)e+\frac{1}{2}x_1u_1+\frac{1}{2}x_2u_2$$

$$L_x(u_1)=\left(\frac{1}{2}w(x)+y_1\alpha_1\right)u_1+y_1\alpha_2u_2$$

$$L_x(u_2)=y_1\beta_1u_1+\left(\frac{1}{2}w(x)+y_1\beta_2\right)u_2$$

$$L_x(z_1)=(x_1\alpha_1+x_2\beta_1+y_1\gamma_1)u_1+(x_1\alpha_2+x_2\beta_2+y_1\gamma_2)u_2$$

La matriz $M(L_x)$ de L_x con respecto a la base $\{e, u_1, u_2, z_1\}$ de A es:

$$M(L_x)=\begin{bmatrix} w(x) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}w(x)+y_1\alpha_1 & y_1\beta_1 & x_1\alpha_1+x_2\beta_1+y_1\gamma_1 \\ \frac{1}{2}x_2 & y_1\alpha_2 & \frac{1}{2}w(x)+y_1\beta_2 & x_1\alpha_2+x_2\beta_2+y_1\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de L_x es:

$$p(x)=(x-w(x))\ (x^3-(w(x)+(\alpha_1+\beta_2)\gamma_1)x^2+(\frac{1}{4}w^2(x)+\frac{1}{2}w(x)\gamma_1(\alpha_1+\beta_2)+\gamma_1^2(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2))x)$$

$\alpha_1\ \beta_2-\ \beta_1\ \alpha_2=0$, dado que u_1z_1, u_2z_1 son linealmente dependientes.

i) Si $\alpha_1+\beta_2=0$; A es train y special train.

$M=\langle u_1, u_2, z_1\rangle$. Si $M^2=\langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\rangle$ entonces $M^3=\langle 0\rangle$; puesto que:

$$\begin{aligned} z_1(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2) &= \alpha_1(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)+\alpha_2(\beta_1u_1+\beta_2u_2)\\ &= (\alpha_1^2+\alpha_2\beta_1)u_1+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\beta_2)u_2\\ &= (\alpha_1^2+\alpha_1\beta_2)u_1+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\beta_2)u_2\\ &= (\alpha_1+\beta_2)\ (\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)=0 \end{aligned}$$

Si $M^2=\langle\beta_1u_1+\beta_2u_2\rangle$, se obtiene $M^3=\langle 0\rangle$

Si $u_1z_1=u_2z_1=0$ entonces $M^2=\langle\gamma_1u_1+\gamma_2u_2\rangle$, de donde $M^3=\langle 0\rangle$

ii).- Si $\alpha_1+\beta_2\neq 0$ no es special train, en este caso

$u_1z_1\neq 0$ o $u_2z_1\neq 0$

Supongamos $M^2=\langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\rangle$ con $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,\ 0)$

$$\begin{aligned} z_1(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2) &= \alpha_1(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)+\alpha_2\ (\beta_1u_1+\ \beta_2u_2)\\ &= (\alpha_1^2+\alpha_2\ \beta_1)u_1+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\beta_2)u_2\\ &= (\alpha_1^2+\alpha_1\beta_2)u_1+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\beta_2)u_2\\ &= (\alpha_1+\beta_2)\ (\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)\ \text{y}\ M^3=\langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\rangle \end{aligned}$$

En general $M^t=\langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\rangle\ \forall t\geq 2$ es decir: M no es nilpotente.

d).- Supongamos que A es de Bernstein con dim $(UZ+Z^2)=1$, dim $U^2=1$. Como dim$U^2=1$, $(U^2)^2=\langle 0\rangle$ ([2] proposición 6)

$U^2\leq Z$, dimU^2=dim Z=1, entonces $U^2=Z$; de donde $Z^2=\langle 0\rangle$ y $z_1=0$

2

Sean $u_1^2 = kz_1$, $u_2^2 = mz_1$, $u_1u_2 = tz_1$ con $(k, m, t) \neq (0, 0, 0)$

y u_1z_1, u_2z_1 vectores linealmente dependientes no ambos nulos. No se pierde generalidad al suponer $u_1z_1 \neq 0$

$u_1^3 = ku_1z_1 : 0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow u_1^2 = 0$ ([4] capítulo 9)

Los elementos de U satisfacen la identidad de Jacobi, esto es:

$(u_1u_2)u_3 + (u_2u_3)u_1 + (u_3u_1)u_2 = 0 \ \forall \ u_1, u_2, u_3 \in U$ ([2])

Luego: $2(u_1u_2)u_1 + u_1^2u_2 = 0$

$(u_1u_2)u_1 = 0$

$tu_1z_1 = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow u_1u_2 = 0$

$2(u_1u_2)u_2 + u_2^2u_1 = 0$

$u_2^2u_1 = 0$

$mu_1z_1 = 0 \Rightarrow m=0$

Se tiene $k=m=t=0$ (-▶◀-)
No existe álgebra de Bernstein con estas características.

e).- Sea $\dim (UZ+Z^2) = 2$ y $\dim U^2 = 0$

$e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2} u_i$, $u_1z_1 = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2$, $u_2z_1 = \beta_1u_1 + \beta_2u_2$

$z_1^2 = \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2$, con $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ l. independientes

$\dim (UZ+Z^2) = 2 \Rightarrow A$ no es normal.

El polinomio característico de $L_x : A \to A$ definida por $L_x(y) = xy \ \forall \ y \in A$ es:

$$(x-w(x))(x^3-(w(x)+\alpha_1+\beta_2)\gamma_1)x^2 + (\frac{1}{4}w^2(x) + \frac{1}{2}w(x)\gamma_1(\alpha_1+\beta_2) + \gamma_1^2(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2))x)$$

i).- Si $\alpha_1+\beta_2 = 0$ y u_1z_1, u_2z_1 l dependientes, es train y special train.

$M = \langle u_1, u_2, z_1 \rangle$; $M^2 \leq U$ y $\dim M^2 = 2$, se tiene

$M^2=\langle u_1, u_2\rangle$, $M^3=\langle \alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2\rangle$

$z_1(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=(\alpha_1+\beta_2)(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2=0$ y $M^4=\langle 0\rangle$

ii).- Si $u_1 z_1$, $u_2 z_1$ son 1, independientes o $\alpha_1+\beta_2 \neq 0$ no es special train.

f).- Supongamos A de Bernstein con dim $(UZ+Z^2)=2$ y dim $U^2=1$

$U^2 \leq Z$ y dim $U^2=$dim$Z \Rightarrow U^2=Z \Rightarrow (U^2)^2=Z^2=\langle 0\rangle \Rightarrow z_1^2=0$

Sea $u_1 z_1=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$, $u_2 z_1=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2$ con $\alpha_1\beta_2\neq\beta_1\alpha_2$,

$u_1^2=kz_1$, $u_1^2=mz_1$, $u_1 u_2=nz_1$ con $(k,m,n)\neq(0,0,0)$

$2(u_1 u_2)u_1+u_1^2 u_2=0 \Rightarrow (u_1 u_2)u_1=0 \Rightarrow nu_1 z_1=0 \Rightarrow n=0$

Se obtiene: $k=m=n=0$ (-▶◀-)
No existe álgebra de Bernstein con estas características.

Caracterización de las Algebras de Bernstein de dimensión 4

Sea A una K-álgebra de dimensión 4, $A=\langle e\rangle \oplus U \oplus$ con respecto a un idempotente $e \in A$. Supongamos dim$U=r$, dim$Z=d$ y escojamos una base $\{e, u_1, \ldots, u_r, z_1, \ldots, z_d\}$ de A con $u_i \in U$, $i=1,2,\ldots,r$; $z_i \in Z$, $i=1,2,\ldots,d$.
Entonces se pueden distinguir las siguientes clases de álgebras:

tipo $(r+1,d)$	$\dim(UZ+Z^2)$	$\dim U^2$	Multiplicación de los elementos de la base.	Propiedades
(1,3)	0	0	$e^2=e,\ ez_i=0,\ z_iz_j=0$	normal special train algebra Ec.rango: $x^3-w(x)x^2=0$
(4,0)	0	0	$e^2=e,\ eu_i=\frac{1}{2}u_i,\ u_iu_j=0$	normal special train Ec.rango: $x^2-w(x)x=0$
(2,2)	0	0	$e^2=e,\ eu_1=\frac{1}{2}u_1,\ ez_1=0$ $u_1z_1=0,\ u_1^2=0$	normal special train Ec.rango: $x^3-w(x)x^2=0$
	0	1	$e^2=e, eu_1=\frac{1}{2}u_1, ez_i=0$ $u_1z_i=0,\ z_iz_j=0$ $u_1^2=\alpha z_1+\beta z_2$ con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$	normal Special train Ec. rango: $x^3-w(x)x^2$
	1	0	$e^2=e, eu_1=\frac{1}{2}u_1, ez_i=0, u_1^2=0$ $u_1z_1=\alpha u_1, u_1z_2=\beta u_1, z_1^2=\gamma u_1$ $z_1z_2=\delta u_1, z_2^2=\varepsilon u_1$ con $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\neq(0,0,0,0,0)$	no es normal Si $\alpha=\beta=0$ es special train y si $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ no lo es
(3,1)	0	0	$e^2=e, eu_i=\frac{1}{2}u_i, ez_1=0, u_iz_1=0$ $z_1^2=0,\ u_iu_j=0$	normal special train Ec. rango: $x^3-w(x)x^2=0$
	0	1	$e^2=e, eu_i=\frac{1}{2}u_i, ez_1=0, u_iz_1=0$ $z_1^2=0, u_1^2=\alpha z_1, u_2^2=\beta z_1, u_1u_2=\gamma z_1$ con $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$	normal special train Ec.rango: $x^3-w(x)x^2=0$
	1	0	$e^2=e, eu_i=\frac{1}{2}u_i, ez_1=0$ $u_1z_1=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2, u_2z_1=\beta_1u_1+\beta_2u_2$ $z_1^2=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2, u_iu_j=0;$ $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_1),(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ l.depend. y no ambos nulos	no es normal si $\alpha_1+\beta_2=0$ es special train, y si $\alpha_1+\beta_2\neq0$ no lo es.
	2	0	$e^2=e, eu_i=\frac{1}{2}u_i, ez_1=0,$ $u_1z_1=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2, u_2z_1=\beta_1u_1+\beta_2u_2$ $z_1^2=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2, u_iu_j=0;$ $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ l. independientes.	no es normal Si $\alpha_1+\beta_2=0$ y u_1z_1, u_2z_1 l. dep. es special train Si $\alpha_1+\beta_2\neq0$ o u_1z_1, u_2z_1 l. indep. no es special train.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Alcalde, Burgeño, Labra, Micali: Sur les algebras de Bernstein London Math. Soc. (submitted) 1987.

[2] - Holgate, P.: Genetic Algebras Satisfying Bernstein's Stationarity Principle. London Math. Soc. 1975 (613-623).

[3] - Schafer R.D.: An Introduction to nonassociative algebras.
Academic Press, New York, London 1966.

[4] - Worz-Busekros, A.: Algebras in genetics. Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 36, Springer-Verlag, New York 1980.

[5] - Worz-Busekros, A.: Bernstein Algebras. London Math. Soc. (Submitted) 1986.