CARACTERIZACION EN ALGEBRAS DE BERNSTEIN

M.T.ALCALDE C. - R. BAEZA V. - C. BURGUEÑO M.

RESUMEN

Usando la caracterización de las ALGEBRAS DE BERNSTEIN que son de JORDAN, conseguimos una nueva caracterización que requiere sólo de dos condiciones en subespacios del álgebra. Adicionalmente obtuvimos otra demostración para caracterizar las ALGEBRAS DE BERNSTEIN que son NORMALES.

4.3. N

Trabajo parcialmente financiado por la Dirección de Investigación de la U.F.R.O.
Académicos jornada completa en el Departamento de Matemática y Estadística de la U.F.R.O.

PRELIMINARES

DEFINICION 1:

Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 y A un álgebra conmutativa sobre K. Decimos que (A, w) es un ALGEBRA PONDERADA ssi existe un homomorfismo de álgebras $w : A \longrightarrow K$ no trivial.

Como w es no trivial, existe $a \in A$ tal que $w(a)=1$, luego tenemos que $A=Ka \oplus Ker(w)$.

DEFINICION 2:

Sea (A, w) una K-álgebra ponderada. Decimos que (A, w) es un ALGEBRA DE BERNSTEIN ssi $(x^2)^2=w(x)^2x^2$ $\forall x \in A$.

Si A es un álgebra de Bernstein, es posible probar que los únicos idempotentes son de la forma x^2 con $x \in A$ y tales que $w(x)=1$.

Luego toda álgebra de Bernstein tiene al menos un idempotente. Sea e uno de ellos. Como $e \in Ker(w)$ (si no tendríamos que $w(e)=0$ pero $e=x^2$ con $w(x)=1$, luego $w(e)=$ $=w(x^2)=w(x)^2=1$ que es una contradicción) tenemos que $A = Ke \oplus Ker(w)$.

El endomorfismo $L_e(x) = ex$ $\forall x \in A$ deja invariante el subespacio $Ker(w)$ (ya que $w(ex) = w(e)w(x) = 1.0 = 0$ $\forall x \in Ker(w)$), luego $Ker(w)=L_e(Ker(w)) \oplus Ker(L_e)$. Sean $U := L_e(Ker(w)) = \{ex / w(x) = 0\}$ y $V := Ker(L_e) =$ $=\{x \in Ker(w)/ex=0\}=\{x \in A/w(x)=0 \text{ y } ex=0\}$, entonces $A=Ke \oplus U \oplus V$.

Si $n:=dim(Ker(w))$, $r:=dim(U)$ y $s:=dim(V)$, decimos que A es de tipo $(1+r, s)$. En [2] está demostrado que para cualquier descomposición de n en la forma $r+s$, existe un álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$.

DEFINICION 3:

Sea (A, w) un álgebra ponderada sobre K. Decimos que (A, w) es un ALGEBRA NORMAL ssi $x^2y = w(x)xy$ $\forall x, y \in A$.

Observemos que si A es un álgebra normal y $x \in A$ entonces $(x^2)^2 = x^2 \cdot x^2=w(x)x \cdot x^2=w(x)(x^2 \cdot x)=w(x)(w(x)x \cdot x)=w(x)^2x^2$ es decir, A es un algebra de Bernstein.

DEFINICION 4:

Sea A un algebra sobre K. Decimos que A es un ALGEBRA DE JORDAN ssi $x^2(yx) = (x^2y)x \ \forall x, y \in A$.

Notemos que toda álgebra Normal es de Jordan, porque $x^2(yx) = (w(x)x)(xy) = w(x)(xy)x = (x^2y)x \ \forall x, y \in A$

En [1] se demuestra la siguiente proposición :

PROPOSICION 1:

Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ una K-álgebra de Bernstein. Entonces:

A es un álgebra de Jordan ssi $\forall u_i \in U, v_i \in V$ se cumple

1.1 $v_1v_2 = 0$

1.2 $(u_1v_1)v_2 + (u_1v_2)v_1 = 0$

1.3 $(u_1u_2^2)v_1 + 2((u_1v_1)u_2)u_1 = 0$

1.4 $((u_1v_1)v_2)v_1 = 0$

1.5 $(u_1u_2^2)u_1 = 0$

1.6 $((u_1v_1)v_2)u_1 = 0$

CARACTERIZACIONES

Para mejorar la proposición 1 usaremos los dos lemas siguientes:

LEMA 1:

Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ una K-álgebra de Bernstein, entonces $\forall u_i \in U, \ v_i \in V$:

a) $u_1u_2^2 + 2(u_1u_2)u_1 = 0$

b) $u_1(u_2v_1) + u_2(u_1v_1) = 0$

c) $(u_1v_1)(u_1v_2) = 0$

d) $u_1(v_2(u_1v_1)) = 0$

e) $(u_1u_2^2)u_1 = 0$.

DEMOSTRACION:

Recordemos que (a), (b) y (c) son parte del Lema 2 que aparece en [1]. Para las dos últimas afirmaciones notemos que:

d) En (b) sustituimos v_1 por v_2 y u_2 por u_1v_1 obteniendo $u_1((u_1v_1)v_2) + (u_1v_1)(u_1v_2) = 0$, pero $(u_1v_1)(u_1v_2) = 0$, por (c), luego $u_1(v_2(u_1v_1)) = 0$.

e) En (b), ahora sustituimos v por u_1^2, obteniendo $u_1(u_2u_1^2) + u_2(u_1u_1^2) = 0$. Pero en toda álgebra de Bernstein tenemos que $u^3 = 0$ para cualquier $u \in U$, luego $u_1(u_2u_1^2)=0$, es decir vale (e).

LEMA 2:

Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ un álgebra de Bernstein sobre K, en que $v(vu)=0$ $\forall u \in U$, $v \in V$. Entonces son válidas las siguientes igualdades $\forall u_i \in U$, $v_i \in V$:

i) $(u_1v_1)v_2+(u_1v_2)v_1 = 0$

ii) $(u_1u_2^2)v_1+2((u_1v_1)u_2)u_1 = 0$

iii) $((u_1v_1)v_2)v_1 = 0$

DEMOSTRACION:

i) Haciendo $v=v_1+v_2$, obtenemos $0=(u(v_1+v_2))(v_1+v_2)= =(uv_1)v_2+(uv_2)v_1+(uv_2)v_2$, pero $(uv_i)v_i = 0$ para cualquier $v_i \in V$, luego vale (i)

ii) Observemos que $(u_1u_2^2)v_1 + 2((u_1v_1)u_2)u_1 =$ $= -u_1^2(u_2v_1)+2((u_1v_1)u_2)u_1 = -u_1^2(u_2v_1)-2((u_2v_1)u_1)u_1 = 0$. Estas igualdades están justificadas por (i), (b) y (a) anteriores.

iii) Por (i) tenemos que $(u_1v_1)v_2 = -(u_1v_2)v_1$, luego $((u_1v_1)v_2)v_1 = -((u_1v_2)v_1)v_1 = 0$

PROPOSICION 2:

Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ un álgebra de Bernstein sobre K, entonces A es un álgebra de Jordan ssi $V^2=0$ y $v(vU)=0 \quad \forall v \in V$.

PROPOSICION 3:

Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ un álgebra de Bernstein sobre K, entonces A es Normal ssi $V^2=0$ y $UV=0$

DEMOSTRACION:

Sean $x = \alpha e + u_1 + v_1 \in A$, $y = \beta e + u_2 + v_2 \in A$. Recordando que $ev_i = 0$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, $u_i v^2_j = 0$ obtenemos que

$$x^2 y = \alpha^2 \cdot \beta \cdot e + \left[\tfrac{1}{2}\alpha^2 u_2 + u_1^2 u_2 + u_1^2 v_2 + \tfrac{1}{2}\beta v_1^2 + v_1^2 v_2 + \tfrac{1}{2}\alpha\beta u_1 + \alpha u_1 v_2 + \tfrac{1}{2}\beta u_1 v_1 + 2(u_1 v_1)v_2 \right] + \left[\alpha u_1 u_2 + 2(u_1 v_1)u_2 \right]$$ y además

$$w(x)xy = \alpha^2 \cdot \beta \cdot + e \left[\tfrac{1}{2}\alpha^2 u_2 + \tfrac{1}{2}\alpha\beta u_1 + \alpha u_1 v_2 + \alpha v_1 u_2 + \alpha v_1 v_2 \right] + \left[\alpha u_1 u_2 \right]$$

Luego A es normal si y sólo si

$$u_1^2 u_2 + u_1^2 v_2 + \tfrac{1}{2}\beta v_1^2 + v_1^2 v_2 + \tfrac{1}{2}\beta u_1 v_1 + 2(u_1 v_1)v_2 = \alpha v_1 u_2 + \alpha v_1 v_2$$

$$2(u_1 v_1)v_2 = 0$$

si y sólo si

$$u_1^2 u_2 + u_1^2 v_2 + v_1^2 v_2 + 2(u_1 v_1)v_2 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}v_1^2 + \tfrac{1}{2}u_1 v_1 = 0$$

$$v_1 u_2 + v_1 v_2 = 0 \qquad (\#)$$

$$(u_1 v_1)v_2 = 0$$

En la tercera igualdad de (#) podemos hacer $u_2 = 0$, obteniendo $v_1 v_2 = 0$ y con $v_2 = 0$ se obtiene $v_1 u_2 = 0$. Es decir (#) implica que $V^2=0$ y que $UV=0$. El recíproco es inmediato usando las propiedades $U_2 \subseteq V$, $V^2 \subseteq U$ y $UV \subseteq U$ válidas en toda álgebra de Bernstein.

COLORARIO:

Toda K-álgebra Normal es una K-álgebra de Jordan.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.WORZ-BUSEKROS, BERNSTEIN algebras. Arch. Math. Vol.48,388398(1987).

[2] A.WORZ-BUSEKROS, Further remarks on Bernstein algebras. London Math. Soc. (submitted).