INTEGRABILIDAD Y BIFURCACION DE HOPF EN SISTEMAS HAMILTONIANOS EN $\mathbb{R}^4$(*)

JORGE BILLEKE G.(1) - HYRNA WALLACE C.(2)

RESUMEN. En este trabajo se estudia la integrabilidad de la deformación versal de un Sistema Hamiltoniano lineal de tipo Hopf, es decir, una resonancia no-semisimple (1;-1). Para cada elemento de la deformación versal se encuentra una familia a 2-parámetros de integrales primeras, del mismo tipo de la deformación versal.

---

(1) Pontificia Universidad Católica de Chile. Sede Regional Talcahuano. Casilla 127-Talcahuano, Chile.

(2) Universidad de Concepción. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática casilla 2017-Concepción, Chile.

* Proyecto parcialmente financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad de Concepción Nº20.12.14.

§1. BIFURCACION DE HOPF EN SISTEMAS HAMILTONIANOS.

1.1 Sea $(\mathbb{R}^4, w, H)$ Sistema Hamiltoniano, con w forma simpléctica canónica, es decir si $(x,y)\in\mathbb{R}^4$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $w=dx_1\wedge dy_1 + dx_2\wedge dy_2$, $H\in C^\infty(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$ función Hamiltoniana, $X_H(x,y)$ campo vectorial Hamiltoniano asociado, es decir $X_H(x,y)=J\cdot dH(x,y)$

con $J=\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix}$ donde I_2 es la matriz unidad en $M(2,\mathbb{R})$.

Supongamos $H(x,y)$ función cuadrática, entonces $X_H(x,y)$ es un campo lineal.

$X_H(x,y)=B\binom{x}{y}$ $B\in sp(2,\mathbb{R})$, $sp(2,\mathbb{R})=\{B\in gl(4,\mathbb{R})/B^tJ=-JB\}$ algebra de Lie de las matrices infinitesimalmente simplécticas, con grupo de Lie $Sp(2,\mathbb{R})=\{A\in GL(4,\mathbb{R})/A^tJA=J\}$ de las matrices simplécticas.

Si $B\in sp(2,\mathbb{R})$ y λ es un valor propio de B, entonces

$-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ son valores propios de B de las mismas multiplicidad de λ. Nos interesa el caso de valores propios puramente imaginarios, y en este caso se tienen las siguientes formas normales.

1.2. Proposición. Existe cambio de coordenadas simpléctico en $\mathbb{R}^4$ tal que B en la nueva base tiene la forma

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ no nulos}$$

o bien

$$(2)\quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \varepsilon & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha\neq 0,\ \varepsilon=\pm 1$$

con Hamiltonianos cuadráticos

$$H_1(x,y)=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)+\lambda_2(x_2^2+y_2^2) \text{ ó bien}$$

$$H_2(x,y)=\alpha(x_1y_2-x_2y_1)-\frac{\varepsilon}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

DEFINICION. El sistema (1) se dice en **resonancia** si existen p, q enteros relativamente primos, $p > 0$ tal que $q\lambda_1-p\lambda_2=0$. En tal caso se habla de una **resonancia del tipo (p;q).**
El sistema (2) siempre está en resonancia y se llama **resonancia del tipo no-semisimple (1;-1).** (Esto está motivado considerando los valores propios $i\alpha$, $-i\alpha$ de la parte semisimple

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando $\lambda_1=\lambda_2$ en (1) la resonancia se llama **semisimple** (1; 1)
Cuando $\lambda_1=-\lambda_2$ en (1) la resonancia se llama **semisimple** (1; -1).

1.3. **TEOREMA.** Exceptuando las resonancias semisimple(1;1) y semisimple (1;-1) las matrices (1) y (2) tienen las siguientes deformaciones versales dentro de sp(2,IR).

$$(3)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1+\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2+\mu_2 \\ -\lambda_1-\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-\mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

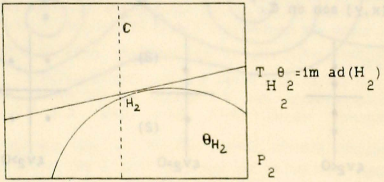
$$(4)\quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha-\nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \alpha+\nu_1 & 0 & 0 & \nu_2 \\ \varepsilon & 0 & 0 & -\alpha-\nu_1 \\ 0 & \varepsilon & \alpha+\nu_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R},\ \varepsilon=\pm 1$$

Para la resonancia semisimple (1;-1) se puede tomar ξ como parámetro. (Para las resonancias semisimple (1;1) y semisimple (1;-1) el desdoblamiento versal necesita más de dos parámetros).

DEMOSTRACION. Demostremos el caso que nos interesa, es decir el no-semisimple (1;-1). El otro caso es más o menos análogo. Sea P_2=Espacio de polinomios homogéneos cuadráticos en $\mathbb{R}^4$.

Para $H_2(x,y)=\alpha(x_1y_2-x_2y_1)-\frac{\xi}{2}(x_1^2+x_2^2)$ definamos el siguiente endomorfismo $ad(H_2):P_2 \to P_2$, $P \mapsto ad(H_2)(P) = \{H_2,P\}$, donde $\{H_2,P\}:=w(X_p,X_{H_2})$ es el paréntesis de Poisson.
El grupo de Lie $Sp(2,\mathbb{R})$ actúa sobre P_2 por composición, $Sp(2,\mathbb{R})\times P_2 \to P_2; (A,P) \mapsto P\circ A$.
Sea θ_{H_2}= Orbita de H_2 bajo la acción de $Sp(2,\mathbb{R})$=

$\{\{H_2,P\}/P\in P_2\}$.
Para determinar un desdoblamiento hay que determinar un complementario de la imagen de la adjunta H_2



Van de Meer en [1], calcula en forma general estos complementarios y obtiene:
C=Complemento de Im ad(X) en Ker ad(S), donde

$$X=\tfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$S=x_1y_1-x_2y_2$$

ξX corresponde a la parte nilpotente en la descomposición de (2) y αS corresponde a la parte semisimple.
ad (S): $P_2 \to P_2$ es un endomorfismo y Ker ad(S) es una subalgebra de Lie de P_2 isomorfa al centralizador de X_s en $Sp(2,\mathbb{R})$. Además Ker ad(S) está generado por:

$$S = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$X = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

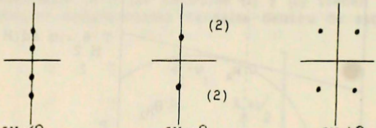
$$Y = \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

$$Z = x_1y_1 + x_2y_2$$

Los polinomios X,Y,Z generan una subalgebra de Lie isomorfa a $sl(2,\mathbb{R}) = \{A \in gl(2,\mathbb{R}) / \text{traza } A = 0\}$, donde X e Y son los generadores nilpotentes. Luego la representación adjunta de Ker ad(S) es isomorfa a $sl(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ donde ad(X) y ad(Y) corresponden a los generadores nilpotentes de $sl(2,\mathbb{R})$. Además, $P_2 = \text{Ker ad}(x) \oplus \text{Im ad}(Y) = \text{Ker ad}(Y) \oplus \text{Im ad}(x)$. Lo que implica $C = \text{Ker ad}(S) \cap \text{Ker ad}(Y)$. Luego el desdoblamiento de H_2 está dado por

$$H_v(x,y) = (\alpha + v_1)(x_1y_2 - x_2y_1) - \frac{\xi}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{v_2}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

1.4. DEFINICION. Los autovalores de la matriz infinitesimalmente simpléctica $DX_{H_v}(O)$ asociada a $H_v(x,y)$ son en $\mathbb{C}$.



$\xi v_2 < 0$ $\quad$ $\xi v_2 = 0$ $\quad$ $\xi v_2 > 0$

Que es la transición de un conducta elíptica a una hiperbólica. Esta bifurcación se llama Bifurcación de Hopf Hamiltoniana.

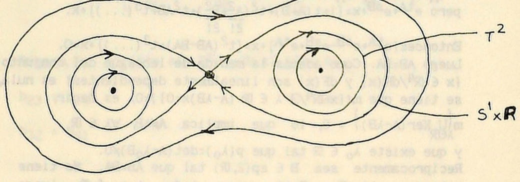
S2. SISTEMAS LINEALES DE HOPF INTEGRABLES.

2.1. DEFINICION. Sean F, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ se dicen en involución si $\{F,G\} = w(X_G, X_F) = 0$. Y se dicen independientes si $m(\{x \in \mathbb{R}^4 / df$ y dG son linealmente dependientes$\}) = 0$, donde m es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^4$.
Un sistema Hamiltoniano $(\mathbb{R}^4, w, H)$ se dice integrable si existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ en involución e independiente con H.

Por Teorema de Arnold-Kolmogorov-Moser, [2], estos sistemas tienen una geometría bastante simple: Para casi todo $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, los conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R}^4 / H(x)=c_1, F(x)=c_2\}$ intersecciones de hipersuperficies de nivel, son variedades diferenciables de dimensión 2, cuyas componentes conexas compactas son toros, T^2 y las no compactas son cilindros $S^1 \times \mathbb{R}$. Estas variedades son invariantes por el flujo X_H (y por supuesto X_F) y sobre ellas existen coordenadas simplécticas (l_i, θ_i) i=1,2 tal que el sistema $(\mathbb{R}^4, w, H)$ toma la forma

$$\frac{dl_i}{dt} = 0$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = w_i(l_1, l_2) \quad i=1,2$$



2.2 Demostraremos que los sistemas Hamiltonianos $(\mathbb{R}^4, w, H_v)$ dados en 1.3 son integrables, lo que muestra que dentro de la deformación versal en $sp(2,\mathbb{R})$ de la resonancia no-semisimple (1; -1) los campos Hamiltonianos lineales que aparecen son todos integrables, en particular la bifurcación de Hopf dentro de los Hamiltonianos lineales es integrable.

Observemos que si $(\mathbb{R}^4, w, H)$ es un sistema lineal Hamiltoniano entonces $DX_H(0) \in sp(2,\mathbb{R})$ y recíprocamente, dado $A \in sp(2,\mathbb{R})$, entonces existe $H \in P_2$ (no necesariamente única)

tal que $A\binom{x}{y} = JdH\binom{x}{y}$. Denotemos esta igualdad como $A=JdH$.
El isomorfismo natural entre las algebras de Lie$(P_2, \{\ \})$ con $(sp(2,\mathbb{R}), [\ ,\ ])$ se traduce en el siguiente lema.

LEMA. Sea $(\mathbb{R}^4, w, H)$ sistema lineal Hamiltoniano en $\mathbb{R}^4$. Entonces denotando por $A=JdH$ se tiene : $(\mathbb{R}^4, w, H)$ es integrable $\Longleftrightarrow$ existe $B \in sp(2,\mathbb{R})$ tal que $AB=BA$, $A \neq \lambda B$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(\lambda)=\det(A-\lambda B)$ no es identicamente nulo.

DEMOSTRACION. Supongamos $F \in P_2$ es una integral primera de $(\mathbb{R}^4, w, H)$ entonces X_F es un campo lineal Hamiltoniano y la matriz $B:=JdF \in sp(2,\mathbb{R})$. Además como el flujo de X_H es $\varphi_H^t(x)=e^{tA}\cdot x$ y el flujo de X_F es $\varphi_F^s(x)=e^{sB}\cdot x$, $t, s \in \mathbb{R}$, tenemos por ser integral primera $\{X_H, X_F\}=0$
$\Rightarrow \varphi_H^t \cdot \varphi_F^s(x)=\varphi_F^s \cdot \varphi_H^t(x)$, es decir $e^{tA}\cdot e^{sB}\cdot x=e^{sB}\cdot e^{tA}\cdot x$;
pero $e^{tA}\cdot e^{sB}\cdot x=[1+t(A+B)+t^2(\frac{A^2}{2!}+\frac{B^2}{2!})+t^2AB+t^3(\dots)]\cdot X$.

Entonces$\{e^{tA}\cdot e^{sB}-e^{sB}\cdot e^{tA}\}\cdot x=[t^2(AB-BA)+t^3(\dots)]\cdot x=0$.
Luego $AB=BA$. Como además la medida de lebesgue del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^4/dH(x)$ y $dF(x)$ son linealmente dependientes$\}$ es nula, se tiene que $m(\{x\in\mathbb{R}^4/\exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ (A-\lambda B)x=0\})=0$, es decir, $m\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} Ker(A-\lambda B)\right) = 0$, lo que implica $A\neq\lambda B$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ y que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\lambda_0)=\det(A-\lambda_0 B)\neq 0$.
Recíprocamente sea $B \in sp(2,\mathbb{R})$ tal que $AB=BA$. Se tiene entonces $tA\cdot sB = sB\cdot tA$ para todo $t, s, \in \mathbb{R}$; luego

$e^{tA}\cdot e^{sB}= e^{tA+sB}= e^{sB+tA}= e^{sB}\cdot e^{tA}$ lo que implica que el campo $Y(x)$: $B\cdot x$ es tal que $[X_H, Y]=0$, y por la observación anterior existe $F\in P_2$ tal que $B=J\cdot dF$, por lo tanto $\{F,H\}=0$.
Por otro lado como
$\{x \in \mathbb{R}^4/\exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ dH(x)=\lambda dF(x)\}=\{x \in \mathbb{R}^4/\exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ Ax=\lambda Bx\}$
$=\{x \in \mathbb{R}^4/\exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ x \in Ker(A-\lambda B)\} = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} Ker(A-\lambda B)$

entonces $m\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} Ker(A-\lambda B)\right)=0$, pues como $A\neq\lambda B$, $\forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}} Ker(A-\lambda B) \leq 3$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, y además $p(\lambda)$ no es identicamente nulo, por lo tanto, tiene a lo más cuatro ceros, lo que implica que a lo más existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ $\in\mathbb{R}$ tal que $\dim_{\mathbb{R}} Ker(A-\lambda_i B)\leq 3$, $i=1,\dots,4$.
Lo que demuestra lo afirmado.

2.3. Apliquemos el lema:

$$\text{Sean } A=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha-v_1 & v_2 & 0 \\ \alpha+v_1 & 0 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha+v_1 \\ 0 & 1 & \alpha+v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$B\in sp(2,\mathbb{R})$, sí sólo sí, $B^tJ=-JB$, sí sólo sí

$b_{23}=b_{14}$

$b_{32}=b_{41}$

y

$$\begin{bmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{sí sólo sí}\quad \begin{matrix} b_{33}=-b_{11} & b_{44}=-b_{22} \\ b_{43}=-b_{12} & b_{23}=b_{14} \\ b_{34}=-b_{21} & b_{32}=b_{41} \end{matrix}$$

Luego $AB=BA$ sí sólo sí llamando $a=a+v_1$, $v=v_2$

$-ab_{21}+Vb_{31}$	$=ab_{12}+b_{13}$	$-ab_{14}-vb_{11}$	$=vb_{11}+ab_{14}$
$ab_{11}+vb_{32}$	$=ab_{22}+b_{14}$	$ab_{13}-vb_{12}$	$=vb_{21}+ab_{24}$
$b_{11}-ab_{32}$	$=ab_{32}-b_{11}$	$b_{13}+ab_{12}$	$=vb_{31}-ab_{21}$
$b_{21}+ab_{31}$	$=ab_{42}-b_{12}$	$b_{14}-ab_{11}$	$=vb_{32}-ab_{22}$
$-ab_{22}+vb_{32}$	$=-ab_{11}+b_{14}$	$-ab_{24}-vb_{21}$	$=vb_{12}-ab_{13}$
$ab_{12}+vb_{42}$	$=-ab_{21}+b_{24}$	$ab_{24}-vb_{22}$	$=vb_{22}-ab_{14}$
$b_{12}-ab_{42}$	$=-ab_{31}-b_{21}$	$b_{24}-ab_{21}$	$=vb_{42}+ab_{12}$
$b_{22}+ab_{32}$	$=-ab_{32}-b_{22}$		

En términos de matriz de coeficientes

b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{21}	b_{22}	b_{24}	b_{31}	b_{32}	b_{42}
0	a	1	0	a	0	0	-v	0	0
a	0	0	-1	0	-a	0	0	v	0
2	0	0	0	0	0	0	0	-2a	0
0	1	0	0	1	0	0	a	0	-a
0	a	0	0	a	0	-1	0	0	v
0	0	0	0	0	2	0	0	2a	0
-2v	0	0	-2a	0	0	0	0	0	0
0	-v	a	0	-v	0	-a	0	0	0
0	0	0	2a	a	-2v	0	0	0	0

y haciendo transformaciones elementales, obtenemos dos coeficientes independientes:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -b_{21} & vb_{42} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & vb_{42} \\ b_{42} & 0 & 0 & -b_{21} \\ 0 & b_{42} & b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la integral primera F debe satisfacer

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(x,y)=-b_{21}x_2+vb_{42}y_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2}(x,y)=b_{21}x_1-vb_{42}y_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,y)=-b_{42}x_1+b_{21}y_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x,y)=-b_{42}x_2-b_{21}y_1$$

Entonces $F(x,y)=\frac{1}{2}vb_{42}y_1^2-b_{21}x_2y_1+G(x_1,x_2,y_2)$.

Como $\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1,x_2,y_2)=\frac{\partial F}{\partial y_2}(x,y)=b_{21}x_1-vb_{42}y_2$

tenemos $G(x_1,x_2,y_2)=b_{21}x_1y_2+\frac{1}{2}vb_{42}y_2^2+l(x_1,x_2)$, es decir

$F(x,y)=\frac{1}{2}vb_{42}(y_1^2+y_2^2)+b_{21}(x_1y_2-x_2y_1)+l(x_1,x_2)$.

Como $\frac{\partial F}{\partial x_1}=b_{21}y_2+\frac{\partial l}{\partial x_1}=-b_{42}x_1+b_{21}y_2$

implica $l(x_1,x_2)-\frac{b_{42}x_1^2}{2}+K(x_2)$.

También $\frac{\partial F}{\partial x_2}=-b_{21}y_1+\frac{\partial l}{\partial x_2}=-b_{42}x_2-b_{21}y_1$ implica

$\frac{dk}{dx_2}=-b_{42}x_2$, por tanto $K(x_2)=-\frac{1}{2}b_{42}x_2^2$

Quedando finalmente la integral primera

$$F(x,y)=-\tfrac{1}{2}b_{42}(x_1^2+x_2^2)+\tfrac{1}{2}vb_{42}(y_1^2+y_2^2)+b_{21}(x_1y_2-x_2y_1)$$

que es el mismo tipo de 1.3 con $b_{42}, b_{21} \in \mathbb{R}$.
Luego fijados v_1, v_2 en la deformación versal lineal de $H_2(x, y)$ obtenemos una familia a dos parámetros de integrales primeras para el Hamiltoniano $H_v(x, y)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Van de Meer : The Hamiltonian Hopf Bifurcation, Tesis, Utrecht 85.
[2] V. I. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, 1978.