

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE CAMPOS POLINOMIALES

$$(y-f(x))\frac{\partial}{\partial x} + (-x+g(x,y))\frac{\partial}{\partial y}, \text{ PROBLEMAS DE ESTABILIDAD}$$
Y EJEMPLOS.¹

por

J. Billeke G H. Burgos V

RESUMEN. En este trabajo se estudian problemas de estabilidad de campos de vectores en el plano, $(y-f(x))\frac{\partial}{\partial x} + (-x+g(x,y))\frac{\partial}{\partial y}$, donde f y g son polinomios con grado de $f(x)$ mayor o igual al grado de $g(x,y)$, (para $g(x) = 0$ la ecuación diferencial asociada es de tipo Liénard).

Se analizan singularidades, órbitas periódicas, conductas en el infinito y bifurcaciones genéricas

1.-INTRODUCCION. Sea $X^{fg}(x,y)$ una familia a N -parámetros de campos de vectores en \mathbb{R}^2 dada por el sistema

$$1) \begin{cases} \dot{x} = P(x,y) = y-f(x) \\ \dot{y} = Q(x,y) = -x+g(x,y) \end{cases}$$

Donde $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$$g(x,y) = \sum_{i+j=1}^m b_{i,j} x^i y^j \quad a_i, b_{i,j} \in \mathbb{R}, \text{ parámetros } m \leq n$$

$$N = n + \frac{m(m+3)}{2}.$$

Si $g = 0$, entonces $X^{f_0}(x,y)$ es una ecuación de Liénard de grado $n \geq 3$, en el plano cuya conducta cualitativa se conoce al menos para $n \leq 5$, a_1 pequeños. ([1],[2],[3]). Entonces $X^{fg}(x,y)$ es una perturbación de $X^{f_0}(x,y)$ en la dirección $g(x,y) \frac{\partial}{\partial y}$. Deseamos estudiar la dinámica de $X^{fg}(x,y)$ en función de los coeficientes a_1, b_{1j} .

El sistema (1) es equivalente a estudiar la ecuación de segundo orden $\ddot{x} = -x - f'(x)\dot{x} + g(x, \dot{x} + f(x))$, que no es en general de tipo Liénard salvo si $b_{1j} = 0$ para todo $j \neq 0$. Entonces interesa en particular estudiar la dinámica de (1) para

$$g(x,y) = g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m.$$

2.-SINGULARIDADES.

2.1.-Comencemos estudiando el conjunto de singularidades del sistema (1) y su dependencia respecto de los parámetros. Sea $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / X^{fg}(x,y) = (0,0)\}$ el conjunto de singularidades de $X^{fg}(x,y)$.

$(x,y) \in \Sigma$ si y sólo si $y=f(x)$ y x es solución de la ecuación polinomial de grado nm : $G(x) = -x + g(x, f(x)) = 0$

Las $k+r+1 \leq nm$ raíces reales de $G(x)$ se pueden ordenar de la siguiente manera

$$x_{-k} < x_{-k+1} < x_{-k+2} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r ; x_0 = 0$$

Llamemos $p_i := (x_i, f(x_i))$ a los $r+k+1$ elementos de Σ

2.2.-Observaciones.

1) Si $g=0$, entonces $\Sigma = (p_0)$ y $p_0 = (0,0)$ es un foco hiperbólico si $a_1 \neq 0$, y es un foco débil de orden s si $a_1 = a_2 = \dots = a_{2s-1} = 0$ y $a_{2s} \neq 0$

2) Si $b_{0m} \neq 0$ y definiendo $\|g\| = \max\{b_{1j}\}$, se tiene:

a) Para nm impar:

Si $b_{0m} a_n < 0$, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\Sigma = (p_0)$ para todo $g(x,y)$ con $\|g\| < \epsilon_0$.

Si $b_{0m} a_n > 0$, entonces cuando $\|g\| \rightarrow 0$ existen x_r y x_{-k} y $x_r \rightarrow \infty, x_{-k} \rightarrow -\infty$

b) Para nm par:

Si $b_{0m} a_n < 0$, entonces cuando $\|g\| \rightarrow 0$, existe x_{-k} y $x_{-k} \rightarrow -\infty$

Si $b_{0m} a_n > 0$, entonces cuando $\|g\| \rightarrow 0$, existe x_r y $x_r \rightarrow +\infty$

c) Existen resultados análogos a 2) cuando $g(x, y) = g(x)$

2.3) Notación. $g_{x^i y^j}(a, b)$ significará $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} g(a, b)$

2.4) Definición. Σ se dice de tipo generico si para todo $(x, f(x)) \in \Sigma$ se tiene:

i) $G'(x) > 0$, o bien ii) $G'(x) < 0$ y $f'(x) \neq g_y(x, f(x))$

2.5) Observaciones. Si Σ es de tipo genérico, entonces:

1) Las curvas $P^{-1}(0)$ y $Q^{-1}(0)$ se cortan transversalmente en p_i , para todo $i = -k, -k+1, \dots, r-1, r$.

2) Los elementos $p_i \in \Sigma$ son todas singularidades hiperbólicas y tenemos:

Si $G'(x_i) > 0$ entonces p_i es una silla

Si $G'(x_i) < 0$ y $f'(x) - g_y(x_i, f(x_i)) > 0$ entonces p_i es un atractor.

Si $G'(x_i) < 0$ y $f'(x) - g_y(x_i, f(x_i)) < 0$ entonces p_i es un repulsor.

Además si $[g_y(x_i, f(x_i)) - f'(x_i)]^2 + 4G'(x_i) < 0$, entonces p_i es un foco.

En particular el origen es un foco si $a_1 b_{01} + b_{10} < 1$ y $[b_{01} + a_1]^2 + 4(b_{10} - 1) < 0$. Este foco es atractor si $b_{01} < a_1$ y repulsor si $b_{01} > a_1$.

Si $b_{01} = a_1$ el origen no es una singularidad hiperbólica, en general es un foco débil cuya debilidad depende de los coeficientes superiores

3) Si los polinomios (\hat{f}, \hat{g}) están próximos de los polinomios (f, g) en la topología de \mathbb{R}^n , entonces $\hat{\Sigma}$ el conjunto de las singularidades de $X^{\hat{f}\hat{g}}(x, y)$ tiene la misma cardinalidad que Σ y los elementos p_i, \hat{p}_i son del mismo tipo (por C^0 -conjugación local).

4) Los coeficientes $(a_1, a_2, \dots, b_{0m}) \in E$ donde $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un

abierto y denso definido por:

$$E = \{(a_1, \dots, b_{o_m}) \in \mathbb{R}^n / \Sigma \text{ es de tipo genérico} \}$$

5) Sea $c = r+k+1$ el cardinal de Σ .

Si nm es par, c también lo es y el número de sillas es $\frac{c}{2}$

Si nm es impar, c también lo es y el número de sillas es $\frac{c+1}{2}$, si $a_n b_{o_m} > 0$, ó bien $\frac{c-1}{2}$, si $a_n b_{o_m} < 0$. Las sillas se alternan con atractores y repulsores, o centros.

2.6) Supongamos ahora que Σ no es genérico y que la no genericidad de Σ es de la forma más simple posible.

a) Si $G'(x_i) = 0$ para algún $i = k, \dots, r$ y $f'(x_i) \neq g_y(x_i, f(x_i))$. Entonces podemos concluir:

i) La matriz $DX(p_i)$ es similar a la matriz

$$\begin{bmatrix} g_y(x_i, f(x_i)) - f'(x_i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Si $g_y(x_i, f(x_i)) \neq 0$, entonces las curvas $P^{-1}(0)$ y $Q^{-1}(0)$ son tangentes en p_i . En efecto, como $Q(x_i, f(x_i)) = 0$ y $Q_y(x_i, f(x_i)) = g_y(x_i, f(x_i)) \neq 0$, existe $h(x)$ función diferenciable definida en una vecindad de x_i , tal que $Q(x, h(x)) = 0$.

Además $h'(x) = \frac{1 - g_x(x_i, f(x_i))}{g_y(x_i, f(x_i))}$.

Entonces $G'(x_i) = 0 \iff h'(x_i) = f'(x_i) \iff P^{-1}(0)$ y $Q^{-1}(0)$ son tangentes en p_i .

De i) concluimos que p_i es una silla-nodo. Usemos ii) para hacer el retrato de fase de esta silla nodo:

El signo de \dot{y} en $P^{-1}(0)$ es el signo de $Q(x, f(x)) = -G(x)$ en una vecindad de x_i . Como $G'(x_i) = 0$, el signo de \dot{y} está dado por el signo de $G''(x_i)$.

Si $G''(x_i) > 0 \rightarrow \dot{y} < 0$ en $P^{-1}(0)$

Si $G''(x_i) < 0 \rightarrow \dot{y} > 0$ en $P^{-1}(0)$

El signo de \dot{x} en $Q^{-1}(0)$ está determinado por la posición

relativa de las curvas $f(x)$ y $h(x)$ en una vecindad de x_1 .
 Sea $\lambda(x) = h(x) - f(x)$. Como: $\lambda(x_1) = h(x_1) - f(x_1) = 0$ y
 $\lambda'(x_1) = h'(x_1) - f'(x_1) = 0$ (por ii))
 Calculemos entonces $\lambda''(x_1)$.

$$h''(x_1) = - \left[\frac{Q_{xx} + h'(2Q_{xy} + Q_{yy} h')}{Q_y} \right]$$

Entonces por un cálculo

$$h''(x_1) = f''(x_1) + \frac{G''(x_1)}{g_y(x_1, f(x_1))}$$

$$\text{Entonces : } \lambda''(x) = G''(x) \frac{1}{g_y(x_1, f(x_1))}$$

Luego si:

$G''(x_1)g_y(x_1, f(x_1)) > 0 \rightarrow h(x) > f(x)$ en una vecindad de x_1

lo que implica que $y - h(x) < y - f(x)$, por lo tanto $\dot{x} > 0$ en $Q^{-1}(0)$

$G''(x_1)g_y(x_1, f(x_1)) < 0 \rightarrow h(x) < f(x)$ en una vecindad de

x_1 lo que implica que $y - h(x) > y - f(x)$, por lo tanto $\dot{x} < 0$ en $Q^{-1}(0)$

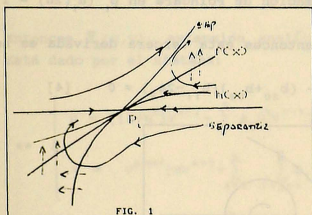


FIG. 1

$$f'(x) = h'(x) > 0$$

$$G''(x_1)g_y(x_1, f(x_1)) < 0$$

$$f'(x_1) \neq g_y(x_1, f(x_1))$$

Cuando $G'(x_1) = 0$ y $f'(x_1) = g_y(x_1, f(x_1))$, entonces esta silla-nodo degenera a una cúspide (de codimensión 2)

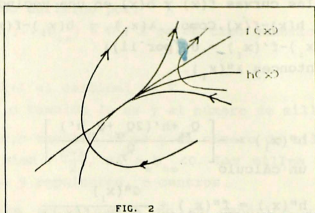


FIG. 2

b) Si $G'(x_1) < 0$ y $f'(x_1) = g_y(x_1, f(x_1))$, entonces $DX(p_1)$ es similar a la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-G'(x_1)} \\ \sqrt{-G'(x_1)} & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto p_1 es un foco débil, Además este foco débil es de orden 1 si y sólo si $\alpha_3(2\Pi) \neq 0$, donde $\alpha_3(2\Pi)$ es la tercera derivada de la transformación de Poincaré en p_1 ($\alpha_1(2\Pi) = 1$, $\alpha_2(2\Pi) = 0$).

Si p_1 es el origen p_0 , entonces esta tercera derivada es no nula si y sólo si:

$$b_{21} + 2(b_{03} - a_3) - 2a_2 b_{02} - (b_{20} + b_{02})(b_{11} - 2a_2) \neq 0 \quad [4]$$

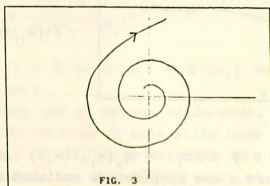


FIG. 3

3.- CONDUCTA EN EL INFINITO. El cambio de variables $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{y}{x}$, transforma el sistema (1) en

$$\hat{X}: \begin{cases} \dot{u} = -u^2 P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \\ \dot{v} = u Q\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - uv P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \end{cases}$$

Sea $\bar{X}_d(u, v)$ una extensión analítica a $u=0$ de $u^{n-1}\hat{X}(u, v)$. Es decir $\bar{X}(u, v)$ está dado por el sistema :

$$* \begin{cases} \dot{u} = u \left[-u^{n-1}v + \sum_{k=1}^n a_k u^{n-k} \right] \\ \dot{v} = u^{n-m} \left[-u^{m-1} + \sum_{k=1}^m \sum_{l+j=k} b_{l,j} u^{m-k} v^j \right] + v \left[-vu^{n-1} + \sum_{k=1}^n a_k u^{n-k} \right] \end{cases}$$

Análogamente el cambio de variables $u = \frac{x}{y}$; $v = \frac{1}{y}$, transforma el sistema (1) en:

$$X: \begin{cases} \dot{u} = vP\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uvQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \\ \dot{v} = -v^2Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \end{cases}$$

Entonces $\bar{X}_d(u, v)$, extensión analítica a $v=0$ de $v^{n-1}\hat{X}(u, v)$. Está dado por el sistema:

$$** \begin{cases} \dot{u} = \left[(1+u^2)v^{n-1} - \sum_{k=1}^n a_k u^k v^{n-k} \right] - uv^{n-m} \sum_{k=1}^m \sum_{l+j=k} b_{l,j} u^l v^{m-k} \\ \dot{v} = v^{n-m+1} \left[uv^{m-1} - \sum_{k=1}^m \sum_{l+j=k} b_{l,j} u^l v^{m-k} \right] \end{cases}$$

Las singularidades de X^{fg} en el infinito se obtienen de resolver $\bar{X}(0, v) = (0, 0)$ en (*) y $\bar{X}(u, 0) = (0, 0)$ en (**).

Caso $n > m$: Las singularidades en el infinito son en la esfera de Poincaré:

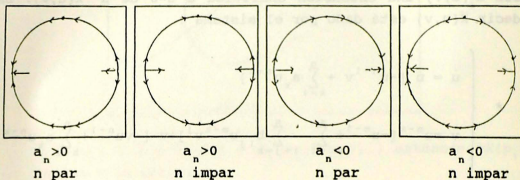
$$\begin{aligned} p_1 &= (1, 0) \text{ y } p_2 = (-1, 0) \\ q_1 &= (0, 1) \text{ y } q_2 = (0, -1) \end{aligned}$$

Que se obtienen directamente de (*) y (**), o bien por un simple cálculo, estas singularidades se obtienen de resolver

$\varphi(\theta)=0$, con:

$$\varphi(\theta) = \langle (-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta), (-a_n \text{cos}^n \theta, 0) \rangle = a_n \text{sen}\theta \text{cos}^n \theta.$$

Entonces X^{fg} en el ecuador de la esfera de Poincaré es:



(Fig 4)

Analicemos p_1, p_2 . Como \bar{X} está dado por el sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = a_n u + a_{n-1} u^2 + \dots + (a_1 - v) u^n \\ \dot{v} = a_2 v + (a_{n-1} + b_{n-2,1}) uv + \text{T.O.S} \end{cases}$$

Los p_i son singularidades hiperbólicas cuyo índice de estabilidad está dado por el signo de a_n y la paridad de n (ver fig. 4)

Analicemos q_1, q_2 . Como \bar{X} está dado por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = (1+u^2)v^{n-1} - \sum_{k=1}^n a_k u^k v^{n-k} - \sum_{\substack{l=0 \\ k=1}}^m b_{l, k-1} u^{l+1} v^{n-k} \\ \dot{v} = uv^n - \sum_{l, k=1}^m b_{l, k-1} u^l v^{n-k+1} \end{cases}$$

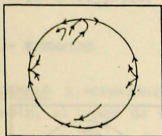
El origen es una singularidad no-hiperbólica (polinomios de grado $\geq n-m+1$). Observemos que:

$$\bar{X}(u, 0) = (-a_n u^n, 0)$$

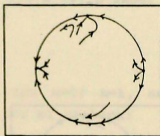
$$\bar{X}(0, v) = (v^{n-1}, -\sum_{k=1}^m b_{0k} v^{n-k+1})$$

Configuraciones en el infinito para $n > m$ y $b_{0m} \neq 0$

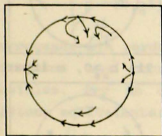
1) $a_n > 0, n$ par



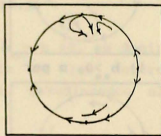
1) $b_{0m} > 0, m$ par



2i) $b_{0m} > 0, m$ impar

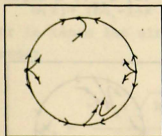


3i) $b_{0m} < 0, m$ par

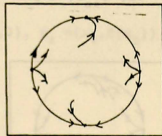


4i) $b_{0m} < 0, m$ impar

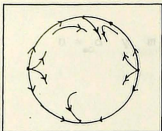
2) $a_n > 0, n$ impar



i) $b_{0m} > 0, m$ par



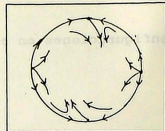
2i) $b_{0m} > 0, m$ impar



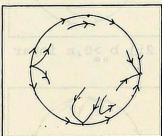
3i) $b_{0m} < 0, m$ par



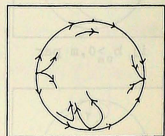
3) $a_n < 0, n$ par



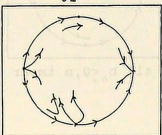
4i) $b_{0m} < 0, m$ impar



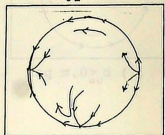
1) $b_{0m} > 0, m$ par



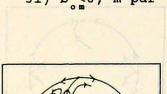
2i) $b_{0m} > 0, m$ impar



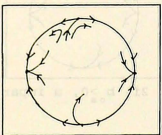
3i) $b_{0m} < 0, m$ par



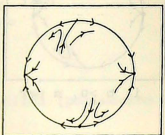
4i) $b_{0m} < 0, m$ impar



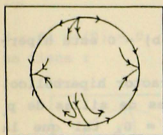
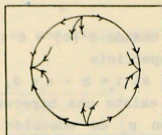
4) $a_n < 0, n$ impar



1) $b > 0, m$ par



2i) $b > 0, m$ impar

3i) $b < 0$, m par4i) $b < 0$, m impar

4.- EJEMPLOS

EJEMPLO 1.-Consideremos la ecuación (1) con $n=3$; $m=1$, es decir, el campo de vectores $X^{fg}(x,y)$ dado por el sistema:

$$X^{fg}: \begin{cases} \dot{x} = y - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = y - f(x) \\ \dot{y} = (b_{10}-1)x + b_{01}y = -x + g(x,y) \end{cases}$$

Supongamos sin perder generalidad $a_3=1$ y $b_{01} = b > 0$, es decir escojamos una conducta en el infinito de las cuatro posibles. Por un cambio de coordenadas, estudiaremos el sistema equivalente:

$$X^{fg}: \begin{cases} \dot{x} = y - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = y - f(x) \\ \dot{y} = -x + by = -x + g(x,y) \end{cases}$$

Por 2.1) sabemos que (x,y) es una singularidad de X^{fg} si y sólo si

$$G(x) = (ba_1-1)x + ba_2x^2 + bx^3 = 0.$$

Por lo tanto las singularidades son $p_0=(0,0)$, $p_{\pm}=(x_{\pm}, f(x_{\pm}))$ donde:

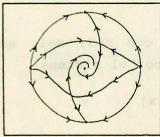
$$x_{\pm} = \frac{-ba_2 \pm \sqrt{b^2a_2^2 - 4b(ba_1-1)}}{2b}$$

1.- Si $G'(0) < 0$, entonces p_0 es un foco y p_{\pm} son sillars hiperbólicas que nacen en las singularidades q_1, q_2 en el infinito, es decir $x_{\pm} \rightarrow \pm \infty$ cuando $b \rightarrow 0$.

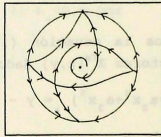
Sin perder generalidad supongamos $a_2 > 0$, entonces cuando $G'(0) \rightarrow 0$ colapsan p_0 con p_{\pm} en el origen en una silla nodo

(cuando $G'(0) = 0$). Sea $\rho_0 = \rho_0(a_1, a_2, a_3, b) = 0$ esta hipersuperficie

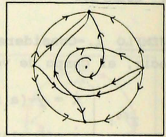
i) Si $\tau_0 = b - a_1 < 0$, entonces p_0 es un atractor hiperbólico, y existe una hipersuperficie de conexiones de sillas de p_+ con p_- de ecuación $\mu_0 = \mu_0(a_1, a_2, a_3, b) = 0$, tal que la secuencia de bifurcación (genérica) es:



$\mu_0 < 0$

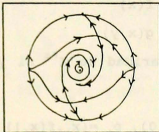


$\mu_0 = 0$

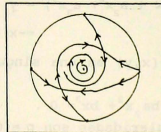


$\mu_0 > 0$

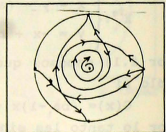
ii). Si $\tau_0 = b - a_1 > 0$, entonces p_0 es un repulsor hiperbólico y existe una hipersuperficie de autoconexiones de sillas de ecuación: $\lambda_0 = \lambda_0(a_1, a_2, a_3, b) = 0$, tal que la secuencia de bifurcación (genérica) es:



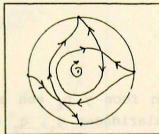
$\mu_0 < 0, \lambda_0 < 0$



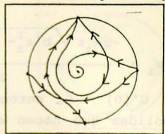
$\mu_0 = 0, \lambda_0 < 0$



$\mu_0 > 0, \lambda_0 < 0$

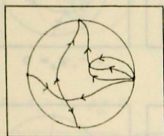
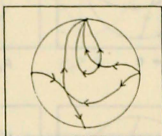


$\mu_0 > 0, \lambda_0 = 0$

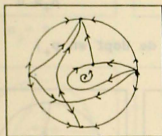
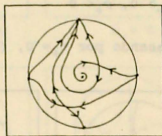


$\mu_0 > 0, \lambda_0 > 0$

2.- Si $G'(0) = 0$, es decir $\rho_0 = 0$, $p_0 = p_*$ es una silla nodo y se tiene :


 $\tau_0 < 0$

 $\tau_0 > 0$

3.- Si $G'(0) > 0$, es decir $\rho_0 > 0$. Entonces si τ_* es la hipersuperficie definida por traza $DX(p_*) = 0$, se tiene:


 $\tau_* < 0, (\tau_0 < 0)$

 $\tau_* > 0, (\tau_0 > 0)$

4). Existen además las siguientes hipersuperficies parametrizadas por (a_1, a_2, a_3, b) :

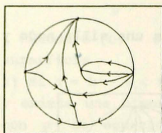
$\rho_+ = 0$, definida por las condiciones $\det DX(p_+) = 0$, y traza $DX(p_+) \neq 0$, que corresponde a una bifurcación de tipo silla-nodo donde colapsan p_- con p_+ y luego desaparecen

$\mu_+ = 0$; $\bar{\mu}_+ = 0$, (μ_+ conecta $W^u(p_-)$ con $W^s(p_0)$, y $\bar{\mu}_+$ conecta $W^u(p_0)$ con $W^s(p_-)$)

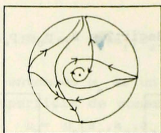
$\lambda_+ = 0$, Hipersuperficie de autoconexión de la silla p_- .

Los diagramas de bifurcación son entonces los siguientes:

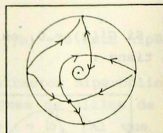
a).- Si $\tau_+ < 0$, $\rho_0 \geq 0$.



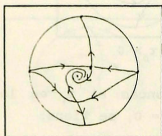
$$\rho_0 = 0$$



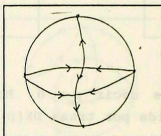
$$\rho_0 > 0, \mu_+ < 0$$



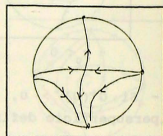
$$\mu_+ = 0$$



$$\mu_+ > 0, \rho_+ < 0$$

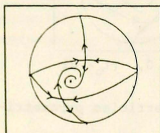


$$\rho_+ = 0$$

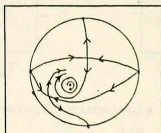


$$\rho_+ > 0$$

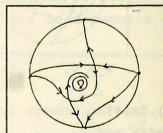
b).- Pasando por $\tau_+ = 0$, (bifurcación de Hopf en p_+)



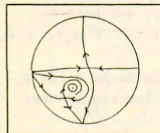
$$\mu_+ > 0, \rho_+ < 0, \tau_+ < 0$$



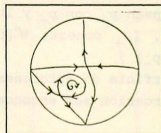
$$\tau_+ > 0, \bar{\mu}_+ < 0$$



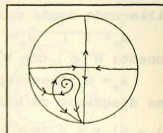
$$\tau_+ > 0, \bar{\mu}_+ = 0$$



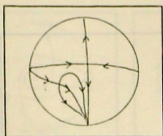
$$\tau_+ > 0, \bar{\mu}_+ > 0, \lambda_+ < 0$$



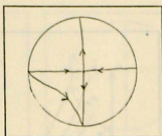
$$\lambda_+ = 0$$



$$\lambda_+ > 0, \rho_+ < 0$$

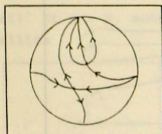


$$\rho_+ = 0$$

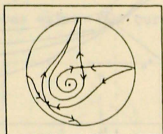


$$\rho_+ > 0$$

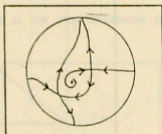
c).- Si $\tau_+ > 0$, $\rho_0 \geq 0$



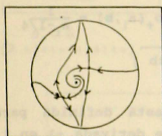
$$\rho_0 = 0$$



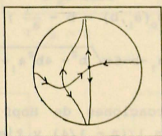
$$\rho_0 > 0, \bar{\mu}_+ < 0$$



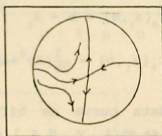
$$\bar{\mu}_+ = 0$$



$$\bar{\mu}_+ > 0, \rho_+ < 0$$



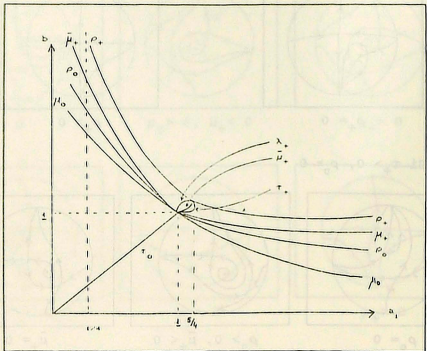
$$\rho_+ = 0$$



$$\rho_+ > 0$$

Observaciones:

- 1). Estas bifurcaciones ocurren genéricamente, es decir, siguiendo el principio de máxima simplicidad ocurren las bifurcaciones descritas más arriba.
- 2). En el caso $a < 0$, es similar, y aquí colapsan p_- con p_+ y por lo tanto existen análogamente las hipersuperficies ρ_- , τ_- , μ_- , $\bar{\mu}_-$, λ_- etc.
- 3). Para el caso $a_3 = a_2 = 1$, las curvas de bifurcación en el plano (a_1, b) son:



caso $a_2 \neq 0$

$$\tau_0(a_1, b) = b - a_1 \quad ; \quad \rho_0(a_1, b) = b - \frac{1}{a_1} \quad ; \quad \rho_+(a_1, b) = \frac{1}{a_1 - 1/4}$$

$$\tau_+(a_1, b) = \frac{1}{2b} [2b^2 + 4ba_1 - b - 6 + \sqrt{b^2 - 4b^2a_1 + 4b}]$$

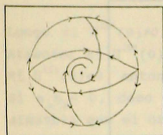
Esta curva de bifurcaciones de Hopf está definida para $1/5 \leq a_1 \leq 5/4$, y $0 < 1/a_1 \leq 1/(a_1 - 1/4)$ y tiene derivada -1 en 1 , y $+\infty$ en $5/4$.

En el caso $a_2 = 0$ se tiene la simetría $X^{fg}(-x, -y) = -X^{fg}(x, y)$

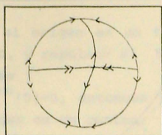
luego si $x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{b} - a_1}$ entonces $p_{\pm} = (x_{\pm}, f(x_{\pm}))$ son singularidades simétricas.

Sea $\rho(a_1, b) = \frac{1}{b} - a_1$ y $\tau(a_1, b) = b - a_1$

i). Si $\tau < 0$ los diagramas de bifurcación son:

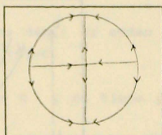


$\rho < 0$



$\rho = 0$

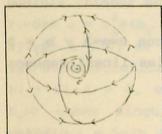
(silla no hiperbolica)



$\rho > 0$

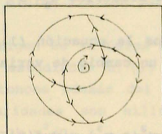
(silla hiperbolica)

ii). Si $\tau > 0$, entonces existe una curva μ de conexiones de sillars

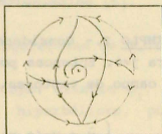


$\mu < 0$

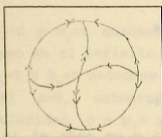
(\exists ciclo limite)



$\mu = 0$

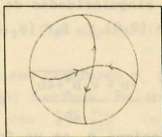


$\mu > 0, \rho < 0$



$\rho = 0$

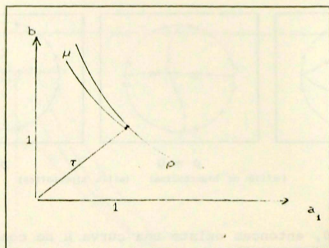
(silla no hiperbolica)



$\rho > 0$

(silla hiperbolica)

Obviamente $\tau = 0$, es una curva de bifurcación de Hopf.

caso simétrico $a_2 = 0$

EJEMPLO 2.- Consideremos la ecuación (1) con $n=m=3$ y $b_{1j} = 0$ para $j \neq 0$. Entonces por un cambio de variables lineal tenemos el campo de vectores.

$$X: \begin{cases} \dot{x} = y - (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = y - f(x) \\ \dot{y} = -x + (b_2 x^2 + b_3 x^3) = -x + g(x) \end{cases}$$

1.- Las singularidades de X son:

$$p_0 = (0,0) \text{ y } p_{\pm} = (x_{\pm}, f(x_{\pm})), \text{ donde}$$

$$x_{\pm} = \frac{-b_2 \mp \sqrt{b_2^2 + 4b_3}}{2b_3} \text{ cuando existe.}$$

2.- El origen p_0 es un foco si $|a_1| < 2$ y un nodo si $|a_1| \geq 2$. Es atractor hiperbólico si $a_1 > 0$ y repulsor hiperbólico si $a_1 < 0$.

Si $a_1 = 0$, entonces el origen es un foco débil. Calculando las derivadas de la transformación de Poincaré Π , por el método de Bautin [4], obtenemos:

$$\Pi'(0) = 1, \quad \Pi^{(2)}(0) = 0, \quad \Pi^{(3)}(0) = -\frac{1}{8}[2a_2 b_2 + 3a_3].$$

Luego si $a_2 b_2 \neq -\frac{3}{2}a_3$, el origen es un foco débil de orden 1.

Atractor si $\Pi^{(3)}(0) < 0$ y repulsor si $\Pi^{(3)}(0) > 0$.

$$\text{Si } a_2 b_2 = -\frac{3}{2}a_3, \text{ obtenemos } \Pi^{(4)}(0) = 0, \quad \Pi^{(5)}(0) = -\frac{5}{24} a_2 b_2 b_3.$$

Luego si $\Pi^{(5)}(0) \neq 0$, el origen es un foco débil de orden 2. Atractor si $\Pi^{(5)}(0) < 0$, y repulsor si $\Pi^{(5)}(0) > 0$.

Si $\Pi^{(5)}(0) = 0$, entonces :

Si $a_2 b_2 = 0$, como $\Pi^{(3)}(0) = 0$, entonces $a_3 = 0$ y se tiene por simetría que el origen es un centro.

Si $b_3 = 0$, usando el programa Reduce (Northwest Computer Algorithms 1986) se obtiene que las derivadas superiores de Π son combinaciones del tipo:

$\Pi^{(n)} = u_n(a_1, b_1)\Pi^{(3)} + v_n(a_1, b_1)\Pi^{(5)}$, ($b_3 = 0$), lo que implica nuevamente un centro.

Estos resultados implican que desde el origen sólo es posible obtener dos ciclos límites infinitesimales [5].

3.- Sea $\Delta = b_2^2 + 4b_3$.

a).- Si $\Delta < 0$, el origen es la única singularidad de X , con las características estudiadas en (2)

b).- Si $\Delta > 0$, entonces además del origen existen p_{\pm} , si $b_3 > 0$ ambas singularidades son sillas hiperbólicas, pues $\det DX(p_{\pm}) = 1 - 2b_2 x_{\pm} - 3b_3 x_{\pm}^2 < 0$.

Si $b_3 < 0$ y $b_2 > 0$, entonces p_- es un foco atractor si $f'(x_-) > 0$, ó repulsor si $f'(x_-) < 0$. p_+ es una silla hiperbólica.

Si $b_3 < 0$ y $b_2 < 0$, entonces ocurre lo mismo cambiando p_- por p_+ .

Si $b_3 = 0$ y $b_2 > 0$ entonces p_+ es una silla hiperbólica y p_- colapso en el infinito.

Si $b_3 = 0$ y $b_2 < 0$ entonces ocurre lo mismo cambiando p_- por p_+ .

c).- Si $\Delta = 0$, entonces además del origen existe otra singularidad $p = p_+ = p_- = (\bar{x}, f(\bar{x}))$ con $\bar{x} = \frac{-b_2}{2b_3}$ ($b_3 \neq 0$), y se tiene $\det DX(p) = 0$ y $\text{Traza} DX(p) \neq 0$ (genéricamente). Luego p es genéricamente una silla-nodo.

4.- Estudiemos el comportamiento en el infinito.

Aplicando los cambios de coordenadas $u = \frac{x}{y}$; $v = \frac{1}{y}$ y después de dividir por v^2 tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= [(1 + u^2)v^2 - a_1 uv^2 - a_2 u^2 v - a_3 u^3] - u[b_2 u^2 v + b_3 u^3] \\ \dot{v} &= v[uv^2 - b_2 u^2 v - b_3 u^3] \end{aligned}$$

El infinito es $v = 0$ y las singularidades ocurren para

$$-a_3 u^3 - b_3 u^4 = 0.$$

Luego las singularidades son $(0,0)$ y $(-\frac{a_3}{b_3}, 0)$. ($b_3 \neq 0$).
 Haciendo dos blowing-up sucesivos en la dirección v de la forma $r = u$, $s = v/u^2$ y dividiendo por r^2 , tenemos

$$\begin{cases} \dot{r} = -a_3 r - b_3 r^2 - a_2 r^2 s + r^2 s^2 - b_2 r^3 s - a_1 r^3 s^2 + r^4 s^2 \\ \dot{s} = 2a_3 s + b_3 r s + 2a_2 r s^2 - 2r s^3 + b_2 r^2 s^2 + 2a_1 r^2 s^3 - r^3 s^3 \end{cases}$$

Si $v = 0$ se tiene $s = 0$, los términos relevantes de la diferencial son:

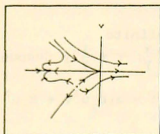
$$\begin{bmatrix} -a_3 - 2b_3 r & -a_2 r^2 - b_2 r^3 \\ 0 & 2a_3 + b_3 r \end{bmatrix}$$

cuyos valores en $(0,0)$ y $(-\frac{a_3}{b_3}, 0)$ son respectivamente:

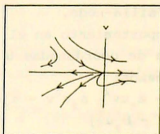
$$\begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & 2a_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

Luego $(0,0)$ es una silla hiperbólica y $(-\frac{a_3}{b_3}, 0)$ es un atractor ó repulsor y haciendo los respectivos blowing-up y observando que en $b_3 = 0$ colapsa un nodo en el infinito y aparece una silla (ó al revés, dependiendo del signo de b_2) se tiene:

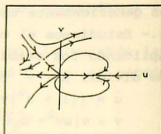
i).- Si $a_3 < 0$



$b_3 < 0$

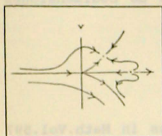


$b_3 = 0$

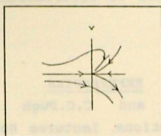


$b_3 > 0$

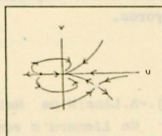
ii).- Si $a_3 > 0$



$b_3 < 0$



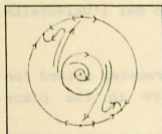
$b_3 = 0$



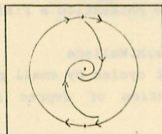
$b_3 > 0$

Veamos algunos retratos de fase en S^2 . Supongamos sin pérdida de generalidad $a_1 < 0$, $b_2 > 0$.

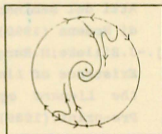
1.- $\Delta < 0$ (por lo tanto $b_3 < 0$)



$a_3 < 0$



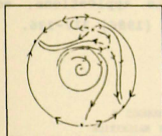
$a_3 = 0$



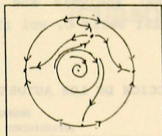
$a_3 > 0$

Aquí $a_3 = 0$, es una bifurcación de Hopf en el infinito.

2.- $\Delta > 0$ y supongamos además $a_3 < 0$.



$b_3 < 0$



$b_3 = 0$



$b_3 > 0$

Luego si consideramos por ejemplo $a_2 > 0$, $b_2 > 0$. Entonces:
 $a_1 = 0$ es un hiperplano de bifurcación de Hopf en el origen
 $a_3 = 0$ es un hiperplano de bifurcación de Hopf en el infinito
 $b_3 = 0$ es un hiperplano de bifurcación silla-nodo en el infinito.
 $\Delta = 0$ es una hipersuperficie de bifurcación silla-nodo en el plano. Estas bifurcaciones son de tipo genérico (de

codimensión uno). Obviamente existen sobre estas hipersuperficies otras superficies de bifurcaciones de codimensiones mayores.

REFERENCIAS.

- [1].-A. Lins; W. De Melo and C. C. Pugh
On Lienard's equations. Lectures Notes in Math. Vol. 597
 (Springer-Verlag, 1977), 335-337
- [2].-J. Billeke; H. Burgos; M. Wallace
Some theorems on the non existence, uniqueness and existence of two limit cycles for the Lienard equation of degree five.
 Atti del seminario Matematico e Fisico del l'Università di Modena (1990)
- [3].-J. Billeke; H. Burgos; M. Wallace
Existence of Limit cycles by small parameter method for the Lienard equation of degree five in the plane
 Pre-print. (1989)
- [4].-E. Saez. *Derivadas de la transformacion de Poincare en un Centro-Foco.* Pre-Print. Informe tecnico U.T.F.S.M 1988
- [5].-N. G. Lloyd.
Limit Cycles of certain polynomial systems.
 Nonlinear functional analysis and its applications, ed S.P.S ingh, Nato ASI Serie C. vol 173 (1986) 317-326.

DIRECCION DE LOS AUTORES.

JORGE BILLEKE G.
 DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
 UNIV. DE SANTIAGO
 SANTIAGO - CHILE

HERNAN BURGOS Y.
 DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
 UNIV. DE LA FRONTERA
 TEMUCO - CHILE.