CUBO 7, 56-61 (1991)
Recibido: Mayo 1991.

ELEMENTOS REGULARES DE UNA C^* ALGEBRA

por
Mercedes Fernández M.

Resumen.- En este trabajo se define, en el cuadro de una C^* álgebra cualquiera, la noción de elemento regular introducido en [1] por J.P. Labrousse en el cuadro particular del álgebra de los operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert. Además, se demuestra que en este ámbito, más general, se puede igualmente asociar a todo elemento regular un resolvente generalizado analítico en una vecindad del origen.

1.- Operadores de tipo n. De aquí en adelante H designará un espacio de Hilbert, L(H) el espacio de los operadores lineales continuos en H y Δ una C^* álgebra.

Definición 1. Sea A en Δ. Diremos que B en Δ es *un inverso generalizado de A*, que se anotará B(INV)A, si BAB=B y ABA=A.

Definición 2. Sea A en Δ. Diremos que A *es de tipo n* si existe B en Δ tal que

i) B(INV)A

ii) Para todo j en N, $0 \le j < n \Longrightarrow (I-AB)B^j(I-BA)=0$

Proposición 3. Si A en Δ es de tipo n, entonces A^* es de tipo n.

Demostración. $B^*(INV)A^*$ y para todo j en N, $0 \le j < n$ se tiene $(I-A^*B^*)B^{*j}(I-B^*A^*)=0$. ∎

Proposición 4. Sean A y B en Δ tales que B(INV)A. Entonces son equivalentes :

a) Para todo j en N , $0 \le j < n \Longrightarrow (I-AB)B^j(I-BA)=0$

b) Para todo j en N^*, $1 \le j \le n \Longrightarrow (I-AB)(I-B^jA^j)=0$

Demostración. a⇒b) $0= \sum_{0\le k\le j} (I-AB)B^k(I-BA)A^k$

$$= \sum_{0\le k\le j} (I-AB)B^kA^k - \sum_{0\le k\le j+1} (I-AB)B^kA^k = (I-AB)(I-B^{j+1}A^{j+1})$$

b⇒a) Procedemos por indución en j. Para j=0 es evidente. Suponemos a) demostrado para j-1 $(1\le j<n)$. Entonces aplicando la hipótesis de inducción :

$$A^{j+1}B^j(I-BA) = \sum_{0\le k\le j+1} A^iB^{i-1}(I-BA) - \sum_{0\le k\le j} A^iB^{i-1}(I-BA)$$

$$= \sum_{0\le k\le j} (A^{i+1}B^i - A^iB^{i-1})(I-BA), \text{ porque } A(I-BA)=0$$

$$= -\sum_{0\le k\le j} [A^i(I-AB)B^{i-1}](I-BA)=0$$

Aplicando la hipótesis (b) obtenemos

$(I-AB)B^j(I-BA)=(I-AB)(I-B^{j+1}A^{j+1})B^j(I-BA)+(I-AB)B^{j+1}A^{j+1}B^j(I-BA)=0.$ ■

Corolario 5. Sean A y B en Δ tales que B(INV)A, entonces son equivalentes :

a) Para todo j en N , $0\le j<n$ $\quad (I-AB)B^j(I-BA)=0$

b) Para todo j en N^*, $1\le j\le n$ $\quad (I-A^jB^j)(I-BA)=0$

Demostración. Utilizando Proposición 3. y Proposición 4. tenemos las equivalencias: (a) $\Longleftrightarrow$ A es de tipo n $\Longleftrightarrow$ A^* es de tipo n

$\Longleftrightarrow \forall j\in N^*$, $1\le j\le n$ $(I-A^*B^*)(I-B^{*j}A^{*j})=0$

$\Longleftrightarrow \forall j\in N^*$, $1\le j\le n$ $(I-A^jB^j)(I-BA)=0 \Longleftrightarrow$ (b). ■

Proposición 6. Sean A y B en Δ tales que B(INV)A, y tal que para todo j en N^*, $1\le j\le n$ se cumple $(I-AB)(I-B^jA^j)=0$. Entonces para todo i, j en N , $0\le i\le j\le n+1$ tenemos $A^iB^jA^j=B^{j-i}A^j$.

Demostración. $A^iB^jA^j-B^{j-i}A^j = \sum_{0\le k\le i-1} A^{i-k}B^{j-k}A^j - \sum_{1\le k\le i} A^{i-k}B^{j-k}A^j$

$$= \sum_{1\le k\le i} [A^{i+1-k}B^{j+1-k} - A^{i-k}B^{j-k}]A^j = -\sum_{1\le k\le i} A^{i-k}(I-AB)B^{j-k}A^{j-k}A^k$$

$$= \sum_{1\le k\le i} A^{i-k}(I-AB)(I-B^{j-k}A^{j-k})A^k - \sum_{1\le k\le i} A^{i-k}(I-AB)A^k = 0.$$ ■

Proposición 7. Sean A y B en Δ tales que B(INV)A y que para todo j en N^*, $1\le j\le n$ se cumple $(I-AB)(I-B^jA^j)=0$. Entonces para todo C en Δ tal que C(INV)A y para todo j en N^*, $1\le j\le n$ se tiene $(I-AC)(I-C^jA^j)=0$.

Demostración. Como $C(INV)A$, se deduce fácilmente que

(7.1) $(I-AC)(I-AB)=I-AC$ y $(I-BA)(I-CA)=I-CA$, y aplicando la hipótesis se deduce :

$(I-AC)(I-CA)=(I-AC)(I-AB)(I-BA)(I-CA)=0$

Supongamos que la Proposición 7 sea verdadera para $j<n$. Entonces según la Proposición 6:

(7.2) $A^{j+1}C^{j+1}A^{j+1}=A^{j+1}$.

De donde $(I-B^{j+1}A^{j+1})(I-C^{j+1}A^{j+1})=(I-C^{j+1}A^{j+1})$. Luego de (7.1), (7.2) y la hipótesis se obtiene

$(I-AC)(I-C^{j+1}A^{j+1})=(I-AC)(I-AB)(I-B^{j+1}A^{j+1})(I-C^{j+1}A^{j+1})=0$. ■

Teorema 8. $\forall A\in\Delta$, son equivalentes:

a) A es de tipo n.

b) $\exists B(INV)A\in\Delta$ tal que $\forall j\in N^{*}$, $1\le j\le n$ vale $(I-AB)(I-B^{j}A^{j})=0$.

b') $\forall B(INV)A\in\Delta$, $\forall j\in N^{*}$ tal que $1\le j\le n$ vale $(I-AB)(I-B^{j}A^{j})=0$.

c) $\exists B(INV)A\in\Delta$ tal que $\forall j\in N^{*}$, $1\le j\le n$ vale $(I-A^{j}B^{j})(I-BA)=0$.

c') $\forall B(INV)A\in\Delta$, $\forall j\in N^{*}$ tal que $1\le j\le n$ vale $(I-A^{j}B^{j})(I-BA)=0$.

d) $\exists B(INV)A\in\Delta$ tal que $\forall j\in N$, $0\le j\le n$ vale $(I-AB)B^{j}(I-BA)=0$.

d') $\forall B(INV)A\in\Delta$, $\forall j\in N$ tal que $0\le j\le n$ vale $(I-AB)B^{j}(I-BA)=0$.

Demostración. Consecuencias inmediatas de las Proposiciones 3, 4, 5, 6 y 7. ■

2.- Caso Particular: $\Delta = L(H)$.

Definición 9. Sea A en L(H) y n en N^{*}. A se llamará *de tipo n* si :

i) R(A), la imagen de A, es cerrada, ii) $N(A^{n})\subseteq R(A)$

Proposición 10. Si $\Delta = L(H)$ las Definiciones 2 y 9 son equivalentes.

Demostración. Debemos probar que si $n\in N^{*}$ y $A\in\Delta$, entonces $[\exists B(INV)A\in\Delta$ tal que $\forall j\in N$, $0\le j<n$ vale $(I-AB)B^{j}(I-BA)=0] \iff [R(A)$, la imagen de A, es cerrada y $N(A^{n})\subseteq R(A)]$

$\Leftarrow$) Es fácil demostrar que :

(10.1) $\forall j\in N^{*}$, $1\le j\le n$, $u\in N(A^{j})\subseteq R(A)$ implica que $Bu\in N(A^{j+1})$.

Según la Definición 9. R(A) es cerrada. Entonces aplicando [2] Teorema 5.6. ó [3] Proposición 2.33. ó [4] Teorema 25 vemos que existe B en Δ tal que $B(INV)A$. Sea $u\in H$, como $B(INV)A$ vemos que $(I-BA)u\in N(A)$ donde $N(A)\subseteq R(A)$, luego :

(10.2) $(I-AB)(I-BA)u=0$.

Como $(I-BA)u \in N(A)$, aplicando (10.1) y la hipótesis obtenemos :

(10.3) Para todo $j \in N^*$, $1 \le j < n$, $B^j(I-BA)u \in N(A^{j+1}) \subseteq R(A)$. De (10.2) y (10.3) se obtiene que para todo $j \in N$, $0 \le j < n$ $(I-AB)B^j(I-BA)=0$.

$\Rightarrow$) Según la Definición 2 y el Teorema 8. tenemos por hipótesis:

(10.4) Existe B en Δ tal que B(INV)A

(10.5) Para todo j en N^*, $1 \le j \le n$, $(I-AB)(I-B^jA^j)=0$.

De (10.4) y de [2] Teorema 5.6. ó [3] Propiedad 2.33. ó [4] Teorema 25, obtenemos que R(A) es cerrada.

Finalmente de (10.5) se deduce $N(A^n) \subseteq R(A)$. ∎

3. Resolvente Generalizado.

Definición 11. Sea A en Δ. Diremos que A *es regular* si para todo n en N^*, A es de tipo n.

Proposición 12. Sea A en Δ, U vecindad de 0 en $\mathbb{C}$ y $f: g \longrightarrow B(g) = \sum_{n \ge 0} g^n B_n$ una aplicación analítica en U, con valores en Δ, tal que para todo g en U, $B(g)(INV)(A-gI)$. Entonces :

a) $A(INV)B_0$

b) Para todo n en N^*, $I-AB_0=(B_{n-1}-AB_n)A^n$

Demostración. a) $(A-gI)B(g)=AB_0+\sum_{n\ge1} g^n AB_n - \sum_{n\ge0} g^{n+1}B_n = AB_0 + \sum_{n\ge1} g^n(AB_n - B_{n-1})$

Luego :

(12.1) $(A-gI)B(g)(A-gI)=AB_0A+g(AB_1A-B_0A-AB_0)+$

$$\sum_{n\ge2} g^n(AB_nA-B_{n-1}A-AB_{n-1}+B_{n-2}).$$

Según la hipótesis $(A-gI)B(g)(A-gI)=A-gI$, entonces identificando los coeficientes se encuentra:

(12.2) $AB_0A=A$

(12.3) $AB_1A-B_0A-AB_0=-I$

(12.4) Para todo $n \ge 1$. $AB_{n+1}A-B_nA-AB_n+B_{n-1}=0$

Por otra parte, haciendo $g=0$ en la identidad $B(g)(A-gI)B(g)= B(g)$, se obtiene $B_0AB_0=B_0$. Luego utilizando (12.2) se deduce que :

(12.5) $B_0(INV)A$

b) De (12.3) se obtiene $I-AB_0=(B_0-AB_1)A$ lo que muestra que b) es verdad para n=1.

Supongamos b) verdadero para n. De (12.4) se deduce :

$$(B_n-AB_{n+1})A^{n+1}=(B_{n-1}-AB_n)A^n$$

y como por hipótesis de inducción $(B_{n-1}-AB_n)A^n=I-AB_0$, se obtiene que

$I-AB_0=(B_n-AB_{n+1})A^{n+1}$. ■

Proposición 13. Con las mismas hipótesis que la Proposición precedente se tiene para todo n en N^*, $(I-AB_0)(I-B_0^nA^n)=0$.

Demostración. Demostramos primeramente que

(13.1) Para todo n en N^*, $A^nB_0^{n-1}(I-B_0A)=0$.

Para n=1 es una consecuencia inmediata de (12.2).

Supongamos (13.1) demostrado para n. Entonces:

$A^{n+1}B_0^n(I-B_0A)=A^n(I-AB_0)B_0^nA-A^nB_0^nA+A^{n+1}B_0^n$

Luego, utilizando la Proposición 12 y la hipótesis de inducción, obtenemos $A^{n+1}B_0^n(I-B_0A)=A^n(B_{n-1}-AB_n)A^nB_0^nA-A^nB_0^nA+A^{n+1}B_0^n$

$= A^n(B_{n-1}-AB_n)A^nB_0^{n-1}-A^nB_0^{n-1}+A^{n+1}B_0^n = A^n(I-AB_0)B_0^{n-1}-A^nB_0^{n-1}+A^{n+1}B_0^n$

$= A^nB_0^{n-1}-A^{n+1}B_0^n-A^nB_0^{n-1}+A^{n+1}B_0^n=0.$

Ahora demostraremos que

(13.2) Para todo n en N^*, $A^nB_0^nA^n=A^n$

Para n=1 es evidente. Supongamos (13.2) demostrado para n. Entonces $A^{n+1}B_0^{n+1}A^{n+1}=-A^{n+1}B_0^n(I-B_0A)A^n+A^{n+1}B_0^nA^n$ y por hipótesis de inducción y (13.1) encontramos $A^{n+1}B_0^{n+1}A^{n+1}=A^{n+1}B_0^nA^n=A^{n+1}$.

Para demostrar la Proposición 13 basta notar que utilizando la Proposición 12 y (13.2) se deduce que para todo n en N^*, $(I-AB_0)(I-B_0^nA^n)=$ $(B_{n-1}-AB_n)A^n(I-B_0^nA^n)=0$. ■

Teorema 14. Las dos Proposiciones siguientes son equivalentes en Δ.

I) A es regular en Δ.

II) Existe U, vecindad de 0 en $\mathbb{C}$ y una aplicación analítica $f:g\longrightarrow B(g)$ de U con valores en Δ tal que para todo g en U, $B(g)(INV)(A-gI)$, ($B(g)$ es el *resolvente generalizado* asociado a A en U).

Demostración. I)$\Longrightarrow$II) Como por hipótesis A es regular, de acuerdo al Teorema 8.d' vemos que

(14.1) $\forall B(INV)A\in\Delta$ y $\forall n\in N^*$ se cumple $(I-AB)B^n(I-BA)=0$.

Sea $B(g)=\sum_{n\geq 0} g^nB^{n+1}=B(I-gB)^{-1}=(I-gB)^{-1}B$, analítica en U, con $U=\{g\in\mathbb{C}: |g|<\frac{1}{\|B\|}\}$. Entonces $(A-gI)B(g)(A-gI)=(A-gI)B(I-gB)^{-1}(A-gI)$

$=(AB-I+I-gB)(I-gB)^{-1}(A-gI)=(AB-I)(I-gB)^{-1}(A-gI)+A-gI$

$=-(I-AB)\sum_{n\geq 0} g^nB^n(A-gI)+A-gI=-(I-AB)\sum_{n\geq 0} g^nB^nA+(I-AB)\sum_{n\geq 0} g^{n+1}B^n+A-gI$

$=(I-AB)\sum_{n\geq 1} g^nB^{n-1}(I-BA)+A-gI=A-gI$ (según (14.1)). Luego

(14.2) $(A-gI)B(g)(A-gI)=A-gI$.

Como $B(A-gI)B(g)=B(AB-I+I-gB)(I-gB)^{-1}=B$. Entonces:

(14.3) $B(g)(A-gI)B(g)=(I-gB)^{-1}B(A-gI)B(g)=B(g)$

II)$\Longrightarrow$I) Según la Proposición 12 y la Proposición 13 tenemos $B_0(INV)A$ y $\forall n\in N^*$, $(I-AB_0)(I-B_0{}^nA^n)=0$, de lo cual se deduce, aplicando el Teorema 8 y la Definición 2, que A es regular. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] **Labrousse, J.P.** *Les opérateurs quasi Fredholm*; une généralisation des opérateurs semi Fredholm; Rend. Circ. Math. Palermo (2) XXIX (1980)

[2] **Nashed, M.Z. y Votruba, G.**. *A Unified operator theory of generalized inverses, in Generalized Inverses and Applications*, edited by M.Z. Nashed Academic Press (1976)

[3] **Fernandez Miranda, M.**; *Eléments de Géométrie dans une C^* algèbre*, Nice (1990)

[4] **Fernandez Miranda, M.**; *Inverses Généralisés dans une C^* algèbre*, Nice (1990), (en prensa).

DIRECCION DEL AUTOR
Mercedes Fernández M.
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA ANGAMOS 0601
ANTOFAGASTA-CHILE.
FAX : 247786