

CICLOS HIPERBOLICOS

por

Rodrigo Bamón¹

1. Introducción. En estas notas estaremos preocupados con una clase de objetos matemáticos llamados ciclos hiperbólicos, los cuales, como luego veremos, quedan definidos a partir de un sistema dinámico en una variedad diferenciable de dimensión cualquiera. Específicamente, nos interesa clasificar aquellos ciclos hiperbólicos que aparecen genéricamente en familias a un parámetro de sistemas dinámicos.

El interés por estos objetos radica en que ellos implican la existencia de una dinámica interesante ya sea directamente o por pequeñas perturbaciones del sistema que posee el ciclo. Más aún, sistemas dinámicos con cierta subclase de ciclos hiperbólicos (los que no clasificaremos aquí) están en la frontera o en la transición de sistemas simples (i.e. cada órbita tiende asintóticamente a algún elemento crítico hiperbólico) y sistemas con dinámicas complejas. Una conjetura de S. Newhouse y J. Palis ([3]) afirma que perturbando un sistema de dinámica simple mediante una familia a un parámetro, genéricamente uno encuentra falta de hiperbolicidad o un ciclo hiperbólico.

El estudio de ciclos tiene ya una historia. En el siglo pasado, Poincaré resaltó la complejidad dinámica que conlleva la existencia de una órbita homoclínica. En las últimas décadas algunos tipos de ciclos y sus bifurcaciones han sido afanosamente estudiados: tangencias homoclínicas para difeomorfismo en superficies ([15], [4], [16]);

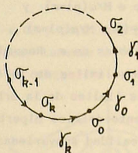
¹ Proyecto Fondecyt 1059/89

tangencias homoclínicas para campos de vectores en dimensiones infinitas ([12]); Silnikov ([6],[13]); etc. Recientemente se ha considerado nuevas clases de ciclos hiperbólicos ([8],[10]). También ciclos no hiperbólicos genéricos son temas de estudio ([17]).

Estas notas están ordenadas en Secciones. En la segunda definiremos ciclos hiperbólicos y expondremos los conceptos básicos para comprender la terminología asociada. También mostraremos diversos ejemplos. En la sección tres aparece la clasificación de ciclos hiperbólicos genéricos en familia a un parámetro y finalmente en la sección cuatro presentamos conclusiones y comentarios.

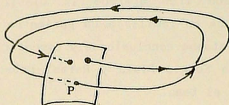
Deseo agradecer a Sergio Plaza y Rafael Labarca por las muchas conversaciones sobre el tema.

2. Definiciones Fundamentales y Ejemplos. Para todos los efectos se puede suponer que la variedad M , el espacio ambiente donde se definen los sistemas, es el espacio euclidiano R^n . Por *Sistema Dinámico* entenderemos ya sea un campo de vector o un difeomorfismo en M . Un *ciclo hiperbólico* de un sistema dinámico X en una variedad M , es un subconjunto $\Gamma \subset M$ formado por una colección finita $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ de elementos críticos hiperbólicos de X , y de una colección finita $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ de órbitas regulares, de modo que $\alpha(\gamma_i) = \sigma_i$ y $\omega(\gamma_i) = \sigma_{i+1} \forall i = 0, 1, 2, \dots, k \pmod{k+1}$; donde $\alpha(\gamma)$ y $\omega(\gamma)$ representan respectivamente el α -límite y el ω -límite de la órbita γ . Esto último significa gruesamente, que la órbita γ_i nace en σ_i y muere en σ_{i+1} . Gráficamente representamos un ciclo hiperbólico en la forma:



Por *elemento crítico* de un sistema dinámico entendemos ya sea una singularidad o una órbita periódica. Una singularidad p de un campo X (i.e. $X(p)=0$) se dice *hiperbólica* si los autovalores de DX_p tienen

parte real distinta de cero. Un punto periódico p de un difeomorfismo (i.e. $f^k(p)=p$) se dice *hiperbólico* si los autovalores de $D(f^k)_p$ están fuera del círculo unitario en \mathbb{C} . Una órbita periódica γ de un campo X se dice *hiperbólica* si dada una sección transversal Σ que intersecta a γ en p , la transformación de retorno tiene a p como punto fijo hiperbólico.



Dos subvariedades se dicen *transversales* si en todo punto de intersección la suma de los espacios tangentes completa el espacio total.

Sabemos que si un sistema dinámico tiene un elemento crítico hiperbólico, entonces todo sistema vecino tiene también un elemento crítico en la vecindad del elemento crítico original. Es decir, elementos críticos hiperbólicos persisten por perturbaciones del sistema.

En el estudio de la dinámica de un sistema resultan determinantes los conjuntos estables e inestables de los elementos críticos. Si σ es un elemento, definimos

$$W^s(\sigma) = \{p \in M / \omega(p) = \sigma\} \quad \text{y}$$

$$W^u(\sigma) = \{p \in M / \alpha(p) = \sigma\}$$

los conjuntos estables e inestables de σ . Recordemos que $\omega(p)$ se define como el conjunto de puntos límites de la órbita futura de p y $\alpha(p)$ como el conjunto de puntos límites de la órbita pasada de p .

Sabido es que para un elemento crítico hiperbólico, los conjuntos estables e inestables son en realidad subvariedades inmersas, llamadas *variedades invariantes (estable e inestable respectivamente)*, siendo ellas transversales en el elemento crítico. La dimensión de W^s corresponde, en el caso de singularidades de campos (puntos fijos de difeos), al número de autovalores con parte real negativa (norma me-

nor que 1).

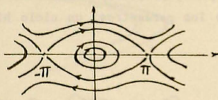
Con lo anterior, un sistema dinámico tiene un ciclo hiperbólico si y sólo si existen elementos críticos hiperbólicos $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ con $W^u(\sigma_i) \cap W^s(\sigma_{i+1}) \neq \emptyset \forall i=0, 1, \dots, k(\text{mód } k+1)$. Toda vez que $W^u(\sigma_i)$ intersekte transversalmente a $W^s(\sigma_{i+1})$, la intersección persistirá por pequeñas perturbaciones del sistema. Si todas estas intersecciones en un ciclo son transversales, éste será *persistente* por pequeñas perturbaciones.

En estas notas nos interesa precisamente clasificar aquellos ciclos hiperbólicos no persistentes que de alguna forma sean lo menos degenerado posible.

Antes de pasar a la siguiente sección, veremos algunos ejemplos de campos y difeomorfismos con ciclos hiperbólicos.

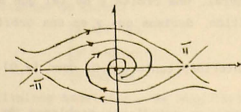
Ejemplo 1. El péndulo sin roce tiene por ecuación $x' + k \sin x = 0, k > 0$, o de otra forma $x' = y \wedge y' = -k \sin x$.

Este sistema conserva la energía $E(x, y) = -k \cos x + y^2/2$. Los niveles de energía y el flujo sobre ellos están graficados en la siguiente figura:



Las singularidades $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ son parte de un ciclo hiperbólico.

Si consideramos roce, tenemos $x'' + \mu x' + k \sin x = 0, \mu > 0$ o bien $x' = y \wedge y' = -k \sin x - \mu y$. Por la disipación de energía, el diagrama de órbitas es el siguiente:

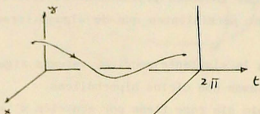


En este caso no existen ciclos. El ciclo en $\mu=0$ es no persistente: por una pequeña perturbación la evolución de estados cambia radicalmente.

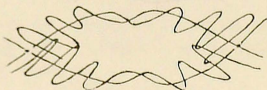
Ejemplo 2. El péndulo forzado con roce tiene por ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -k \sin x - \mu y + \cos \omega t \end{cases}$$

Este sistema no es autónomo pero tiene periodo 2π en t . En esta situación estudiamos la evolución cada 2π periodos de tiempo.



Si $\varphi(t,p)$ es el flujo del sistema, estudiamos el difeomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(p) = \varphi(2\pi, p)$. Este difeomorfismo tiene (para ciertos valores de los parámetros) un ciclo hiperbólico como en la figura:



Nótese que también existe un ciclo con $(\pi, 0)$ como único elemento crítico. Si en general, una órbita γ es tal que $\alpha(\gamma) = \omega(\gamma) = \sigma$ donde σ es un elemento crítico, decimos que γ es una *órbita homoclínica* asociada a σ .

En el ejemplo anterior, tanto $(-\pi, 0)$ como $(\pi, 0)$ tienen órbitas homoclínicas.

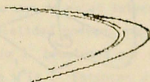
En el siglo pasado y estudiando problemas de mecánica celeste. Poincaré hizo ver la importancia dinámica de una órbita homoclínica.

Expresó que una tal órbita implicaba una gran complejidad, la cual, decía, era casi imposible estudiar. A comienzos de siglo, Birkhoff demostró que toda órbita homoclínica transversal es acumulada por órbitas periódicas del sistema. Más tarde, en los años 60, Smale probó que una órbita homoclínica transversal es parte de un conjunto invariante Λ , de modo que sobre tal conjunto, la dinámica puede ser descrita por el shift $\rho: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $(\rho(\alpha))_i = \alpha_{i+1}$. Este descubrimiento de Smale está en la base del posterior impulso que adquirió la teoría de los Sistemas Dinámicos.

Ejemplo 3. La Función de Henón

$$H_{a,b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + by, x)$$

exhibe (para ciertos valores de los parámetros) órbitas homoclínicas transversales. Lo más interesante sin embargo, es que mediante integración numérica se observan comportamientos dinámicos que aún no tienen una explicación teórica.

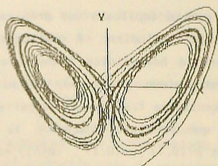


En el mapa de Henón las intersecciones homoclínicas son un elemento esencial. Se conjetura que toda complejidad se desprende de la existencia de órbitas homoclínicas no transversales. Un resultado importante en este sentido se encuentra en [9].

Ejemplo 4. El atractor de Lorenz

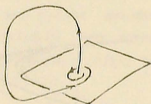
$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = -xz + \rho x - y, \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

tiene órbitas homoclínicas asociadas a la singularidad en el origen. Al igual que para la función de Henón, aún no se entiende completamente la estructura de órbitas que se observa gráficamente:



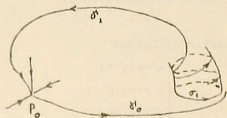
Ejemplo 5. No necesariamente ha de estudiarse ciclos que aparezcan en sistemas dinámicos específicos. Resulta interesante estudiar de manera abstracta cada uno de estos objetos geométricos, y, si posteriormente se prueba que un sistema en concreto presenta alguno de estos ciclos, se tendrá ya información adelantada. Podemos decir que el problema radica más en la configuración geométrica del ciclo que en el sistema particular que da origen al ciclo.

Por ejemplo, una situación geométrica estudiada es el ciclo de Silnikov [6]:



Esto corresponde a una órbita homoclinica para un campo de vector en R^3 . Silnikov demuestra que bajo ciertas condiciones, y en una sección transversal apropiada, aparece un difeomorfismo con una órbita homoclinica transversal asociada a un punto fijo hiperbólico. Con ésto, descubre toda la riqueza dinámica descrita por Smale.

Ejemplo 6. Otro ciclo para campos de vectores en R^3 es estudiado en [8]:



3. Ciclos Hiperbólicos en 1-Familias Genéricas.

Si un ciclo hiperbólico de un sistema dinámico es persistente entonces todo sistema vecino tendrá también un ciclo hiperbólico análogo al anterior. Este tipo de ciclo no nos interesa.

En la sección anterior vimos que para que un ciclo hiperbólico no sea persistente, alguna de las intersecciones entre variedades invariantes no debe ser transversal. La situación más general (menos degenerada), es que exista una única intersección no transversal y que ésta sea, por así decir, lo más transversal posible. Con esto llegamos a los objetos que nos interesa clasificar: ciclos hiperbólicos donde sólo una de las intersecciones entre variedades invariantes es no transversal y ésta es lo menos degenerada posible. Estos son exactamente los ciclos que aparecen genéricamente en familias uniparamétricas.

Se hace ahora necesario distinguir entre difeomorfismos y campos de vectores. Comenzaremos por los primeros.

3.1. Difeomorfismos. Sea $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ una colección de elementos críticos de un difeomorfismo f , tales que $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_{1+1}) \neq \emptyset \forall 1=0, \dots, k$ (mód $k+1$), y tal que sólo una de estas intersecciones es no transversal. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que tal intersección ocurre entre $W^u(\sigma_0)$ y $W^s(\sigma_1)$. Denotemos por u_1 la dimensión de $W^u(\sigma_1)$ y por s_1 la dimensión de $W^s(\sigma_1)$. Entonces $u_1 + s_1 = n =$ dimensión del espacio ambiente y $u_1 + s_{1+1} \geq n \forall 1=1, 2, \dots, k$ (mód $k+1$). Hay dos casos a considerar:

(a) en la intersección no transversal entre $W^u(\sigma_0)$ y $W^s(\sigma_1)$ existe dimensión para transversalidad (i.e. $u_0 + s_1 \geq n$).

(b) en dicha intersección no existe dimensión para transversalidad (i.e. $u_0 + s_1 < n$).

En las Proposiciones abajo, describimos para cada uno de estos casos, las relaciones que existen entre las dimensiones de las variedades invariantes de todos los elementos críticos en el ciclo.

Proposición 1. En el caso (a) se tiene $u_1 = u_0$ y $s_1 = s_0 \forall 1=1, 2, \dots, k$.

Para el caso (b), la situación más general es que falte sólo una dimensión para transversalidad. Entonces:

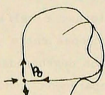
Proposición 2. Si en el caso (b) se cumple $u_0 + s_1 = n - 1$, entonces existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que:

$$u_1 = u_0 + 1, \quad s_1 = s_0 - 1 \quad \forall 1=1, 2, \dots, j \quad \text{y} \quad u_1 = u_0, \quad s_1 = s_0 \quad \forall 1=j+1, \dots, k.$$

Además $u_i + s_{i+1} = \begin{cases} n-1 & \text{si } i=0 \text{ (por hipótesis)} \\ n & \text{si } i \neq 0 \text{ y } i \neq j \\ n+1 & \text{si } i=j \end{cases}$

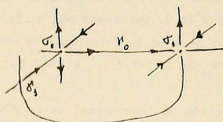
Es decir, la dimensión que falta en una de las intersecciones pasa a alguna otra intersección. Las demostraciones de estas Proposiciones son sencillas y quedan para el lector.

Ahora veamos las situaciones más simples para cada uno de estos casos. Una tangencia homoclinica en dimensión dos pertenece al caso (a):



Estos ciclos han sido ampliamente estudiados, existiendo una amplia literatura. Ver por ejemplo [4].

Para el caso (b), la situación más simple ocurre en dimensión tres y en un ciclo con dos puntos fijos:



Este ciclo ha sido estudiado por L. Díaz [10], probando que un difeomorfismo con un tal ciclo, está en la frontera de regiones abiertas donde no existen difeomorfismos estructuralmente estables.

3.2 Campos de Vectores. Sean $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ elementos críticos de un campo de vector X tales que $W^u(\sigma_i) \cap W^s(\sigma_{i+1}) \neq \emptyset \forall i=1, 2, \dots, k \text{ (mód } k+1)$.

Si todos los elementos críticos son órbitas periódicas, entonces, vía secciones transversales en cada una de ellas, el caso se reduce a difeomorfismo en dimensión $n-1$. Las situaciones más simples a imaginar corresponden a las suspensiones de los ciclos vistos anteriormente.

Por lo tanto consideraremos ciclos en que alguno de los elementos críticos es una singularidad.

Proposición 3. Si alguno de los elementos críticos de un ciclo es una singularidad, entonces en algunas de las intersecciones $W^u(\sigma_i) \cap W^s(\sigma_{i+1}) \neq \emptyset$ falta una dimensión para transversalidad. Más aún, la suma de las dimensiones que faltan en cada una de las intersecciones es mayor o igual al número de singularidades en el ciclo.

Demostración. Sabemos que $u_i + s_i = \begin{cases} n & \text{si } \sigma_i \text{ singularidad} \\ n+1 & \text{si } \sigma_i \text{ órbita periódica} \end{cases}$

Luego, si hay p singularidades y $k+1-p$ órbitas periódicas, se tiene

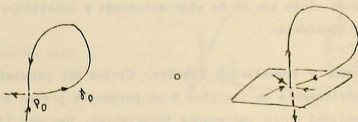
$$\sum_{i=0}^k (u_i + s_i) = (k+1)(n+1) - p$$

Por otro lado, hay dimensión para transversalidad si y sólo si $u_i + s_{i+1} \geq n+1 \forall i=0, 1, \dots, k$ (mód $k+1$). Entonces:

$$\sum_{i=0}^k (u_i + s_{i+1}) = \sum_{i=0}^k (u_i + s_{i+1}) \geq (k+1)(n+1)$$

Luego si hay p singularidades, faltan p dimensiones para tener transversalidad en todas las intersecciones entre variedades invariantes. ■

Puesto que estamos interesados en ciclos que aparecen genéricamente en familias uni-paramétricas, supondremos que el ciclo tiene una única singularidad y que en la intersección donde falta dimensión, sólo falta una. El ciclo es entonces $\{p_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ donde p_0 es la única singularidad y $k \geq 0$. Si $k=0$ el ciclo sólo tiene una singularidad. En este caso tenemos por ejemplo los siguientes ciclos:



Consideremos $k > 0$. Hay dos situaciones posibles:

- La no transversalidad está entre p_0 y σ_1
- La no transversalidad está entre σ_j y σ_{j+1} para $1 \leq j \leq k-1$

Proposición 4. En el caso (a) se tiene $u_1 = u_0 + 1$ y $s_1 = s_0 \quad \forall i=1, \dots, k$

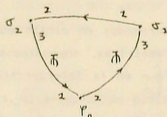
Demostración. En p_0 se tiene $u_0 + s_0 = n$. En órbitas periódicas $u_1 + s_1 = n + 1$. Por hipótesis: $u_0 + s_1 = n$ y $u_1 + u_{1+1} = n + 1 \quad \forall i=1, \dots, k$. De aquí la demostración es inmediata. ■

Proposición 5. En el caso (b) se tiene:

$$\begin{array}{ll} u_1 = u_0 & s_1 = s_0 + 1 \quad \forall i=1, 2, \dots, j \\ u_1 = u_0 + 1 & s_1 = s_0 \quad \forall i=j+1, \dots, k \end{array}$$

Demostración. En p_0 $u_0 + s_0 = n$. En todo otro caso $u_1 + s_1 = n + 1$. Por otra parte, por hipótesis $u_j + s_{j+1} = n$ y $u_i + s_{i+1} = n + 1$ si $i \neq j$. La Proposición es inmediata.

Para terminar esta sección, veamos las situaciones más simples que es posible encontrar en cada uno de los dos casos anteriores. Para el caso (a), tenemos el ciclo estudiado en [8] y que ya mostramos anteriormente. Para el caso (b), la situación más simple sólo ocurre en dimensión cuatro y es la siguiente:



Este tipo de ciclo aún no ha sido estudiado y constituye un bonito problema que considerar.

4. Conclusiones y comentarios finales. Ciclos no persistentes que aparecen genéricamente en familias a un parámetro presentan sólo una no transversalidad entre variedades invariantes. Hay dos tipos de no transversalidad que considerar:

- 1) Existe dimensión para tener transversalidad y
- 2) No existe tal dimensión (genéricamente sólo falta una dimensión).

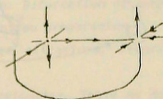
Los ciclos más simples, y que ilustran todas las situaciones posibles son los siguientes:

Difeomorfismos:

- Dimensión dos
- Hay dim. para transv.
- Referencia: [4]



- Dimensión tres
- No hay dim. para transv.
- Referencia: [10]

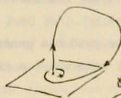


Campo de Vectores: Si el ciclo no contiene singularidades nos reducimos al caso de difeomorfismos. Si hay singularidades, entonces necesariamente faltan dimensiones para transversalidad. Para que falte sólo una dimensión, el ciclo debe tener sólo una singularidad.

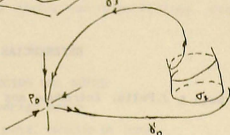
- Dimensión dos
- Referencia: [11]



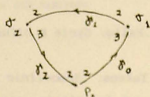
- Dimensión tres
- Referencia: [6]



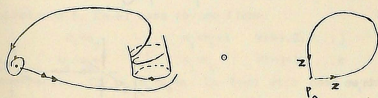
- Dimensión tres
- Referencia: [8]



- Dimensión cuatro
- Referencia: No hay



Nótese que éstas son las situaciones más simples que resultan a partir de las proposiciones de la sección anterior. Otros ciclos son por ejemplo los siguiente:



En estas notas no alcanzamos a decir nada sobre las condiciones que deben satisfacer estos ciclos para que ellos aparezcan separando sistemas con dinámicas simples de sistemas con dinámicas complejas.

Las siguientes preguntas sirven de guía para continuar el estudio de ciclos hiperbólicos:

Cuáles de estos ciclos pertenecen a sistemas que están en la frontera de los sistemas Morse-Smale?

Qué bifurcaciones aparecen al perturbarlos?

Con qué frecuencia aparecen las bifurcaciones al desdoblarlo con una familia a un parámetro?

Es estable la familia que desdobla genéricamente?

Otras referencias sobre el tema son las siguientes: [12], [13], [14].

REFERENCIAS

- [1] W.de Melo & J.Palis: *Introducao aos Sistemas Dinámicos*, Projeto Euclides.
- [2] S.Smale: *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 73, (1967).
- [3] S.Newhouse & J.Palis: *Cycle & bifurcation theory*, Asterisque 31, (1976). 43-140.
- [4] J.Palis & F.Takens: *Homoclinic bifurcations: hiperbolicity, fractional dimensions & infinitely many attractors*, Cambridge Univer-sity Press, por aparecer.

- [5] J.Palis & F.Takens: *Hiperbolicity & the creation of homoclinic orbits*, Ann.Math. 125, (1987).337-374.
- [6] L.P.Silnikov: *A case of creation of a countable number of periodic motions*, Sov.Math.Dokl.6, (1965), 163-166.
- [7] R.Labarca & M.J.Pacífico: *Stability of singular horseshoes*, Topology 25(3), (1986), 337-352.
- [8] R.Bamón, R.Labarca, R.Mane & M.J.Pacífico: *Bifurcation of simple vector fields through Singular cycles*, Preprint en preparaci6n.
- [9] L.Mora & M.Viana: *Abundance of strange attractors*, Preprint IMPA, (1990).
- [10] L.Díaz: *Bifurcaciones e ciclos heterodimensionales*, Tesis de doctorado, IMPA, (1990).
- [11] J.Sotomayor: *Generic one-parameter families of vector fields on two dimensional manifolds*, Publ.Math. IHES 43, (1974), 5-46.
- [12] C.Blazquez: *Doble homoclinica en ecuaciones parabólicas*, Preprint (1990).
- [13] J.C.Ceballos & R.Labarca: *A note about a modulus for Silnikov singularities*, Sometido al Proc.Amer.Math.Soc.
- [14] J.C.Ceballos: *Módulos para Silnikov 3-dimensional*, Tesis magister U.C.V (1989).
- [15] S.Newhouse, J.Palis & F.Takens: *Bifurcations and Stability of families of diffeomorphisms*, Publ.Math. IHES 57, (1983), 5-71.
- [16] S.Newhouse: *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ.Math. THES 50, (1979), 349-399.
- [17] E.Stange: *Bifurcaciones de ciclos no hiperbólicas*, Proyecto de Tesis de doctorado, IMPA.

DIRECCION DEL AUTOR

Rodrigo Bamón

UNIVERSIDAD DE CHILE, FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
CASILLA 653 SANTIAGO.