CUBO 7, 22-32 (1991)
Recibido: Enero 1991

OMISION DE TIPOS PARA ALGEBRAS PARCIALES

por

Elena Olivos[1]

Introducción. En toda teoría matemática surgen a menudo sistemas algebraicos dotados de algunas operaciones que están definidas sólo sobre un subconjunto del universo. Este tipo de estructuras, que conocemos como álgebras parciales, no pueden ser estudiados de la forma usual desde el punto de vista de teoría de modelos.

Para hacerlo, se adapta en [M] un sistema axiomático apropiado del cual se derivan los resultados lógicos usuales, algunos con pequeñas modificaciones.

Considerando las nociones de homomorfismo, subálgebra y otras como una generalización de las usuales, ahora para álgebras parciales, revisamos los teoremas fundamentales de teoría de modelos y mostramos que estos teoremas son válidos para teorías más amplias que admiten modelos parciales. Esto nos permite generalizar a teorías con álgebras parciales uno de los teoremas más bonitos de la teoría de modelos que es el de Omisión de Tipos.

Con este resultado, disponemos de las herramientas que hacen posible construir modelos, en particular numerables, que satisfagan u omitan ciertas propiedades.

Formalmente, un *álgebra parcial* es una estructura

[1] Subvencionado parcialmente por Dir. de Postgrado de la P.U.C.de Chile.

$\mathfrak{A}=\langle A,\ p_i,\ f_j,\ c_k\rangle_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}}$

tal que:

i) $A\neq\emptyset$ y se designa por X un elemento que estará fuera del universo de toda álgebra parcial.

ii) c_k son elementos distinguidos de A para cada $k\in K$.

iii) $p_i\subseteq {}^{n_i}A$ para cada $i\in I$, con $n_i\in\omega$,

iv) f_j son operaciones parciales de rango $\rho(f_j)$ para cada $j\in J$ tales que:

$$f_j : {}^{\rho(f_j)}(A\cup\{X\})\ (A\cup\{X\}); \rho(f_j)>0$$

y $f_j(\tau_0,\ldots,\tau_{n-1})\in A$ implica $\tau_i\in A$ para todo $i<\rho(f_j)$.

El **Sistema Axiomático** que usaremos es el siguiente:

A1) $(\emptyset\longrightarrow\psi)\longrightarrow((\psi\longrightarrow\chi)\longrightarrow(\emptyset\longrightarrow\chi))$

A2) $(\sim\emptyset\longrightarrow\emptyset)\longrightarrow\emptyset$

A3) $\emptyset\longrightarrow(\sim\emptyset\longrightarrow\psi)$

A4) $\forall u(\emptyset\longrightarrow\psi)\longrightarrow(\forall u\ \emptyset\longrightarrow\forall u\ \psi)$

A5) $\forall u\ \emptyset\longrightarrow\emptyset$

A6) $\emptyset\longrightarrow\forall u\ \emptyset$ donde u no aparece en $\emptyset$.

A7) $\exists u(u\approx\tau)$ donde $u\neq\tau$, τ es variable o símbolo de constante individual.

A8) $(\forall u\ u\not\approx\tau_1)\wedge(\forall u\ u\not\approx\tau_2)\longrightarrow\tau_1\approx\tau_2$

A9) $\tau\approx\sigma\longrightarrow(\emptyset\longrightarrow\psi)$ donde ψ se obtiene de la formula atómica $\emptyset$ sustituyendo algunas apariciones del término τ por el término σ.

A10) $\tau\approx\sigma\longrightarrow(\tau_1\approx\sigma_1)$ donde el término σ_1 se obtiene del término τ_1 sustituyendo algunas apariciones del término τ por el término σ.

A11) $\exists x(x\approx f(\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}))\longrightarrow\exists x_0(x_0\approx\tau_0)\wedge\ldots\wedge\exists x_{n-1}(x_{n-1}\approx\tau_{n-1})$

Como reglas de derivación se tiene:

1. $\dfrac{\phi,\ \phi\longrightarrow\psi}{\psi}$ 2. $\dfrac{\phi}{\forall u\phi}$

1. TEORIA DE MODELOS PARA ALGEBRAS PARCIALES.

En esta sección se revisan teoremas centrales en teoría de modelos, generalizándolos a la teoría de álgebras parciales.

1.1 Homomorfismo de Algebras Parciales. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras parciales. Entonces h es un *homomorfismo parcial* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si y sólo si

$h: A\cup\{X\}\ B\cup\{X\}$ es una función tal que:

i) Si c es símbolo de constante, $h(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{B}}$

ii) Si R es símbolo de relación n-aria y $a_1,\dots a_n\in A$, entonces $R^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)$ ssi $R^{\mathfrak{B}}(ha_1,\dots,ha_n)$.

iii) Si F es símbolo de función (parcial) n-aria y $a_1,\dots a_n\in A$, entonces $F^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\in A$ implica $F^{\mathfrak{B}}(ha_1,\dots,ha_n)\in B$ y

$$h(F^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n))=F^{\mathfrak{B}}(ha_1,\dots,ha_n).$$

h es homomorfismo parcial *lleno*, si es un homomorfismo parcial que cumple i) y ii) y para cada símbolo de función n-aria F, $a_1,\dots,a_n\in A$, $F^{\mathfrak{B}}(ha_1,\dots,ha_n)=ha$ implica que existen $b_1,\dots,b_n$, $b\in A$, tal que $h(a_i)=h(b_i)$ para $i=1,\dots,n$ y $h(a)=h(b)$ y $F^{\mathfrak{A}}(b_1,\dots,b_n)=b$.

h es homomorfismo parcial *fuerte* si es un homomorfismo parcial que cumple i) y ii) y para cada símbolo de función n-aria F, $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$,

$F^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\in A$ ssi $F^{\mathfrak{B}}(ha_1,\dots,ha_n)\in B$ y

$h(F^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n))=F^{\mathfrak{B}}(ha_1,\dots,ha_n)$.

Finalmente, dos estructuras parciales $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfas* si y sólo si existe $h: A\cup\{X\}\to B\cup\{X\}$, homomorfismo parcial fuerte, 1-1 y sobre.

1.2 Definición . Sea $\mathfrak{L}$ un lenguaje que admite funciones parciales, $\mathfrak{A}$ una estructura para $\mathfrak{L}$. Sea s: *variables*$\longrightarrow A$. Se define la extensión $\bar{s}$ de s como la función $\bar{s}$: *términos*$\longrightarrow A\cup\{X\}$ tal que

$\bar{s}(x)=s(x)$ para x variable,

$\bar{s}(c)=c^{\mathfrak{A}}$ para c constante *y*

$\bar{s}(f\tau_1,\dots,\tau_n)=f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}\tau_1,\dots,\bar{s}\tau_n)$ para f símbolo de operación parcial n-aria y $\tau_1,\dots,\tau_n$ términos.

La definición de que una fórmula φ con asignación s es satisfecha en una estructura $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}\models\varphi[s]$) es la usual, salvo por el hecho que las variables están restringidas a elementos de A. En particular,

$$\mathfrak{A}\models\exists x(x\approx\tau)[s] \text{ sii } \bar{s}(\tau)\in A$$

y

$$\mathfrak{A}\models\tau_1\approx\tau_2[s] \text{ sii } \bar{s}(\tau_1)\in A \text{ y } \bar{s}(\tau_2)\in A \text{ y } \bar{s}(\tau_1)=\bar{s}(\tau_2)$$

o bien

$$\bar{s}(\tau_1)\notin A \text{ y } \bar{s}(\tau_2)\notin A$$

1.3 Teorema de Homorfismos. Sea $\mathfrak{L}$ lenguaje que admite funciones parciales, sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos para $\mathfrak{L}$, y sea s: *variables* $\longrightarrow A\cup\{X\}$, h homomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Entonces

i) Para cualquier término τ tal que $\bar{s}(\tau)\in A$, $h(\bar{s}(\tau))\in B$ y $h(\bar{s}(\tau))=\overline{h\circ s}(\tau)$.

ii) Para toda fórmula φ sin cuantificadores y que no contiene el símbolo $\approx$ y tal que para todo término τ de $\mathcal{L}$, $\bar{s}(\tau)\in A$:

$$\mathfrak{A}\models\varphi[s] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B}\models\varphi[h\circ s]$$

iii) Si h es 1-1, entonces (ii) es verdadera quitando la restricción del símbolo $\approx$.

iv) Si h es sobre, entonces (ii) es verdadera quitando la restricción de los cuantificadores.

v) Si h es homomorfismo parcial fuerte, entonces (i), (ii), (iii), (iv) son verdaderas quitando la restricción que $\bar{s}(\tau)\in A$ para todo término τ que aparece en φ.

Demostración:

i) Inducción sobre la complejidad del término usando A7 y A11.

ii) Inducción sobre la complejidad de la fórmula.

iii) Directa usando que h es 1-1 y parte i).

iv) Sea $\varphi: \exists x\psi$ tal que para todo término τ que aparece en ψ, $\bar{s}(\tau)\in A$ y supongamos que $\mathfrak{A}\models\psi[s]$ ssi $\mathfrak{B}\models\psi[h\circ s]$

$$\mathfrak{A}\models\varphi[s] \text{ ssi existe } a\in A \text{ tal que } \mathfrak{A}\models\psi\left[s\binom{x}{a}\right]$$

$$\text{ssi existe } a\in A \text{ tal que } \mathfrak{B}\models\psi\left[h\circ\left(s\binom{x}{a}\right)\right]$$

$$\text{ssi existe } a\in A \text{ tal que } \mathfrak{B}\models\psi\left[(h\circ s)\binom{x}{ha}\right]$$

donde $s\binom{x}{a}(y)=\begin{cases} s(y) & \text{si } y\neq x \\ a & \text{si } y=x \end{cases}$

Nota . Es fácil ver que $(h\circ s)\left(\binom{x}{ha}\right)=h\circ\left(s\binom{x}{a}\right)$.

Entonces existe $b=h(a)\in B$ tal que $\mathfrak{B}\models\psi[(h\circ s)\binom{x}{b}]$ entonces $\mathfrak{B}\models\varphi[h\circ s]$.

Ahora $\mathfrak{B}\models\varphi[h\circ s]$ si y sólo si existe $b\in B$ tal que $\mathfrak{B}\models\psi[(h\circ s)\binom{x}{b}]$, entonces, como h es sobre, existe $a\in A$ con $ha=b$ tal que $\mathfrak{B}\models\psi[(h\circ s)\binom{x}{ha}]$ y con eso, la afirmación sigue.

v) Son directas. ∎

1.4 Corolario. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son álgebras parciales isomorfas, entonces $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ (es decir, para cada oración φ, $\mathfrak{A}\models\varphi$ ssi $\mathfrak{B}\models\varphi$). ∎

1.5 Teorema de Corrección. Sea Σ un conjunto de oraciones. Entonces $\Sigma\vdash\varphi$ implica que $\Sigma\models\varphi$.

Demostración. La demostración es estándar considerando tres casos: φ un axioma, $\varphi\in\Sigma$ o bien φ es obtenida por modus ponens o generalización. Por esta razón, se da la demostración sólo para el caso en que φ es un axioma específico de este sistema.

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo parcial para cierto lenguaje $\mathcal{L}$, s asignación arbitraria en $\mathfrak{A}$.

i) φ es el axioma (A7). Sea τ un símbolo individual. Entonces $\mathfrak{A}\models\exists u(u\approx\tau)[s]$ ssi existe algún elemento $a\in A$ tal que $\bar{s}(\tau)=a$. Como τ es símbolo individual, $\tau=x$ con x variable, ó $\tau=c$, con c símbolo de constante. Si $\tau=x$, entonces $\bar{s}(\tau)=s(x)\in A$ y se elige $a=s(x)$. Si $\tau=c$, entonces $\bar{s}(c)=c^{\mathfrak{A}}\in A$ y se elige $a=c^{\mathfrak{A}}$.

ii) φ es el axioma (A8). Entonces, por demostrar:

$$\mathfrak{A}\models\Big[(\forall u(u\not\approx\tau_1)\wedge\forall u(u\not\approx\tau_2))\longrightarrow\tau_1\approx\tau_2\Big][s]$$

Supongamos que $\mathfrak{A}\models\forall u(u\not\approx\tau_1)\wedge\forall u(u\not\approx\tau_2)[s]$, entonces $\mathfrak{A}\not\models\exists u(u\approx\tau_1)[s]$ y $\mathfrak{A}\not\models\exists u(u\approx\tau_2)[s]$. Luego $\bar{s}(\tau_1)\notin A$ y $\bar{s}(\tau_2)\notin A$. Por lo tanto $\bar{s}(\tau_1)=\bar{s}(\tau_2)$ y $\mathfrak{A}\models\tau_1\approx\tau_2[s]$.

iii) φ es el axioma (A11). Entonces, por demostrar:

$$\mathfrak{A}\models\exists x(x\approx f(\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}))\longrightarrow\exists x(x\approx\tau_0),\ldots,\exists x(x\approx\tau_{n-1})$$

Supongamos que $\mathfrak{A}\models\exists x(x\approx f(\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}))[s]$. Entonces $\bar{s}(f(\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}))=f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(\tau_0),\ldots,\bar{s}(\tau_{n-1}))\in A$. Luego, como $\mathfrak{A}$ es álgebra parcial, $\bar{s}(\tau_i)\in A$ para $i<n$. Luego $\mathfrak{A}\models\exists x_i(x_i\approx\tau_i)$ para cada $i<n$. ∎

1.6 Nota: El teorema de completud está demostrado en [M] pág 17. Con estos dos teoremas se obtiene el teorema de compacidad, y, por la construcción del modelo canónico de un conjunto de oraciones ([M] pág. 19), se tiene el teorema de Lowenheim-Skolem (descendente). El teorema de Lowenheim-Skolem-Tarski (ascendente) es consecuencia de los anteriores.

Veamos ahora un resultado clásico de teoría de modelos, que afirma que toda álgebra está isomorfamente sumergida en algún ultraproducto de subálgebras finitas de ella. Para asegurarlo, el lenguaje considerado no debe tener símbolos de función. Ahora mostramos que con este sistema axiomático que permite modelos parciales, esta restricción desaparece.

1.7 Subálgebra Parcial. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras parciales. Entonces $\mathfrak{A}$ es Subálgebra parcial de $\mathfrak{B}$ sii

i) $A\subseteq B$ y $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen los mismos elementos distinguidos.

ii) Para cada símbolo de relación n-aria R y $a_1,\ldots,a_n\in A$,

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n) \text{ sii } R^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n).$$

iii) Para cada símbolo de función n-aria F y $a_1,\ldots,a_n\in A$,

$$F^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)=\begin{cases} F^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n) & \text{si } F^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n)\in A \\ X & \text{si no .}\end{cases}$$

1.8 Definición. Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra parcial para un lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$ un conjunto de oraciones verdaderas en $\mathfrak{A}'=(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$ tal que $\varphi\in\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$ ssi φ es de una de las siguientes formas:

i) $P(a_1,\ldots,a_n)$ con $a_1,\ldots,a_n\in A$, P relación.

ii) $\sim P(a_1,\ldots,a_n)$ con $a_1,\ldots,a_n\in A$, P relación.

iii) $\exists x(x\approx\tau_1)\longrightarrow(\exists x(x\approx\tau_2)\wedge\tau_1\approx\tau_2)$, τ_1,τ_2 términos constantes de $\mathcal{L}$.

Denotaremos por $\tau_1\dot{\approx}\tau_2$ las fórmulas de este tipo.

iv) $\forall x(x\not\approx\tau)$, τ término constante de $\mathcal{L}$.

1.9 Proposición. Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ álgebras parciales para un lenguaje $\mathcal{L}$. Si $\mathfrak{B}$ puede expandirse a un modelo parcial de $\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{A}$ está isomorfamente sumergido en $\mathfrak{B}$.

Demostración. Sea $\mathcal{L}_A=\mathcal{L}\cup\{c_a : a\in A\}$. Sea $\mathfrak{B}'=(\mathfrak{B},b_a)_{a\in A}$ expansión de $\mathfrak{B}$ a $\mathcal{L}_A$ que es modelo de $\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$ y sea $C=\{b_a : a\in A\}$. Entonces C contiene las constantes de B. En efecto, si c es símbolo de constante de $\mathfrak{B}$, existe $a\in A$ tal que $c^{\mathfrak{A}}=a$. Luego $(\exists x(x\approx c)\longrightarrow(\exists x(x\approx c_a)\wedge c_a\approx c))\in\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$, de donde $\mathfrak{B}'\models(\exists x(x\approx c^{\mathfrak{B}})\longrightarrow(\exists x(x\approx b_a)\wedge b_a\approx c^{\mathfrak{B}}))$. Así, $c^{\mathfrak{B}}=b_a\in C$.

Sea $\mathfrak{C}$ la subálgebra parcial de $\mathfrak{B}$ con universo C, con las operaciones y relaciones restringidas de $\mathfrak{B}$.

Se define $h: A\cup\{X\}\longrightarrow C\cup\{X\}$ por $a\longmapsto b_a$. Obviamente, h es 1-1 y sobre.

Falta probar que h es homomorfismo parcial fuerte.

i) Sea c símbolo de constante de $\mathcal{L}$. Entonces $c^{\mathfrak{A}}=a$ para algún $a\in A$ y $(\exists x(x\approx c)\longrightarrow(\exists x(x\approx a)\wedge c\approx a))\in\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$. Luego

$\mathfrak{B}'\models(\exists x(x\approx c^{\mathfrak{B}})\longrightarrow\exists x(x\approx b_a)\wedge c^{\mathfrak{B}}\approx b_a)$. $h(c^{\mathfrak{A}})=h(a)=b_a=c^{\mathfrak{B}}$.

ii) Sea P símbolo de relación n-aria, $a_0,\ldots,a_{n-1}\in A$.

Si $P^{\mathfrak{A}}(a_0,\ldots,a_{n-1})$ entonces $P(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\dot{\Delta}_{\mathfrak{A}}$, por lo tanto $P^{\mathfrak{B}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})$. Luego $P^{\mathfrak{C}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})$.

Ahora, si $\sim P^{\mathfrak{B}}(a_0,\ldots,a_{n-1})$, entonces $\sim P(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\Delta^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$, por lo tanto $\sim P^{\mathfrak{B}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})$. Luego $\sim P^{\mathfrak{C}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})$.

iii) Sea F símbolo de función (parcial) n-aria, $a_0,\ldots,a_{n-1}\in A$. Si $F^{\mathfrak{A}}(a_0,\ldots,a_{n-1})\in A$, entonces $F^{\mathfrak{A}}(a_0,\ldots,a_{n-1})=a$ para algún $a\in A$. Luego, $a\approx \dot{F}(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\Delta^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$. Entonces, $\mathfrak{B}'\models b_a\approx \dot{F}^{\mathfrak{B}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})$ y $\mathfrak{B}'\models \exists\, x(x\approx b_a)$.

Luego $\mathfrak{B}'\models \exists x(x\approx F^{\mathfrak{B}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}}))\wedge b_a\approx F^{\mathfrak{B}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})$.

Así $F^{\mathfrak{C}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}})=b_a\in C$ y $h(F^{\mathfrak{A}}(a_0,\ldots,a_{n-1}))=F^{\mathfrak{C}}(ha_0,\ldots,ha_{n-1})$.

Ahora bien, si $F^{\mathfrak{A}}(a_0,\ldots,a_{n-1})\notin A$, entonces $\forall x(x\approx F(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\Delta^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$.

Luego, $\mathfrak{B}'\models \forall x(x\approx F^{\mathfrak{B}}(b_{a_0},\ldots,b_{a_{n-1}}))$ y con ello, $F^{\mathfrak{C}}(ha_0,\ldots,ha_{n-1})\notin C$.

Por lo tanto, h es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{C}$ y con ello, $\mathfrak{A}$ está isomorfamente sumergida en $\mathfrak{B}$.

1.10. Producto reducido de álgebras parciales. Sea D un filtro propio sobre I, para cada $i\in I$, sean $\mathfrak{A}_i$, álgebras parciales con

$$\mathfrak{A}_i=\langle A_i,R_{(i)},F_{(i)},c_{(i)}\rangle$$

donde

$$R_{(i)}=\langle R_{(i)_k}:k\in K\rangle \text{ relaciones}$$

$$F_{(i)}=\langle F_{(i)_j}:j\in J\rangle \text{ funciones parciales}$$

$$c_{(i)}=\langle c_{(i)_m}:m\in M\rangle \text{ elementos distinguidos.}$$

Entonces, el producto reducido de las álgebras parciales $\mathfrak{A}_i$, denotado por $\mathfrak{B}=\Pi_D\mathfrak{A}_i$ es el álgebra parcial.

$$\mathfrak{B}=\langle \Pi_D A_i,S_k,G_j,C_m\rangle_{k\in K;\,j\in J;\,m\in M}$$

donde i) $C_m=\langle c_{(i)_m}:i\in I\rangle_D$ para cada $m\in M$

ii) Para cada $k\in K$, $f_0^D,\ldots,f_{n-1}^D\in\Pi_D A_i\cup\{X\}$

$$S_k=\{\langle f_0^D,\ldots,f_{n-1}^D\rangle:\{i\in I:R_{(i)_k}(f_0(i),\ldots,f_{n-1}(i))\}\in D\}.$$

iii) Para cada $j\in J$, $f_0^D,\ldots,f_{n-1}^D\in\Pi_D A_i\cup\{X\}$

$$G_j(f_0^D,\ldots,f_{n-1}^D)=\begin{cases}\langle F_{(i)_j}(f_0(i),\ldots,f_{n-1}(i)):i\in I\rangle & \text{si } \{i\in I:F_{(i)_j}(f_0(i),\ldots,f_{n-1}(i))\in A_i\}\in D\\ X & \text{si no}\end{cases}$$

1.11 Proposición. (Versión de ultraproductos para el teorema de compacidad en un lenguaje con modelos parciales).

Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathfrak{L}$, sea $I=S_\omega(\Sigma)$, ($S_\omega(\Sigma)$ denota el conjunto $\{x: x\subseteq\Sigma$ y x es finito$\}$) y para cada $i\in I$, sea $\mathfrak{A}_i$ un modelo parcial de i. Entonces existe un ultrafiltro D sobre I tal que $\Pi_D\mathfrak{A}_i \models \Sigma$.

Demostración. [Ch-K]p. 172. Es idéntica a la usual debido a que el teorema fundamental de ultraprodutos es válido en este sistema ([M] teorema 5.7 pág. 32). ∎

1.12 Proposición. Sea $\mathfrak{L}$ un lenguaje que no tiene símbolos de constantes. Entonces, todo modelo parcial $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{L}$ puede sumergirse isomorfamente en algún ultraproducto de submodelos finitos de $\mathfrak{A}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{L}_A=\mathfrak{L}\cup\{c_a : a\in A\}$ y sea $\Sigma=\Delta^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}'=(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$, $I=S_\omega(\Sigma)$. En cada $i\in I$ aparece un número finito de constantes nuevas, sean ellas $c_{j_1},\dots,c_{j_i}$.

Sea $\mathfrak{A}'_i=(\mathfrak{A}_i,a_{j_1},\dots,a_{j_i})$ donde $|\mathfrak{A}_i|=\{a_{j_1},\dots,a_{j_k}\}$. Como no hay símbolos de constante, $\mathfrak{A}_i$ con las operaciones y relaciones restringidas de $\mathfrak{A}$ es subálgebra parcial de $\mathfrak{A}$.

Luego $\mathfrak{A}'_i \models i$ (pues las subálgebras parciales preservan las identidades definidas) y por la proposición 2.7 existe un ultrafiltro D sobre I tal que $\Pi_D\mathfrak{A}'_i \models \Delta^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$.

Ahora, por el teorema de expansión (que también es válido en este sistema), $\Pi_D\mathfrak{A}_i$ es el reducto de $\Pi_D\mathfrak{A}'_i$ a $\mathfrak{B}$.

Luego $\Pi_D\mathfrak{A}_i$ puede expandirse a un modelo $\Delta^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$ y con ello, $\mathfrak{A}$ está isomorfamente sumergido en $\Pi_D\mathfrak{A}_i$. ∎

2. OMISION DE TIPOS.

Se usará la notación de [Ch-K](p. 76):

2.1 Definición. Dado $\Sigma=\Sigma(x_1,\dots,x_n)$ un conjunto de fórmulas, y $\mathfrak{A}$ modelo parcial para $\mathfrak{L}$, se dice que $\mathfrak{A}$ *realiza* Σ si y sólo si hay una n-tupla de elementos de A que satisface Σ en $\mathfrak{A}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ omite Σ si y sólo si no lo realiza.

2.2 Ejemplo. En Th(<N, 0, S, ->), sea

$$\Sigma(x)=\{\exists y(x\text{-}0=y),\exists y(x\text{-}S0=y),\exists y(x\text{-}SS0=y),\dots\}$$

Es obvio que ningún número natural realiza Σ, luego $\mathfrak{N}^{\bullet}$=<N, 0, S, -> es un modelo que omite Σ. Es claro, además, que todo subconjunto finito de $\sum$ es realizado por algún número natural.

Se tiene la siguiente proposición:

2.3 Proposición. Sea T una teoría con modelos parciales y sea $\sum=\sum(x_1,\dots,x_n)$ un conjunto de fórmulas. Entonces, son equivalentes:

i) T tiene un modelo parcial que realiza $\sum$.

ii) Todo subconjunto finito de $\sum$ es realizado en algún modelo parcial de T.

iii) $T\cup\{(\exists x_1,\dots,x_n)(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_m): m<\omega,\ \sigma_1,\dots,\sigma_m\in\sum\}$ es consistente.

Demostración. i)$\to$ii) y iii)$\to$ii) son obvias.

ii)$\to$iii) Sea $\Delta=\{(\exists x_1,\dots,x_n)(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_m): m<\omega, \sigma_1,\dots,\sigma\in\sum\}$. Debemos probar que $T\cup\Delta$ es consistente.

Sea $\Delta_0\subseteq\Delta$, Δ_0 finito. $\Delta_0=\{(\exists x_1,\dots,x_n)\Theta_0,\dots,(\exists x_1,\dots,x_n)\Theta_n\}$ donde cada Θ_i es de la forma $\sigma_{i_1}\wedge\dots\wedge\sigma_{i_p}$ $i<\omega$.

Sea $\mathfrak{A}$ el modelo parcial de T que realiza $\sum_0=\{\Theta_0,\dots,\Theta_r\}$. Entonces, $\mathfrak{A}$ es modelo parcial de Δ_0 y con ello $T\cup\Delta$ es consistente.

ii)$\to$i) Sea $\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup\{c_1,\dots,c_n\}$ y sea $\sum'=\sum(x_1/c_1,\dots,x_n/c_n)$, donde $\sum(x_1/c_1,\ \dots,\ x_n/c_n)=\{\sigma(x_1/c_1,\dots,x_n/c_n):\sigma\in\sum\}$ y $\sigma(x_1/c_1,\dots,x_n/c_n)$ es la fórmula que se obtiene de reemplazar simultáneamente todas las apariciones libres de x_i por c_i para $i=1,\dots,n$.

Sea $\sum_0'\subseteq\sum'$ finito. Por hipótesis, hay un modelo parcial $\mathfrak{A}_0$ de T que realiza $\sum_0$. Sea $(a_1,\dots,a_n)$ la tupla de elementos de $\mathfrak{A}_0$ que satisface cada fórmula de $\sum_0$. Entonces, haciendo $c_1^{\mathfrak{A}}=a_1,\dots,c_n^{\mathfrak{A}}=a_n$, se tiene que $\mathfrak{A}_0'=(\mathfrak{A}_0,a_1,\dots,a_n)$ es un modelo de $\sum_0'$. Por compacidad, $\sum'$ tiene un modelo $\mathfrak{A}'=(\mathfrak{A},c_1^{\mathfrak{A}},\dots,c_n^{\mathfrak{A}})$. Luego $\mathfrak{A}$ es el modelo parcial que realiza $\sum$ con la tupla $c_1^{\mathfrak{A}},\dots,c_n^{\mathfrak{A}}$. ∎

Luego, volviendo al ejemplo 2.2, por la Proposición anterior, hay un modelo de $Th(\langle\mathbb{N},0,S,\rightarrow\rangle)$ que realiza $\sum$. Claramente, este modelo es no estándar.

2.4 Definición. Sea $\sum(x_1,\dots,x_n)$ un conjunto de fórmulas para $\mathcal{L}$. Una teoría en $\mathcal{L}$ se dice que realiza localmente $\sum$ si y sólo si existe una fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ en $\mathcal{L}$ tal que:

i) φ es consistente con T.

ii) para cada $\sigma\in\sum$, $T\models\varphi\to\sigma$ (es decir, toda n-tupla en un modelo de T que satisface φ, realiza $\sum$).

Se dice que T omite localmente $\sum$ si y sólo si para cada fórmula φ, consistente con T, existe $\sigma\in\Sigma$ tal que $\varphi\wedge\neg\sigma$ es consistente con T (es decir, si T no realiza localmente Σ).

2.5 Proposición. Sea T una teoría completa en $\mathfrak{L}$ que tiene modelos parciales (luego, todo modelo de T es parcial), y sea $\Sigma=\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ un conjunto de fórmulas de $\mathfrak{L}$. Si T tiene un modelo que omite Σ, entonces T omite localmente Σ.

Demostración. [Ch-K]pág. 79. ∎

2.6 Teorema de omisión de tipos, para teorías con modelos parciales. Sea T una teoría con modelos parciales en un lenguaje numerable, y sea $\Sigma=\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ un conjunto de fórmulas. Si T omite localmente Σ, entonces T tiene un modelo parcial numerable que omite Σ.

Demostración. [Ch-K] pág. 79. Se hace para $\Sigma(x)$ para simplificar la notación. Se supone que T omite localmente Σ.

Sea $C=\{c_0,c_1,\cdots,\}$ un conjunto numerable de nuevos símbolos constantes. Entonces $\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}\cup C$ es numerable. Se ordenan todas las oraciones de $\mathfrak{L}'$: $\varphi_0,\varphi_1,\cdots$ y se construye una cadena de teorías:

$$T=T_0\subseteq T_1\subseteq\cdots\subseteq T_m\subseteq\cdots \text{ tales que}$$

1. Cada T_m es teoría consistente de $\mathfrak{L}'$ y es extensión finita de T.
2. O bien $\varphi_m\in T_{m+1}$ o $(\neg\varphi_m)\in T_{m+1}$
3. Si $\varphi_m=\exists x\psi(x)$ y $\varphi_m\in T_{m+1}$, entonces $\psi(c_p)\in T_{m+1}$, donde c_p es la primera constante que no aparece en T_m ni en φ_m.
4) Hay una fórmula $\sigma(x)\in\Sigma(x)$ tal que $(\neg\sigma(c_m))\in T_{m+1}$.

Se considera $T_\omega=\bigcup_{n\in\omega}T_n$. Esta construcción está hecha con detalle en [Ch-K] pág. 79. La construcción del modelo numerable es ligeramente diferente, por el hecho que los modelos de T_ω son modelos parciales.

Como $\mathfrak{L}$ es numerable, usando Lowenheim-Skolem, se toma un modelo parcial numerable de T_ω , $\mathfrak{B}'=(\mathfrak{B},b_0,b_1,\cdots)$.

Entonces, para cada oración φ se tiene: $\mathfrak{B}'\models\varphi$ ssi $T_\omega\models\varphi$ (pues T_ω es completa). Sea

$$A=\left\{t\left[b_{i_0},\cdots,b_{i_{n-1}}\right]:\ t\in\mathfrak{L}',\ b_{i_j}\in\{b_0,b_1,\cdots\} \text{ si } j<n \text{ y } t\left[b_{i_0},\cdots,b_{i_n}\right]\in B\right\}.$$

Obviamente, $\{b_0,b_1,\cdots,\}\subseteq A$. ($c_i$ es un término de $\mathfrak{L}'$). Es más, $t\left[b_{i_0},\cdots,b_{i_{n-1}}\right]\in A$ implica que $t\left[b_{i_0},\cdots,b_{i_{n-1}}\right]\in B$.

Luego $T_\omega\models\exists x(x\approx t(c_{i_1},\cdots,c_{i_n})$. y por (3), $c_p\approx t(c_{i_1},\cdots,c_{i_n})\in T_\omega$ para cierto p.

Luego, $b_p = t(b_{1_1}, \cdots, b_{1_n})$ y con ello $A = \{b_0, b_1 \cdots\}$.

Sea $\mathfrak{A}'$ la subálgebra parcial de $\mathfrak{B}$ con universo A (es obvio que resulta un subálgebra parcial pues tiene los mismos elementos distinguidos por construcción).

$$\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, b_0, b_1, \cdots)$$

Basta probar que $\mathfrak{A}'$ es modelo de T_ω y con ello $\mathfrak{A}$ es un modelo parcial numerable de T que, por (4), omite $\sum$, (todo b_i satisface $\sim\sigma(x)$ para algún $\sigma(x) \in \sum(x)$). ■

Bibliografia

[Ch-K] **Chang C.C. and Keisler H.J.** *Model Theory*. North-Holland Pub. Co. Amsterdam. 1978.

[G] **Gratzer, G.** *Universal Algebras*. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, 1968.

[M] **Mikenberg I.** *Algebras Parciales*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas. Santiago. 1978.

[O] **Olivos H., Elena.** *Algunos resultados sobre álgebras parciales*. Tesis de Magister. Pontificia Universidad Católica de Chile , Facultad de Matemáticas, Santiago 1990.

DIRECCION DEL AUTOR

Elena Olivos Herreros
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y ESTADISTICA
UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
CASILLA 54-D. TEMUCO, CHILE